

Логические основы ЭВМ

Базовые понятия

- Любое вычислительное устройство компьютера (например, двоичный сумматор) представляет собой **электронную схему**, состоящую из *простых логических элементов*, работа которых базируется на законах и правилах алгебры логики.
- **Алгебра логики** (*булева алгебра*) – раздел дискретной математики, изучающий *высказывания и логические операции* над ними.
- **Высказывание** – связанное

доказательство, истинное предложение, с которым

- **Логическая формула (логическое выражение)** – это составное высказывание, включающее логические значения (**Истина** или **Ложь**), логические переменные, логические функции и логические операции.

Логические операции

В алгебре логики имеются три базовые операции:

- **логическое отрицание** (инверсия, НЕ, NOT, $\neg$, $\neg$);
- **логическое умножение** (конъюнкция, И, AND, &, $\wedge$);
- **логическое сложение** (дизъюнкция, ИЛИ, OR, |, $\vee$, +).

Таблицы истинности для логических операций

В таблице истинности перечислены все возможные сочетания логических значений операндов вместе со значением результата операции для каждого из этих сочетаний.

Инверсия. Результат операции логического отрицания равен **1(истина)**, если значение переменной равно **0(ложь)** и, наоборот, результат равен **1(истина)**, если переменная

A	¬A
0	1
1	0

Конъюнкция. Результат операции равен **1(истина)** только тогда, когда обе переменные равны **1(истина)**.

<i>A</i>	<i>B</i>	$A \wedge B$
0	0	0
0	1	0
1	0	0
1	1	1

Дизъюнкция. Результат операции равен **0(ложь)** только тогда, когда обе переменные равны **0(ложь)**.

<i>A</i>	<i>B</i>	$A \vee B$
0	0	0
0	1	1
1	0	1
1	1	1

Импликация (логическое следование «если А, то В», $\rightarrow$). Результат операции равен **0(ложь)** тогда и только тогда, когда первая переменная равна **1(истина)**, а вторая – **0(ложь)**.

<i>A</i>	<i>B</i>	<i>A</i> $\rightarrow$ <i>B</i>
0	0	1
0	1	1
1	0	0
1	1	1

Эквивалентность (логическое равенство, $\sim$). Результат операции равен **1(истина)** тогда и только тогда, когда оба операнда **одинаково равны** либо **0(ложь)**, либо **1(истина)**.

<i>A</i>	<i>B</i>	<i>A</i> $\sim$ <i>B</i>
0	0	1
0	1	0
1	0	0
1	1	1

Преобразование логических формул

Приоритеты выполнения логических операций при преобразовании логических формул следующие:

- 1) инверсия;
- 2) конъюнкция;
- 3) дизъюнкция;
- 4) импликация;
- 5) эквивалентность.

Для преобразования логических формул с целью их упрощения используются *законы алгебры логики*.

Приведем основные законы, используемые при упрощении логических выражений:

1) коммутативные:

$$A \vee B = B \vee A; \quad A \wedge B = B \wedge A;$$

2) ассоциативные (сочетательные):

$$A \vee (B \vee C) = (A \vee B) \vee C; \quad A \wedge (B \wedge C) = (A \wedge B) \wedge C;$$

3) отрицание:

$$A \vee \bar{A} = 1; \quad A \wedge \bar{A} = 0; \quad A \equiv \bar{\bar{A}};$$

4) двойственность (правило де Моргана):

$$\overline{A \vee B} = \bar{A} \wedge \bar{B}; \quad \overline{A \wedge B} = \bar{A} \vee \bar{B};$$

5) дистрибутивные (распределительные):

$$A \vee (B \wedge C) = (A \vee B) \wedge (A \vee C); \quad A \wedge (B \vee C) = (A \wedge B) \vee (A \wedge C);$$

6) поглощение:

$$A \vee (A \wedge B) = A; \quad A \wedge (A \vee B) = A.$$

Пример 1. Упростить логические выражения. — — — — — — — —

$$a) A \vee B \wedge (A \wedge B) = A \wedge B \wedge A \wedge \overline{B} = \overbrace{(A \wedge A)}^A \wedge \overbrace{(B \wedge \overline{B})}^0 = 0$$

— — — — — — — —

$$b) (A \wedge B) \vee A \vee B \vee \overline{A} = (A \wedge B) \vee (A \wedge B) \vee A = A \wedge (B \vee B) \vee A = (A \wedge 1) \vee A = A \vee A = 1$$

— — — — — — — —

$$c) A \wedge B \vee B \vee C = A \vee B \vee (B \wedge C) = A \vee B \vee \overbrace{(B \wedge C)}^{\overline{B}} = A \vee B$$

Пример 2. Составить таблицу истинности для логической функции $F \equiv A \wedge B \vee \overline{(A \wedge B)}$

Указать, при каких значениях переменных A и B логическая функция $F = 0$?

A	B	$\overline{A}$	$A \wedge B$	$A \wedge \overline{B}$	$\overline{A} \wedge B$	$F = A \wedge B \vee \overline{(A \wedge B)}$
0	0	1	0	0	1	1
0	1	1	1	0	1	1
1	0	0	0	0	1	1
1	1	0	0	1	0	0

Ответ: логическая функция $F = 0$ при $A = 1$ и $B = 1$.

Логические элементы

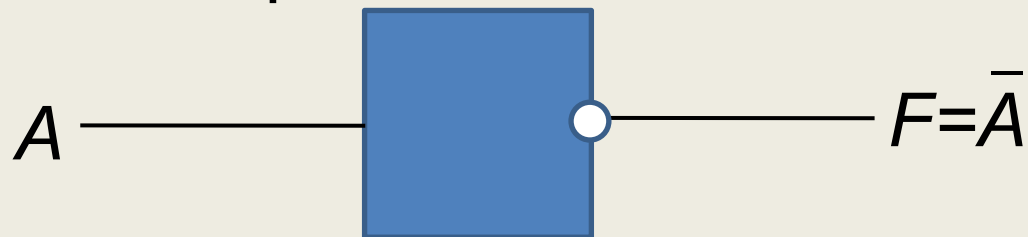
Логический элемент – это *простая электронная схема*, которая реализует элементарную логическую функцию.

На входы логического элемента поступают сигналы – значения аргументов, на выходе появляется сигнал – значение функции. Входные и выходные сигналы логических элементов могут иметь одно из двух логических состояний:

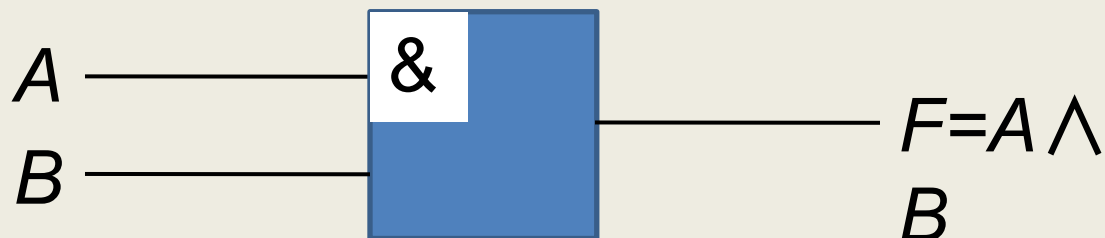
1 (истина) или **0** (ложь).

К *базовым* логическим элементам относятся электронные схемы: **НЕ**, **И**, **ИЛИ**, **И–НЕ**, **ИЛИ–НЕ**, а также *триггер*.

Инвертор (схема **НЕ**) – реализует функцию логического отрицания.



Конъюнктор (схема **И**) – реализует функцию логического умножения.



Дизъюнктор (схема **ИЛИ**) – реализует функцию логического сложения.

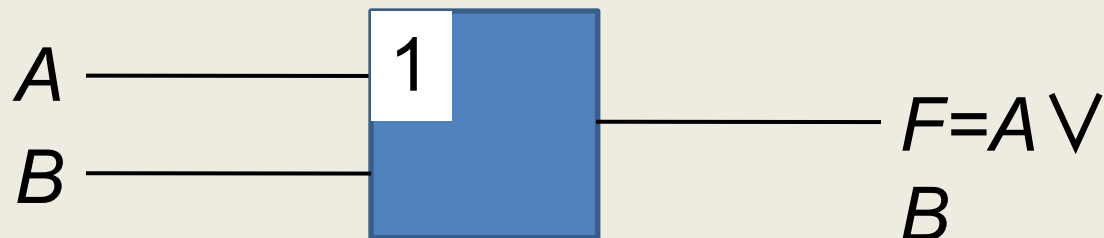


Схема И-НЕ – реализует функцию логического отрицания результата схемы **И**.

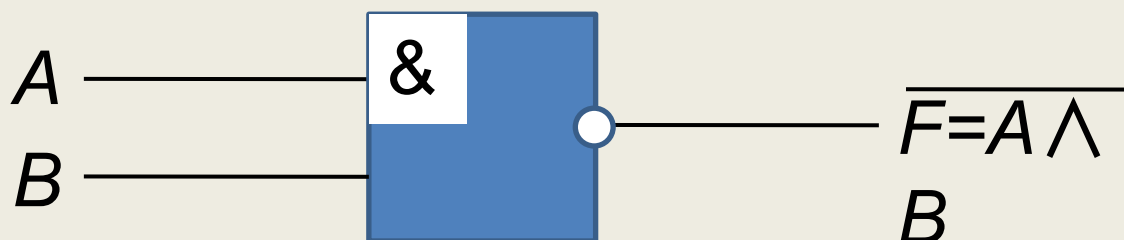
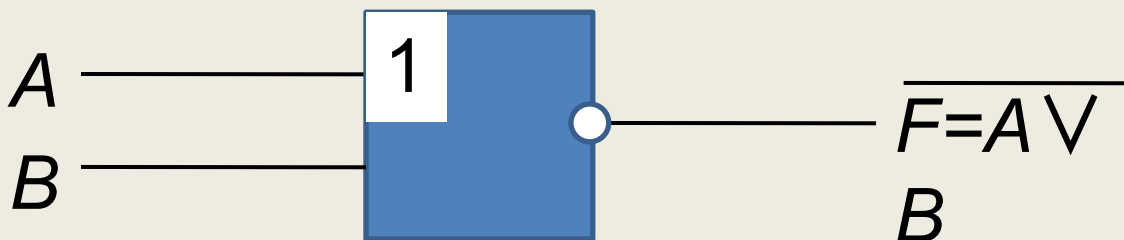
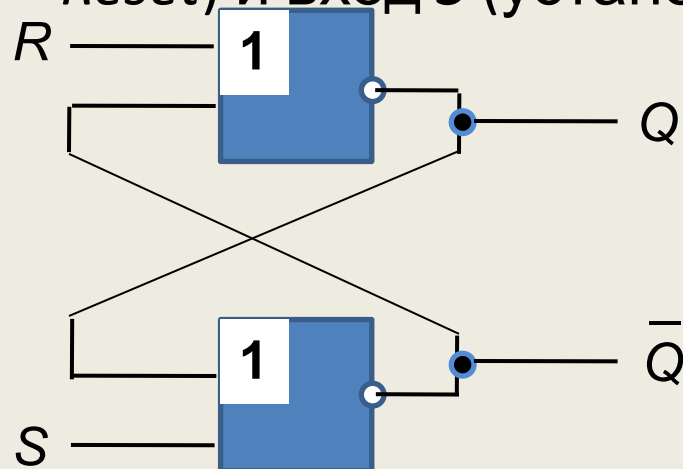


Схема ИЛИ-НЕ – реализует функцию логического отрицания результата схемы **ИЛИ**.



RS-триггер – электронное устройство с двумя устойчивыми состояниями, предназначенное для хранения **1 бита** данных. Он содержит *защелку* из двух элементов **ИЛИ-НЕ** и два отдельных статических входа управления:

вход **R** (сброс – *Reset*) и вход **S** (установка – *Set*).



$R=0$; $S=1$; $Q=1$ – режим записи;

$R=0$; $S=0$ – режим хранения;

$R=1$; $S=0$; $Q=1$ – режим очистки триггера;

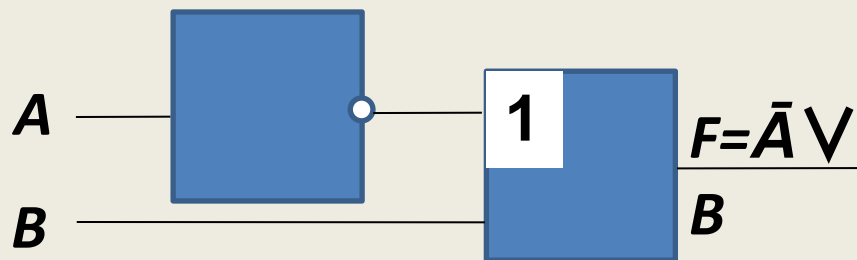
$R=1$; $S=1$ – запрещенный режим.

Пример 1. Построить схему логической функции импликации $F = A \rightarrow B$.

Решение

Логической функции импликации равносильна функция $F = \bar{A} \vee B$. В этом можно убедиться, если для функции F построить таблицу истинности.

A	B	$\bar{A}$	$\bar{A} \vee B$
0	0	1	1
0	1	1	1
1	0	0	0
1	1	0	1



Таким образом, схему логической функции F (импликации) описывают инвертор и дизъюнктор.

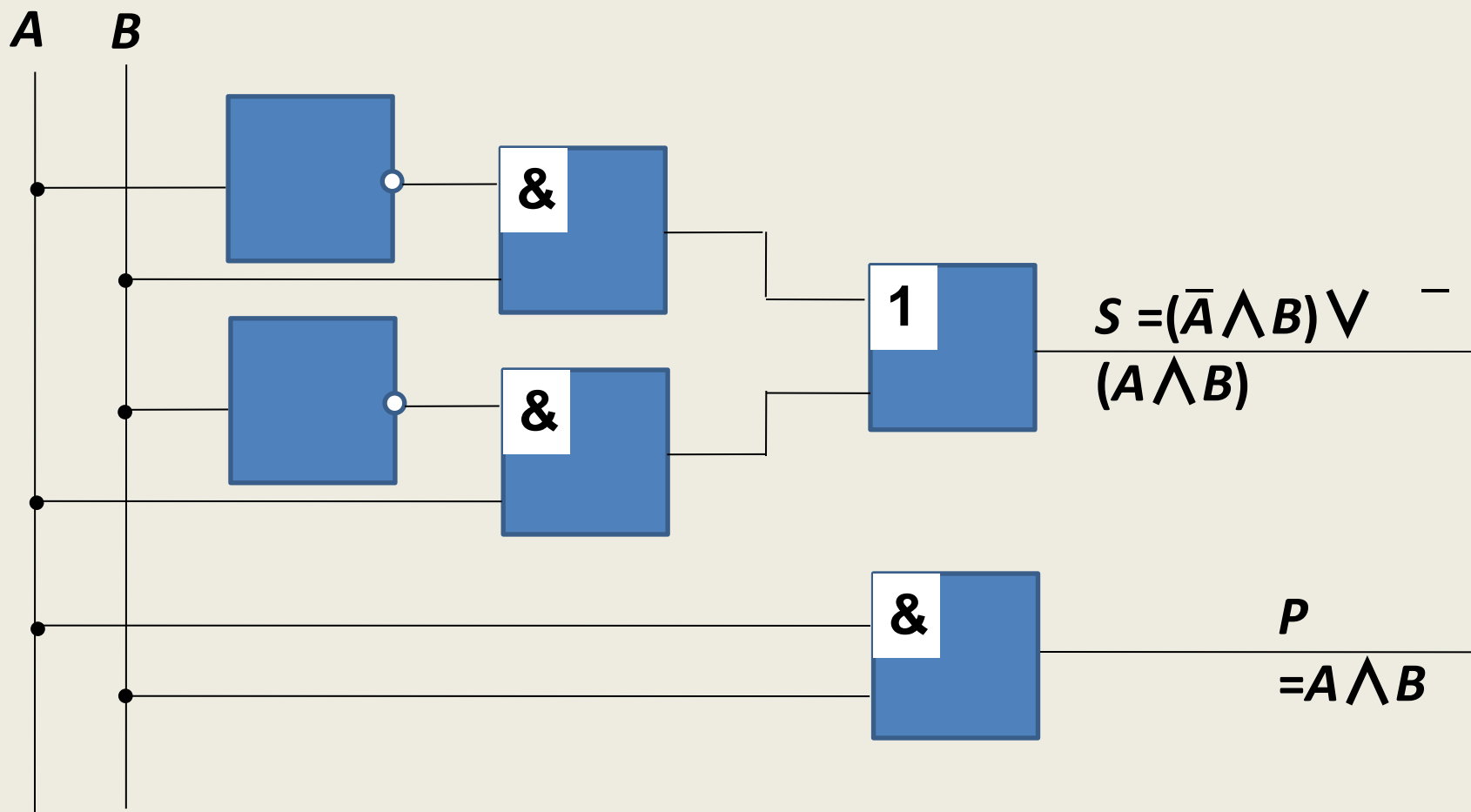
Пример 2. Таблица истинности для двоичного сумматора имеет следующий вид:

Входы		Выходы	
<i>A</i>	<i>B</i>	$S = (A \wedge B) \vee \overline{(A \wedge B)}$	$P = A \wedge B$
0	0	0	0
0	1	1	0
1	0	1	0
1	1	0	1

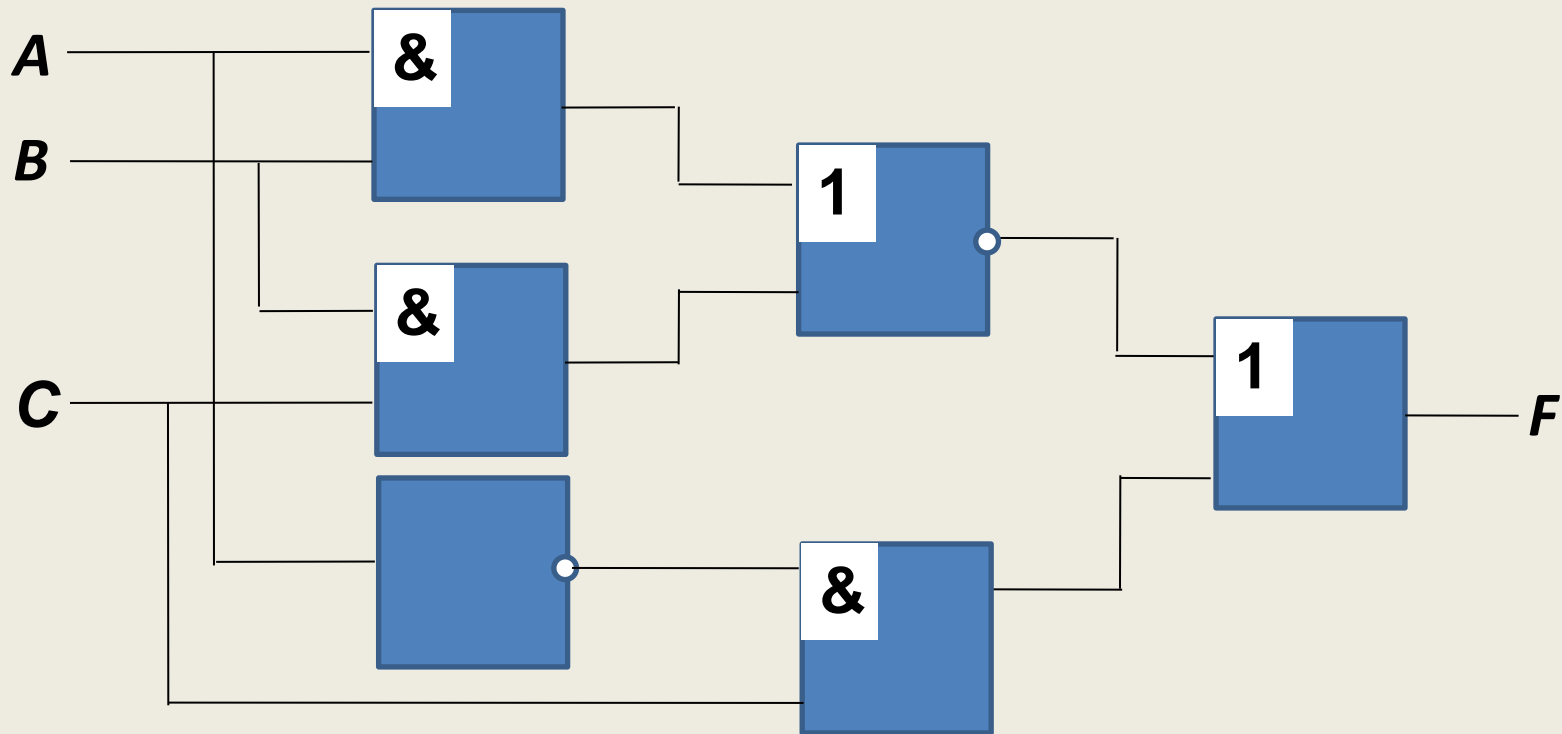
Для реализации схемы функции ***S*** требуется два инвертора, два конъюнктора и один дизъюнктор.

Для реализации схемы функции ***P*** потребуется один конъюнктор.

Логическая схема сумматора



Пример 3 (самостоятельно). Логическая функция F , задана схемой. Записать для этой функции логическое выражение.



Ответ:

$$F = \overline{(A \wedge B)} \vee (B \wedge C) \vee (A \wedge C)$$