СИМПЛЕКС-МЕТОД РЕШЕНИЯ ЗАДАЧ ЛИНЕЙНОГО ПРОГРАММИРОВАНИЯ

- **Элементы линейной алгебры и геометрии выпуклых множеств**
- **Теоретические основы методов линейного программирования**

Элементы линейной алгебры

Пусть дана система m линейных уравнений с n переменными

$$\begin{cases} a_{11}x_1 + a_{12}x_2 + \ldots + a_{1n}x_n = b_1, \\ a_{21}x_1 + a_{22}x_2 + \ldots + a_{2n}x_n = b_2, \\ \ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots \qquad (*) \\ a_{m1}x_1 + a_{m2}x_2 + \ldots + a_{mn}x_n = b_m, \end{cases}$$

r- ранг матрицы, то есть максимальное число независимых уравнений системы. Пусть $r < n$.

Элементы линейной алгебры

Пусть дана система m линейных уравнений с n переменными

$$\begin{cases} a_{11}x_1 + a_{11}x_2 + \ldots + a_{1n}x_n = b_1, \\ a_{21}x_1 + a_{22}x_2 + \ldots + a_{2n}x_n = b_2, \\ \qquad\qquad\qquad\qquad\qquad\qquad (*) \\ a_{m1}x_1 + a_{m2}x_2 + \ldots + a_{mn}x_n = b_m, \end{cases}$$

r- ранг матрицы, то есть максимальное число независимых уравнений системы. Пусть $r < n$.

Пусть в (*) все уравнения системы линейно независимы, то есть $r = m$. Соответственно $m < n$

Элементы линейной алгебры

Определение. Любые переменных называются **базисными** (или **основными**), если определитель матрицы (базисный минор), составленный из коэффициентов при них, отличен от нуля. Остальные переменных называются **свободными** (или **неосновными**).

$$C_n^m = \frac{n!}{m!(n-m)!}$$

Элементы линейной алгебры

Определение. Решение системы называется **допустимым**, если оно содержит только неотрицательные компоненты, в противном случае решение называется **недопустимым.**

Элементы линейной алгебры

Определение. Решение системы называется **допустимым**, если оно содержит только неотрицательные компоненты, в противном случае решение называется **недопустимым.**

Определение. Решение системы, в котором все свободных переменных равны нулю, называется **базисным.**

Элементы линейной алгебры

Определение. Решение системы называется **допустимым**, если оно содержит только неотрицательные компоненты, в противном случае решение называется **недопустимым.**

Определение. Решение системы, в котором все свободных переменных равны нулю, называется **базисным.**

В задачах линейного программирования особый интерес представляют **допустимые базисные решения** или **опорные планы**.

Элементы линейной алгебры

Определение. Решение системы называется **допустимым**, если оно содержит только неотрицательные компоненты, в противном случае решение называется **недопустимым.**

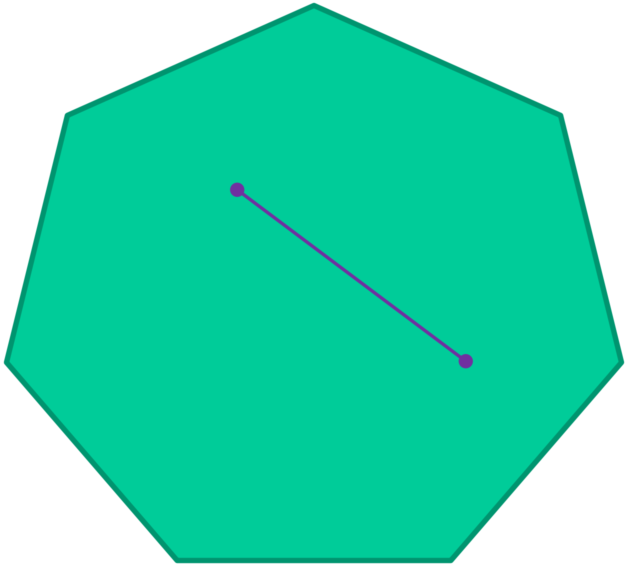
Определение. Решение системы, в котором все свободных переменных равны нулю, называется **базисным.**

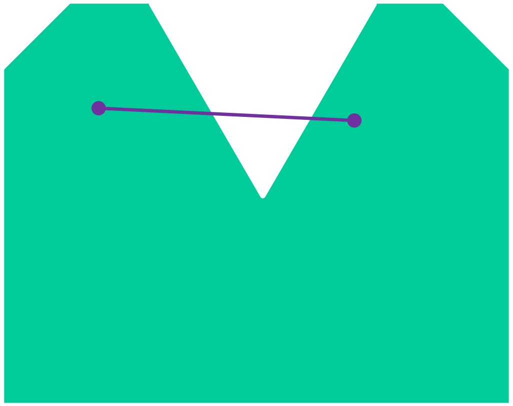
В задачах линейного программирования особый интерес представляют **допустимые базисные решения** или **опорные планы**.

Определение. Базисное решение, в котором хотя бы одна базисных переменных равна нулю, называется **вырожденным.**

Элементы геометрии выпуклых множеств

<u>Определение.</u> Множество точек называется **выпуклым**, если оно вместе с любыми двумя своими точками содержит весь отрезок соединяющий эти точки.





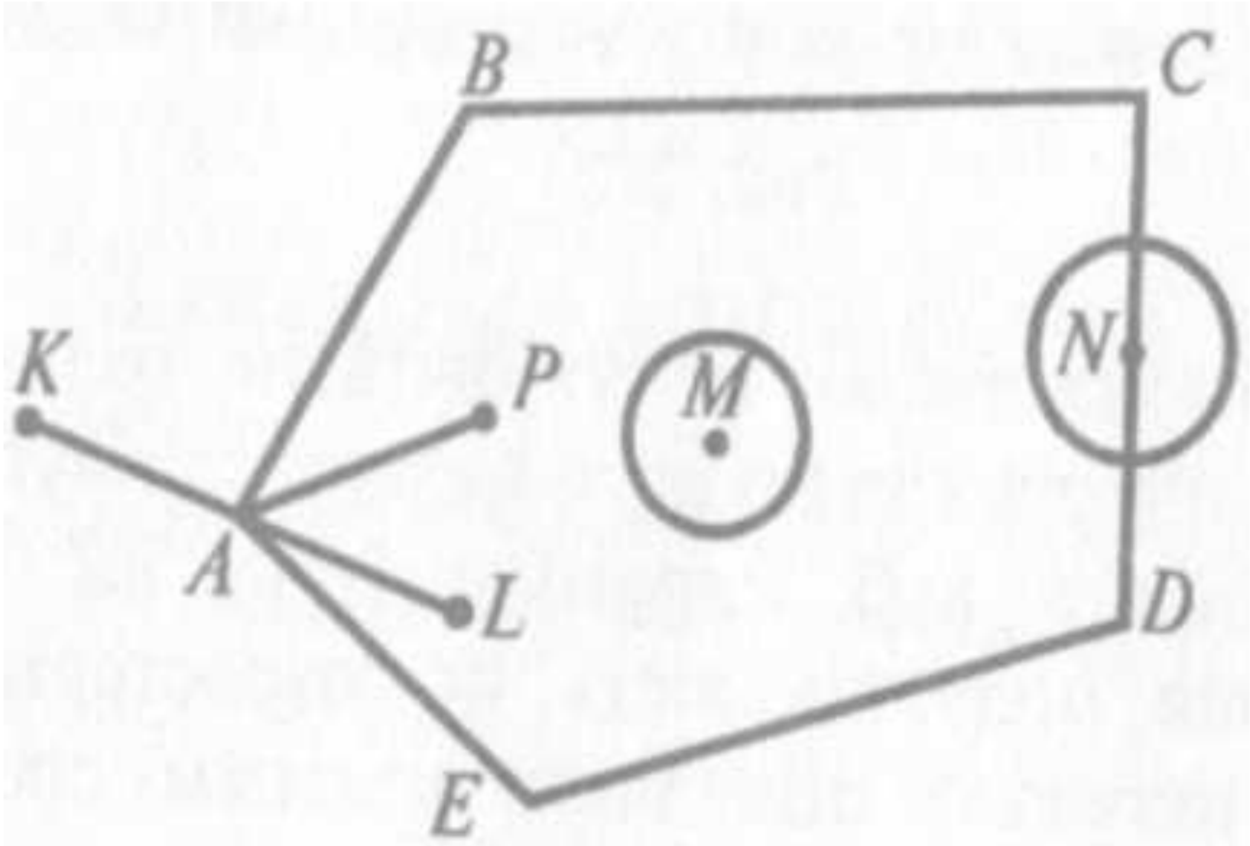
Элементы геометрии выпуклых множеств

Определение. Точка множества называется **внутренней**, если в некоторой ее окрестности содержатся точки только данного множества.

Определение. Точка множества называется **граничной**, если в любой ее окрестности содержатся как точки, принадлежащие данному множеству, так и точки, не принадлежащие ему.

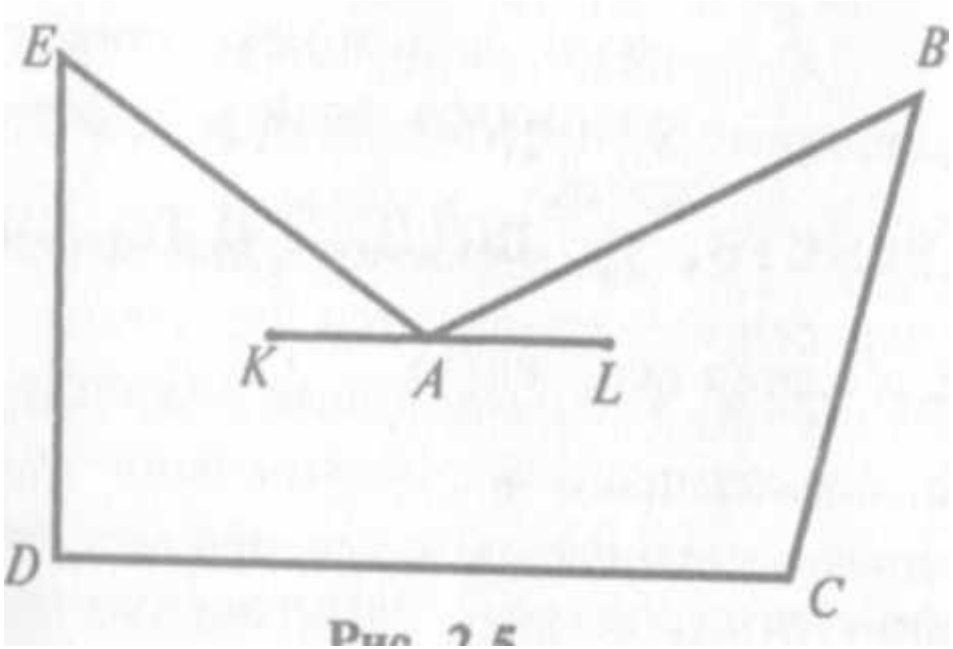
Определение. Точка множества называется **угловой** или **крайней**, если она не является внутренней ни для какого отрезка целиком принадлежащего данному множеству.

Элементы геометрии выпуклых множеств



Элементы геометрии выпуклых множеств

Очевидно, что для выпуклого множества угловые точки всегда совпадают с вершинами многоугольника, для невыпуклого множества это необязательно.



Элементы геометрии выпуклых множеств

Определение. Множество точек называется **замкнутым**, если включает все свои граничные точки.

Определение. Множество точек называется **ограниченным,** если существует круг радиусом конечной длины с центром в любой точке множества, который полностью содержит в себе данное множество, в противном случае множество называется **неограниченным**.

Элементы геометрии выпуклых множеств

Выпуклое замкнутое множество точек пространства (плоскости) имеющее конечное число угловых точек называется ***выпуклым многогранником*** (многоугольником), если оно ограниченное, и ***выпуклой (многогранной) многоугольной областью***, если оно неограниченно.

Теоретические основы методов ЛП

Множество всех допустимых решений задачи линейного программирования является выпуклым, а точнее, **представляет выпуклый многогранник или выпуклую многогранную область,** которые называют одним термином – **многогранником решений**.

Теоретические основы методов ЛП

Теорема. **Если задача линейного программирования имеет оптимальное решение, то линейная функция принимает максимальное (минимальное) значение в одной из угловых точек многогранника решений. Если линейная функция принимает максимальное (минимальное) значение более чем в одной угловой точке, то она принимает его в любой точке, являющейся выпуклой линейной комбинацией этих точек.**

Теоретические основы методов ЛП

Теорема. **Каждому допустимому базисному решению задачи линейного программирования соответствует угловая точка многогранника решений, и наоборот, каждой угловой точке многогранника решений соответствует допустимое базисное решение.**

Теоретические основы методов ЛП

Следствие. **Если задача линейного программирования имеет оптимальное решение, то оно совпадает, по крайней мере, с одним из ее допустимых базисных решений.**

Симплексный метод решения задач ЛП

Джордж Данциг, 1947

Симплексный метод основывается

- область допустимых решений задачи линейного программирования является выпуклым множеством с конечным числом угловых точек, то есть многогранником или многоугольным множеством;

Симплексный метод основывается

- область допустимых решений задачи линейного программирования является выпуклым множеством с конечным числом угловых точек, то есть многогранником или многоугольным множеством;
- оптимальным решением задачи линейного программирования является одна из угловых точек области допустимых решений;

Симплексный метод основывается

- область допустимых решений задачи линейного программирования является выпуклым множеством с конечным числом угловых точек, то есть многогранником или многоугольным множеством;
- оптимальным решением задачи линейного программирования является одна из угловых точек области допустимых решений;
- угловые точки области допустимых решений алгебраически представляют некоторые базисные (опорные) решения системы ограничений задачи.

Симплексный метод состоит

в целенаправленном переборе опорных решений задачи линейного программирования.

Так как общее число опорных решений конечно, то через определенное число шагов будет либо найдено оптимальное решение, либо установлено его отсутствие.

Чтобы получить новый опорный план, первоначальный базис преобразовывают в новый. Для этого из первоначального базиса удаляют некоторую базисную переменную и вместо нее вводят другую из группы свободных.

Геометрический смысл симплексного метода

состоит в последовательном переходе от одной вершины многоугольника ограничений, которая называется первоначальной, к соседней в которой линейная функция принимает лучшее или не худшее значение по отношению к цели задачи.

Движение длиться до тех пор, пока не будет найдено оптимальное решение, то есть вершина, где достигается оптимальное значение целевой функции.

Основное содержание симплексного метода

- найти начальное опорное решение;

Основное содержание симплексного метода

- найти начальное опорное решение;
- осуществить переход от одного опорного решения к другому, на котором значение целевой функции ближе к оптимальному;

Основное содержание симплексного метода

- найти начальное опорное решение;
- осуществить переход от одного опорного решения к другому, на котором значение целевой функции ближе к оптимальному;
- определить критерии завершения процесса решения задачи, позволяющие своевременно прекратить перебор решений на оптимальном решении или сделать заключение об отсутствии решения.

Симплексный метод решения задач ЛП

Рассмотрим задачу ЛП в канонической форме:

$$L = c_1x_1 + c_2x_2 + \ldots + c_nx_n \to \min$$

$$\begin{cases} a_{11}x_1 + a_{12}x_2 + \ldots + a_{1n}x_n = b_1, \\ a_{21}x_1 + a_{22}x_2 + \ldots + a_{2n}x_n = b_2, \\ \ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots \\ a_{m1}x_1 + a_{m2}x_2 + \ldots + a_{mn}x_n = b_m, \\ x_1 \geq 0, \ldots, x_m \geq 0. \end{cases}$$

Пусть $b_i \geq 0, \quad i = \overline{1, m}$(иначе, умножим соответствующее уравнение на -1); уравнения системы ограничений линейно независимы; $m < n$; система ограничений совместна

Специальная форма задачи ЛП

$$L = \gamma_0 - (\gamma_{m+1} x_1 + \ldots + \gamma_n x_n) \to \min$$

$$\begin{cases} x_1 = b_1 - (a_{1m+1} x_{m+1} + \ldots + a_{1n} x_n), \\ \ldots\ldots\ldots\ \ldots\ldots\ldots\ \ldots\ldots\ldots\ \ldots\ldots\ldots\ . \\ x_m = b_m - (a_{mm+1} x_{m+1} + \ldots + a_{mn} x_n), \\ x_1 \geq 0, \ldots, x_n \geq 0, \\ b_i \geq 0, i = \overline{1, m}. \end{cases}$$

Алгоритм симплекс-метода для задачи на минимум

Шаг 0. Подготовительный этап.

Шаг 1. Составляем симплекс-таблицу, соответствующую специальной форме

Шаг 2. Проверка на оптимальность

Шаг 3. Проверка на неразрешимость

Шаг 4. Выбор ведущего столбца q

Шаг 5. Выбор ведущей строки p

Шаг 6. Преобразование симплексной таблицы

Шаг 7. Переход к следующей итерации осуществляется возвратом к шагу 2

Шаг 0. Подготовительный этап

Приводим задачу ЛП к специальной форме

Шаг 1. Составляем симплекс-таблицу, соответствующую специальной форме

$$L = \gamma_0 - (\gamma_{m+1}x_1 + \ldots + \gamma_n x_n) \to \min$$

$$\begin{cases} x_1 = b_1 - (a_{1m+1}x_{m+1} + \ldots + a_{1n}x_n), \\ \ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots \\ x_m = b_m - (a_{mm+1}x_{m+1} + \ldots + a_{mn}x_n), \\ x_1 \geq 0, \ldots, x_n \geq 0, \\ b_i \geq 0, i = \overline{1, m}. \end{cases}$$

	B	x_{m+1}	$\ldots$	x_q	$\ldots$	x_n
L	γ_0	γ_{m+1}	$\ldots$	γ_q	$\ldots$	γ_n
x_1	b_1	a_{1m+1}	$\ldots$	a_{1q}	$\ldots$	a_{1n}
..	..			....		
x_p	..	a_{pm+1}	$\ldots$	a_{pq}	$\ldots$	a_{pn}
..	..			....		
x_m	b_m	a_{mm+1}	$\ldots$	a_{mq}	$\ldots$	a_{mn}

Рассмотрим реализацию метода на следующем примере:

$$L = -20x_1 - 30x_2 \to \min,$$

$$x_1 + x_2 \le 5,$$

$$x_1 + 3x_2 \le 9,$$

$$x_1 \le 4,$$

$$x_1 + 2x_2 \le 8,$$

$$x_1 \ge 0, x_2 \ge 0.$$

$$L = -20x_1 - 30x_2 \to \min,$$
$$x_1 + x_2 \le 5,$$
$$x_1 + 3x_2 \le 9,$$
$$x_1 \le 4,$$
$$x_1 + 2x_2 \le 8,$$
$$x_1 \ge 0, x_2 \ge 0.$$

$$L = -20x_1 - 30x_2 \to \min,$$
$$x_1 + x_2 + y_1 = 5,$$
$$x_1 + 3x_2 + y_2 = 9,$$
$$x_1 + y_3 = 4,$$
$$x_1 + 2x_2 + y_4 = 8,$$
$$x_1 \ge 0, x_2 \ge 0, y_1 \ge 0, y_2 \ge 0, y_3 \ge 0, y_4 \ge 0.$$

$$
\begin{aligned}
&L = -20x_1 - 30x_2 \to \min, \\
&x_1 + x_2 \le 5, \\
&x_1 + 3x_2 \le 9, \\
&x_1 \le 4, \\
&x_1 + 2x_2 \le 8, \\
&x_1 \ge 0, x_2 \ge 0.
\end{aligned}
$$

$$
\begin{aligned}
&L = -20x_1 - 30x_2 \to \min, \\
&x_1 + x_2 + y_1 = 5, \\
&x_1 + 3x_2 + y_2 = 9, \\
&x_1 + y_3 = 4, \\
&x_1 + 2x_2 + y_4 = 8, \\
&x_1 \ge 0, x_2 \ge 0, y_1 \ge 0, y_2 \ge 0, y_3 \ge 0, y_4 \ge 0.
\end{aligned}
$$

$$L = -20x_1 - 30x_2 \to \min,$$
$$x_1 + x_2 \le 5,$$
$$x_1 + 3x_2 \le 9,$$
$$x_1 \le 4,$$
$$x_1 + 2x_2 \le 8,$$
$$x_1 \ge 0, x_2 \ge 0.$$

$$L = -20x_1 - 30x_2 \to \min,$$
$$x_1 + x_2 + y_1 = 5,$$
$$x_1 + 3x_2 + y_2 = 9,$$
$$x_1 + y_3 = 4,$$
$$x_1 + 2x_2 + y_4 = 8,$$
$$x_1 \ge 0, x_2 \ge 0, y_1 \ge 0, y_2 \ge 0, y_3 \ge 0, y_4 \ge 0.$$

Шаг 0

$$L = -20x_1 - 30x_2 \to \min,$$
$$x_1 + x_2 + y_1 = 5,$$
$$x_1 + 3x_2 + y_2 = 9,$$
$$x_1 + y_3 = 4,$$
$$x_1 + 2x_2 + y_4 = 8,$$
$$x_1 \ge 0, x_2 \ge 0, y_1 \ge 0, y_2 \ge 0, y_3 \ge 0, y_4 \ge 0.$$

$$L = 0 - (20x_1 + 30x_2) \to \min,$$
$$y_1 = 5 - (x_1 + x_2),$$
$$y_2 = 9 - (x_1 + 3x_2),$$
$$y_3 = 4 - x_1,$$
$$y_4 = 8 - (x_1 + 2x_2),$$
$$x_1 \ge 0, x_2 \ge 0, y_1 \ge 0, y_2 \ge 0, y_3 \ge 0, y_4 \ge 0$$

Шаг 1. Составляем симплекс-таблицу, соответствующую специальной форме

$$L = 0 - (20x_1 + 30x_2) \to \min,$$

$$y_1 = 5 - (x_1 + x_2),$$

$$y_2 = 9 - (x_1 + 3x_2),$$

$$y_3 = 4 - x_1,$$

$$y_4 = 8 - (x_1 + 2x_2),$$

$$x_1 \geq 0, x_2 \geq 0,\ y_1 \geq 0, y_2 \geq 0, y_3 \geq 0, y_4 \geq 0$$

	b	x_1	x_2
L	0	20	30
y_1	5	1	1
y_2	9	1	3
y_3	4	1	0
y_4	8	1	2

Шаг 2. Проверка на оптимальность

	b	x_1	x_2
L	0	20	30
y_1	5	1	1
y_2	9	1	3
y_3	4	1	0
y_4	8	1	2

Так как коэффициенты строки целевой функции неотрицательны, то начальное базисное решение $(0, 0, 5, 9, 4, 8)$ не является оптимальным. Значение целевой функции для этого базиса $L=0$.

Шаг 2. Проверка на неразрешимость

	b	x_1	x_2
L	0	20	30
y_1	5	1	1
y_2	9	1	3
y_3	4	1	0
y_4	8	1	2

Шаг 4. Выбор ведущего столбца q

	b	x_1	x_2
L	0	20	30
y_1	5	1	1
y_2	9	1	3
y_3	4	1	0
y_4	8	1	2

Ведущий столбец

Шаг 5. Выбор ведущей строки p

	b	x_1	x_2
L	0	20	30
y_1	5	1	1
y_2	9	1	3
y_3	4	1	0
y_4	8	1	2

Ведущая строка

$$\frac{b_p}{a_{pq}} = \min_{a_{iq}>0} \frac{b_i}{a_{iq}}$$

$$\min\left\{\frac{5}{1}, \frac{9}{3}, \frac{4}{0}, \frac{8}{2},\right\} = 3$$

Шаг 5. Выбор ведущей строки p

	b	x_1	x_2
L	0	20	30
y_1	5	1	1
y_2	9	1	$\boxed{3}$
y_3	4	1	0
y_4	8	1	2

Ведущий (разрешающий) элемент

Шаг 6. Преобразование симплексной таблицы а)

	b	x_1	y_2
L			
y_1			
x_2			
y_3			
y_4			

Шаг 6. Преобразование симплексной таблицы б)

	b	x_1	y_2
L			
y_1			
x_2			
y_3			
y_4			

Ведущий элемент заменяем обратной величиной

Шаг 6. Преобразование симплексной таблицы б)

	b	x_1	y_2
L			
y_1			
x_2			1/3
y_3			
y_4			

Ведущий элемент заменяем обратной величиной

Шаг 6. Преобразование симплексной таблицы в)

	b	x_1	y_2
L			
y_1			
x_2			1/3
y_3			
y_4			

Все элементы ведущего столбца делятся на разрешающий элемент и меняют знак на противоположный

Шаг 6. Преобразование симплексной таблицы в)

	b	x_1	y_2
L			-10
y_1			-1/3
x_2			$\boxed{1/3}$
y_3			0
y_4			-2/3

Все элементы ведущего столбца делятся на разрешающий элемент и меняют знак на противоположный

Шаг 6. Преобразование симплексной таблицы г)

	b	x_1	y_2
L			-10
y_1			-1/3
x_2			$\boxed{1/3}$
y_3			0
y_4			-2/3

Все элементы ведущей строки делятся на разрешающий элемент

Шаг 6. Преобразование симплексной таблицы г)

	b	x_1	y_2
L			-10
y_1			-1/3
x_2	3	1/3	$\boxed{1/3}$
y_3			0
y_4			-2/3

Все элементы ведущей строки делятся на разрешающий элемент

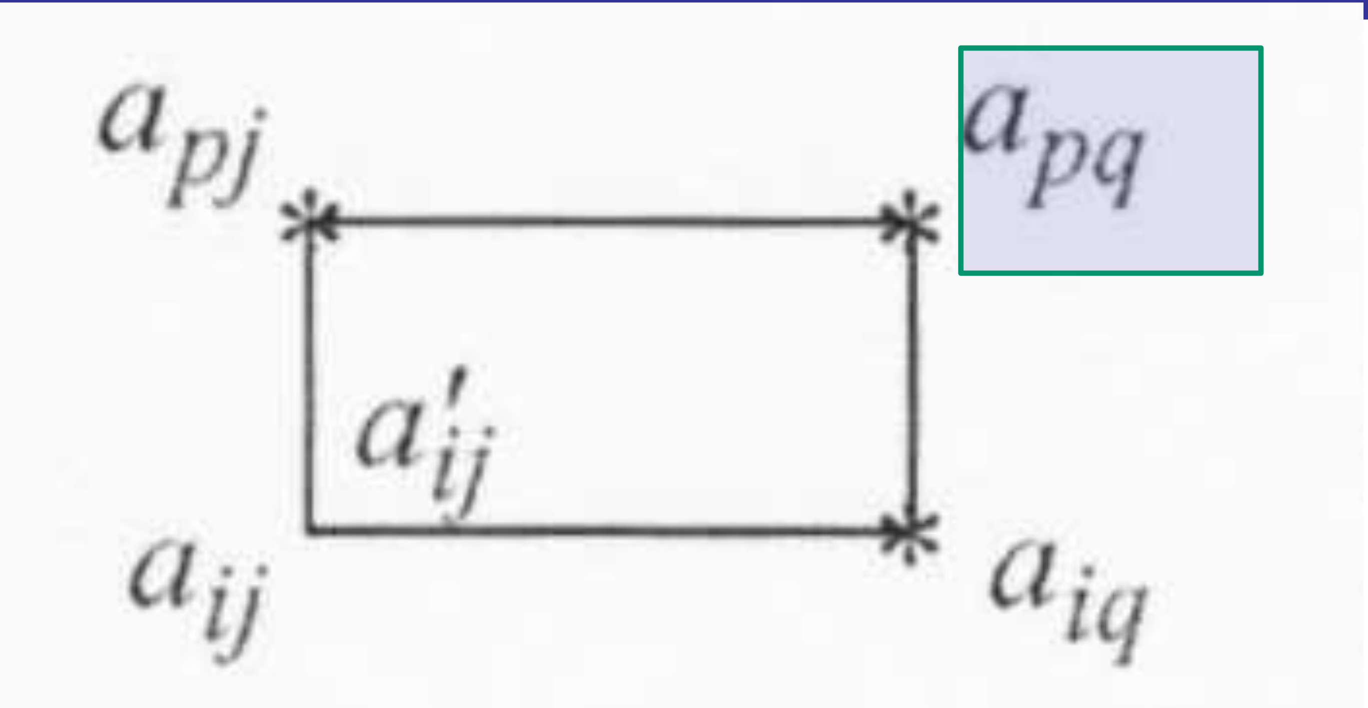
Шаг 6. Преобразование симплексной таблицы д)

	b	x_1	y_2
L			-10
y_1			-1/3
x_2	3	1/3	$\boxed{1/3}$
y_3			0
y_4			-2/3

Оставшиеся элементы симплексной таблицы преобразуются по схеме «прямоугольника»

Шаг 6. Преобразование симплексной таблицы

д) Схема прямоугольника



$$a_{ij}' = \frac{a_{ij}a_{pq} - a_{iq}a_{pj}}{a_{pq}}$$

Шаг 6. Преобразование симплексной таблицы д)

	b	x_1	y_2
L			-10
y_1			-1/3
x_2	3	1/3	1/3
y_3			0
y_4			-2/3

Опорное решение, соответствующее таблице

Значение целевой функции на этом базисе

Шаг 7

	b	x_1	y_2
L	-90	10	-10
y_1	2	2/3	-1/3
x_2	3	1/3	1/3
y_3	4	1	0
y_4	2	1/3	-2/3

Переход к следующей итерации осуществляется возвратом к шагу 2.