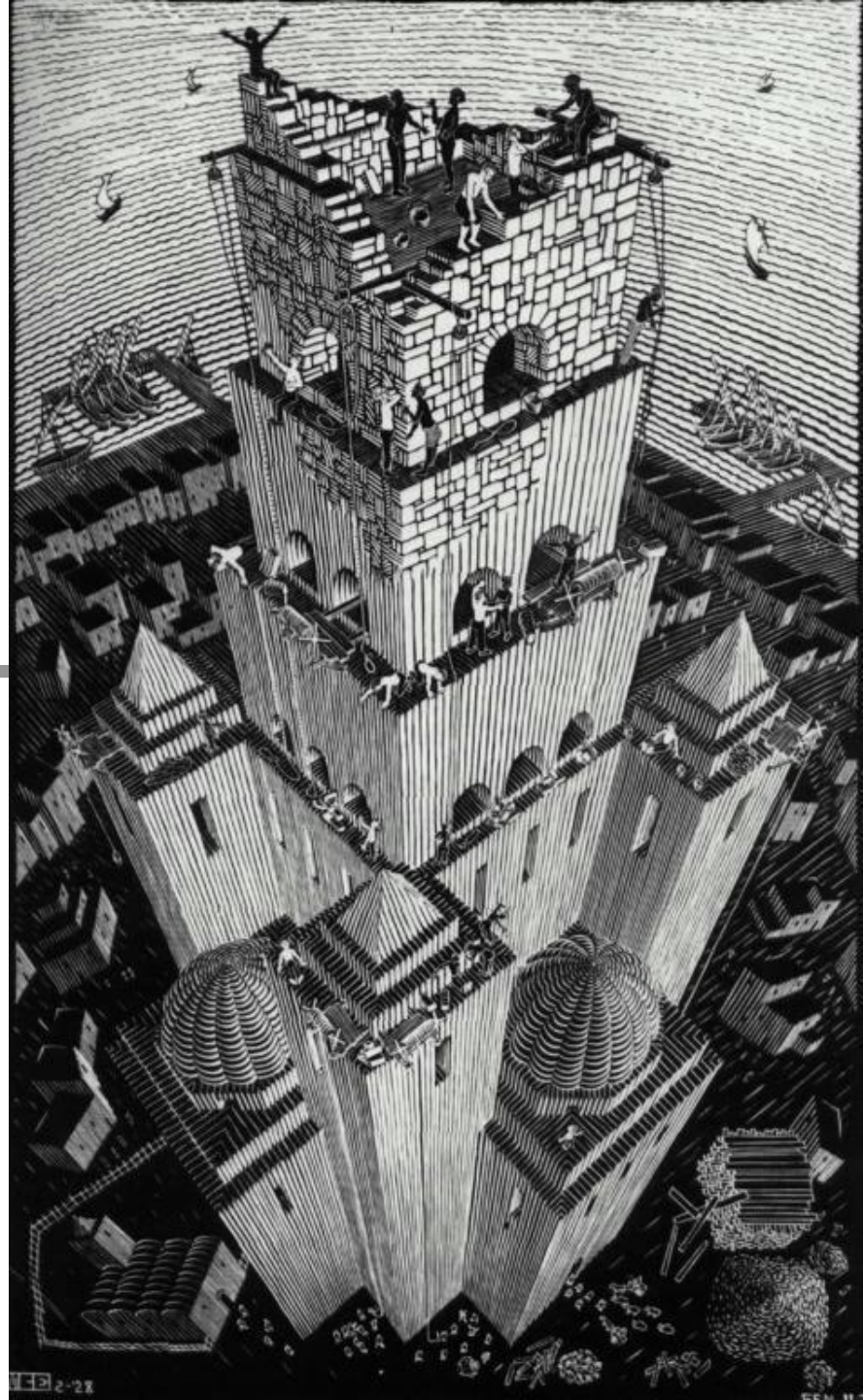


# Компьютерная графика

## лекция 3

### Алгоритмические основы трехмерной графики





## Преобразования координат

---

$$\left\{ \begin{array}{l} m_1 = f_1(k_1, k_2, \dots, k_n), \\ m_2 = f_2(k_1, k_2, \dots, k_n), \\ \dots \\ m_N = f_N(k_1, k_2, \dots, k_n) \end{array} \right.$$

Если при всех  $i = 1, 2, \dots, N$  функции  $f_i$  – линейные относительно аргументов  $(k_1, k_2, \dots, k_n)$ , то такие преобразования называют *линейными*, а при  $n = N$  – *аффинными*

$$f_i = a_{i1}k_1 + a_{i2}k_2 + \dots + a_{in}k_n + a_{i,n+1}$$

Преобразования координат в явном и неявном виде широко используются в компьютерной графике с целью описания графического объекта в наиболее удобных координатных системах, для изменения масштаба элементов чертежа, построения проекций пространственных образов, направленной деформации объектов.

## Метод однородных координат

$$V=(x, y, z, w)$$

$$\begin{cases} X = a_{11}x + a_{12}y + a_{13}z + d \\ Y = a_{21}x + a_{22}y + a_{23}z + e \\ Z = a_{31}x + a_{32}y + a_{33}z + f \end{cases} \quad [ X \ Y \ Z \ 1 ] = [ (x/w) \ (y/w) \ (z/w) \ 1 ]$$

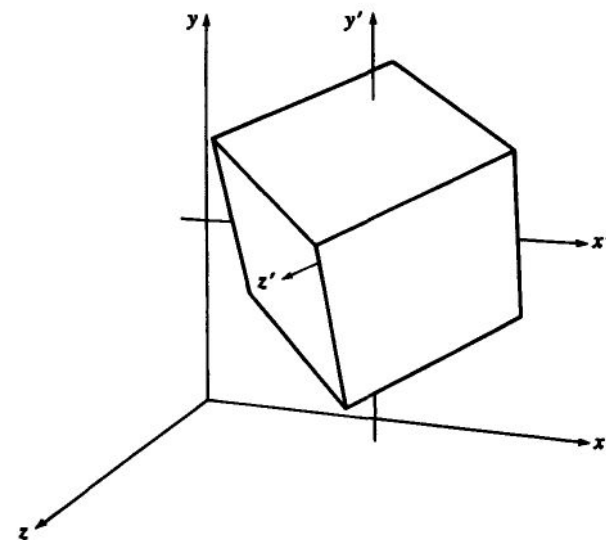
$$\begin{bmatrix} X \\ Y \\ Z \\ 1 \end{bmatrix} = \mathbf{M} \cdot \begin{bmatrix} x \\ y \\ z \\ 1 \end{bmatrix}$$

Классическая матрица поворотов $\Rightarrow$	$\begin{bmatrix} a_{11} & a_{12} & a_{13} & d \\ a_{21} & a_{22} & a_{23} & e \\ a_{31} & a_{32} & a_{33} & f \\ m & n & k & S \end{bmatrix}$	$\Leftarrow$ Вектор сдвига (переноса)
Вектор проекций $\Rightarrow$		$\Leftarrow$ Общий масштаб

Использование механизма однородных координат позволяет применять единый математический аппарат для пространственных преобразований (поворотов, масштабирования, переноса) точек, прямых, квадратичных и бикубических поверхностей и линий

# Преобразования в однородных координат

Композиции преобразований



Поворот на угол  $\phi$  вокруг оси  $x$ :

$$M_x := \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & \cos(\phi) & \sin(\phi) & 0 \\ 0 & -\sin(\phi) & \cos(\phi) & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \end{bmatrix}$$

Поворот на угол  $\psi$  вокруг оси  $y$ :

$$M_y = \begin{bmatrix} \cos\psi & 0 & \sin\psi & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 0 \\ -\sin\psi & 0 & \cos\psi & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \end{bmatrix}$$

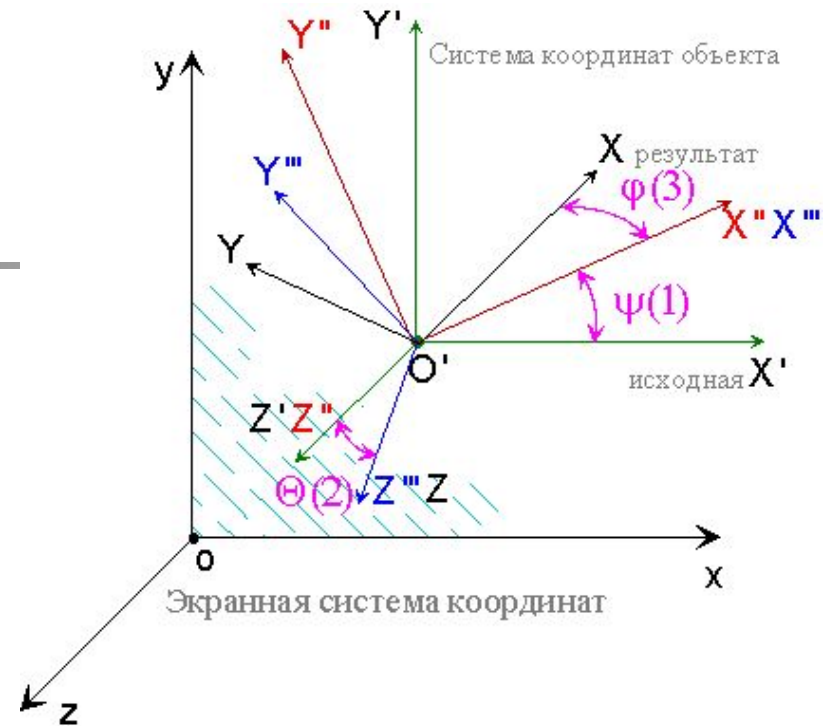
Поворот на угол  $\theta$  вокруг оси  $z$ :

$$M_z := \begin{bmatrix} \cos(\Theta) & \sin(\Theta) & 0 & 0 \\ -\sin(\Theta) & \cos(\Theta) & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \end{bmatrix}$$

$$\vec{V}^* = \hat{M}_x \cdot \hat{M}_y \cdot \hat{M}_z \cdot \vec{V}$$

## Преобразования Эйлера

Любое заданное направление осей объектной системы координат можно получить, выполняя *три* поворота вокруг *двух* координатных осей, при этом для первого ( $\psi$ ) и третьего ( $\varphi$ ) поворота берется одна ось, которая в процессе преобразования сама поворачивается ( $\theta$ ).



$$\begin{aligned} X &= (\cos \psi \cdot \cos \varphi - \sin \psi \cdot \cos \theta \cdot \sin \varphi)x + (-\cos \psi \cdot \sin \varphi - \sin \psi \cdot \cos \theta \cdot \cos \varphi)y + (\sin \psi \cdot \sin \theta)z \\ Y &= (\sin \psi \cdot \cos \varphi + \cos \psi \cdot \cos \theta \cdot \sin \varphi)x + (-\sin \psi \cdot \sin \varphi + \cos \psi \cdot \cos \theta \cdot \cos \varphi)y + (-\cos \psi \cdot \sin \theta)z \\ Z &= (\sin \theta \cdot \sin \varphi)x + (\sin \theta \cdot \cos \varphi)y + (\cos \theta)z \end{aligned}$$



## Преобразования в однородных координатах

Сдвиг на вектор (смещение):

$$M_s = \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 & a \\ 0 & 1 & 0 & b \\ 0 & 0 & 1 & c \\ 0 & 0 & 0 & 1 \end{bmatrix}$$

Здесь осуществляется перенос начала системы координат объекта на вектор с трехмерными координатами (a, b, c)

Растяжение (сжатие):

$$M_d := \begin{bmatrix} \alpha & 0 & 0 & 0 \\ 0 & \beta & 0 & 0 \\ 0 & 0 & \gamma & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \end{bmatrix}$$

Здесь ненулевые коэффициенты растяжения  $\alpha$ ,  $\beta$ ,  $\gamma$  соответственно для осей x, y, z объектной системы координат

Отражение:

$$M_{rxy} := \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & -1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \end{bmatrix}$$

В данном случае осуществляется операция отражения относительно плоскости {x y}

## Пример преобразования: задача

Построить матрицу вращения на угол  $\varphi$  вокруг прямой  $L$ , проходящей через точку  $A(a, b, c)$  и имеющую направляющий вектор  $(l, m, n)$ . Можно считать, что направляющий вектор прямой является единичным.

1-й шаг. Перенос на вектор  $-A(-a, -b, -c)$

2-й шаг.

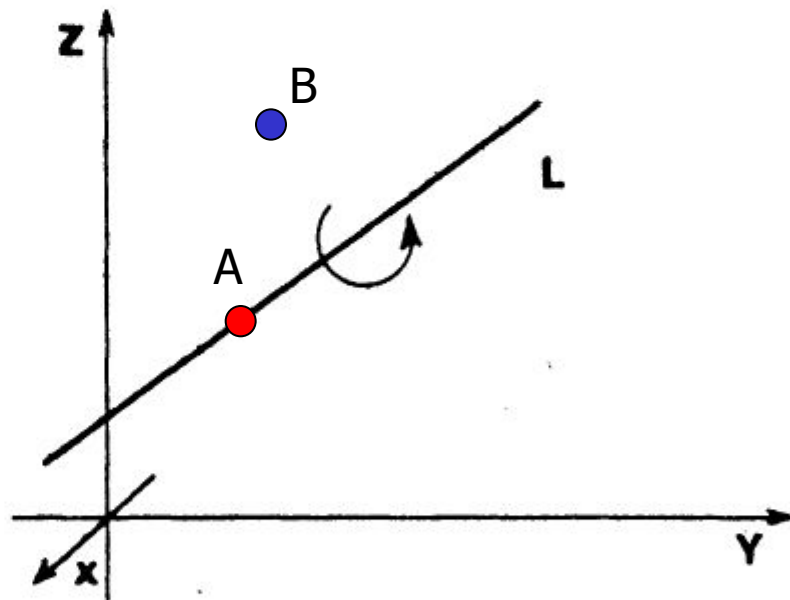
Совмещение оси аппликат с прямой  $L$  двумя поворотами  $\psi$  и  $\theta$  вокруг оси абсцисс и оси ординат.

3-й шаг. Вращение вокруг прямой  $L$  на заданный угол  $\varphi$ .

$$\hat{T} = \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 & -a \\ 0 & 1 & 0 & -b \\ 0 & 0 & 1 & -c \\ 0 & 0 & 0 & 1 \end{bmatrix}$$

$$\cos \psi = \frac{n}{d}, \quad \sin \psi = \frac{m}{d},$$

$$d = \sqrt{m^2 + n^2}.$$



$$[R_x] = \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & \frac{n}{d} & \frac{m}{d} & 0 \\ 0 & -\frac{m}{d} & \frac{n}{d} & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \end{bmatrix}$$

$$[R_y] = \begin{bmatrix} l & 0 & d & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 0 \\ -d & 0 & l & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \end{bmatrix}$$

$$[R_z] = \begin{bmatrix} \cos \varphi & \sin \varphi & 0 & 0 \\ -\sin \varphi & \cos \varphi & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \end{bmatrix}$$



## Пример преобразования (продолжение)

---

4-й шаг. Поворот вокруг оси ординат на угол  $-\theta$ .

5-й шаг. Поворот вокруг оси абсцисс на угол  $-\psi$ .

6-й шаг. Перенос на вектор  $A(a, b, c)$ .

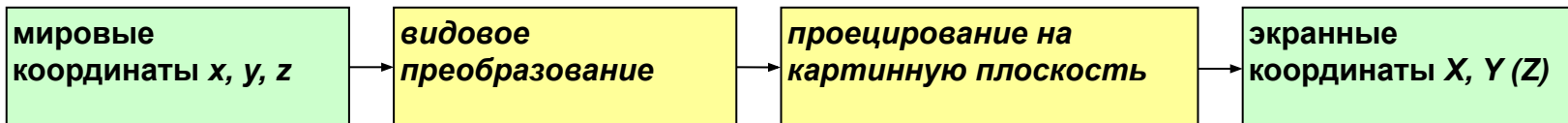
$$\hat{M} = \hat{T} \cdot \hat{R}_x \cdot \hat{R}_y \cdot \hat{R}_z \cdot \hat{R}_y^{-1} \cdot \hat{R}_x^{-1} \cdot \hat{T}^{-1}$$

Окончательно:

$$\begin{pmatrix} l^2 + \cos \varphi (1 - l^2) & l(1 - \cos \varphi)m + n \sin \varphi & l(1 - \cos \varphi)n - m \sin \varphi & 0 \\ l(1 - \cos \varphi)m - n \sin \varphi & m^2 + \cos \varphi (1 - m^2) & m(1 - \cos \varphi)n + l \sin \varphi & 0 \\ l(1 - \cos \varphi)n + m \sin \varphi & m(1 - \cos \varphi)n - l \sin \varphi & n^2 + \cos \varphi (1 - n^2) & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}$$



## Проецирование



**Проецирование** в общем случае – отображение точек, заданных в системе координат с размерностью  $N$ , в точки в системе с меньшей размерностью.

# Проецирование

Параллельное проецирование – проецирование с помощью параллельного пучка лучей

Центральное проецирование – все проецирующие лучи исходят из центра проекции

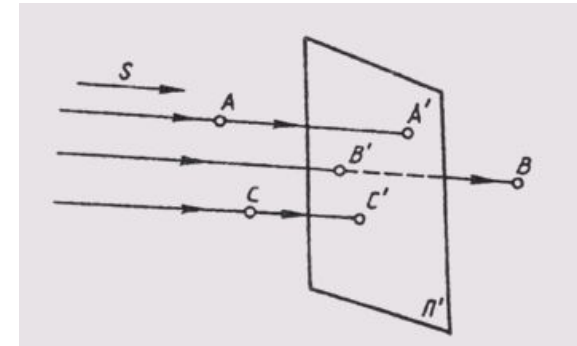
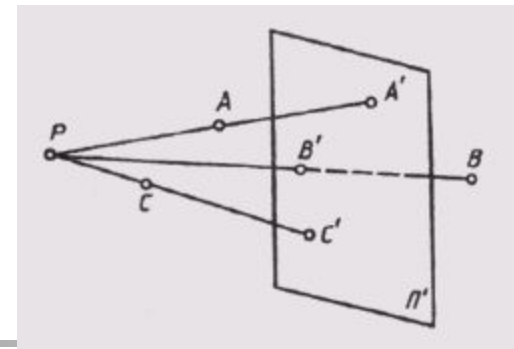
АксонOMETрическое проецирование – параллельное проецирование на плоскость проекции (ГОСТ 2.317–69)

Ортогональное проецирование – все проецирующие лучи перпендикулярны плоскости проекции

Косоугольное проецирование – направление проецирования не перпендикулярно плоскости проекции

...

# Проецирование: центральное и параллельное



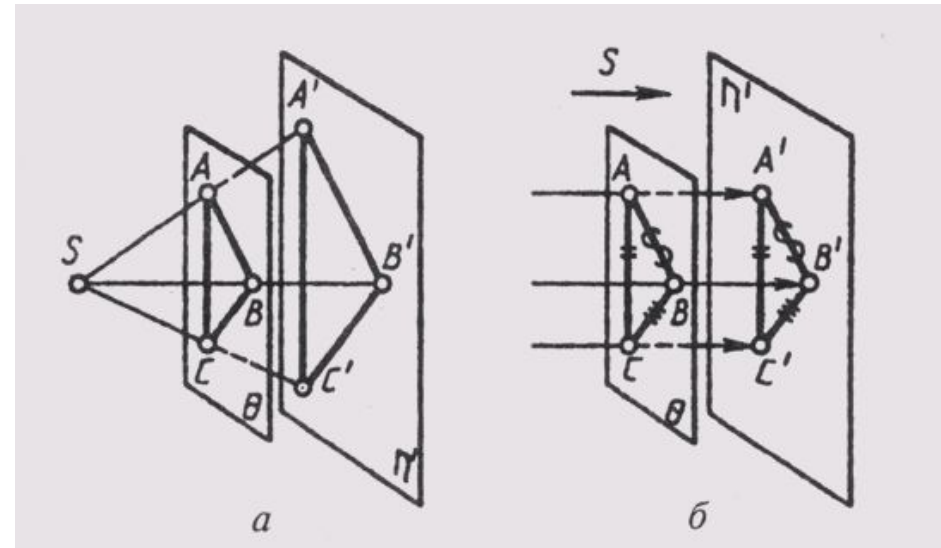
Проекции, полученные при центральном и параллельном проецировании, обладают рядом *общих свойств*:

1) **Проекция точки есть точка.** При заданном центре  $P$  (или направлении  $S$ ) проецированию любой точки  $A$  пространства соответствует на плоскости проекций  $\rho'$  единственная точка  $A'$ .

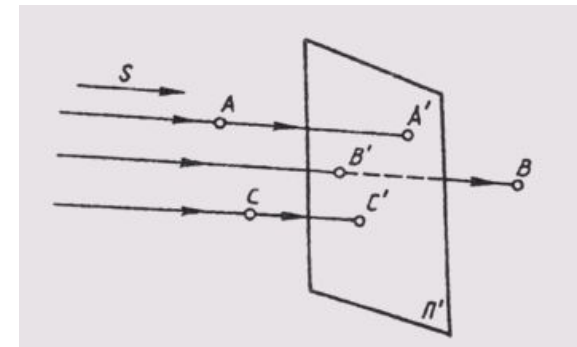
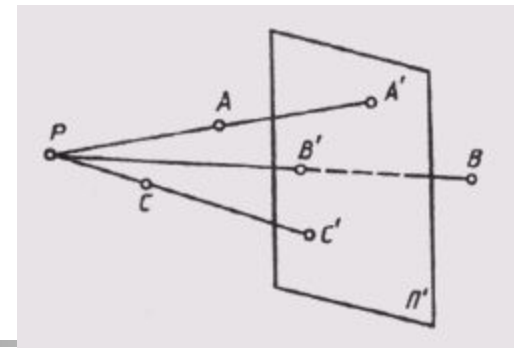
2) **Проекция прямой есть прямая.**

2.1) При параллельном проецировании сохраняется отношение величин отрезков прямой и их проекций:  $AB/BC = A'B'/B'C'$ .

2.2) При параллельном проецировании проекции параллельных прямых есть прямые параллельные.



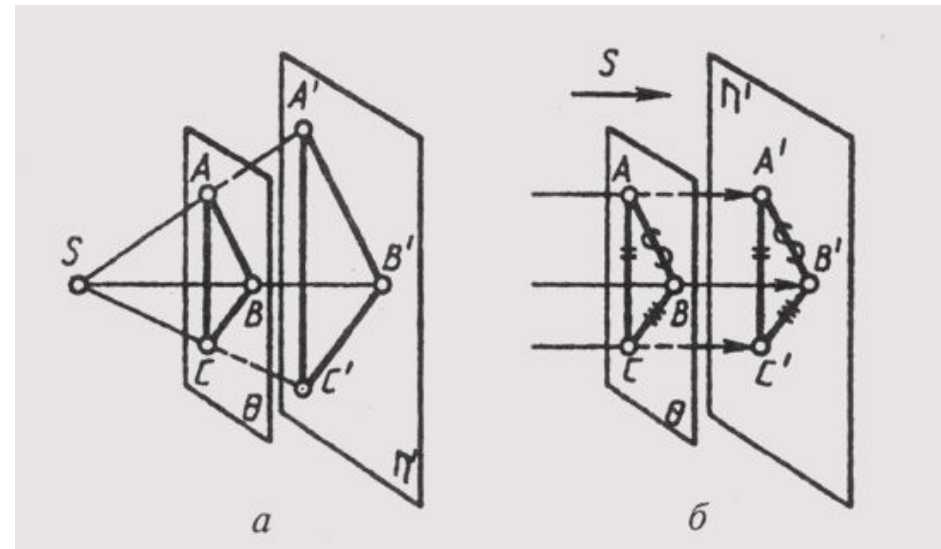
Проецирование:  
центральное и параллельное

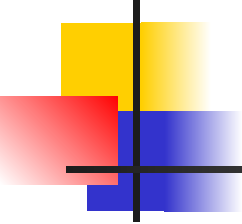


3) Проекцией плоскости является плоскость.

4) Если плоскость параллельна плоскости проекций, то проекции ее плоских фигур при центральном проецировании *подобны* самим фигурам, а при параллельном — *равны* им.

5) При параллельном проецировании проекция фигуры не изменяется при параллельном переносе плоскости проекций.

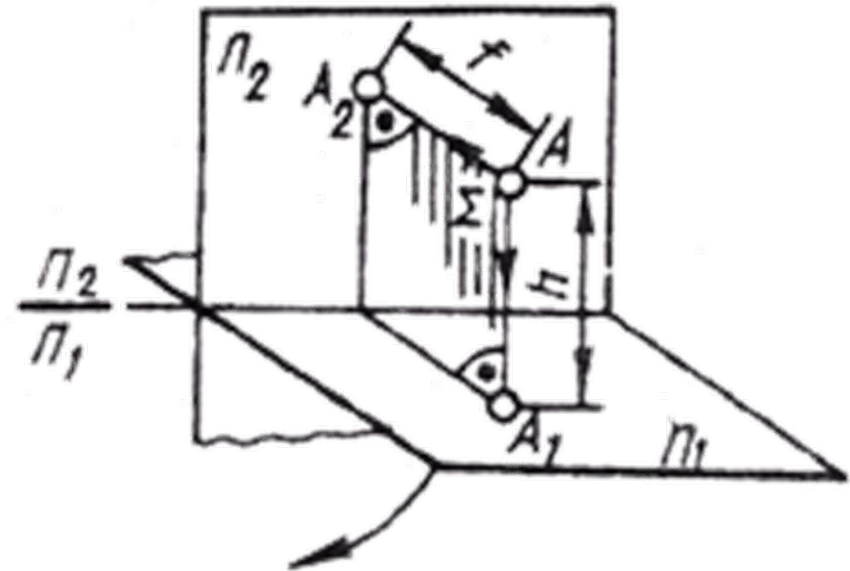
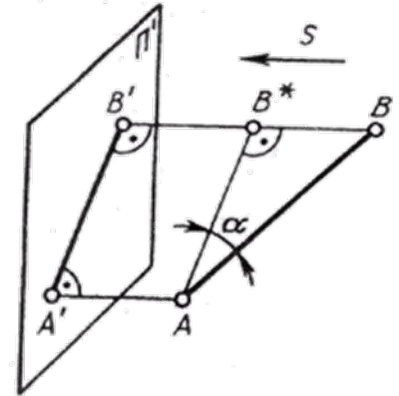




Проецирование:  
ортогональное

Ортогональное (прямоугольное) проецирование  
есть частный случай проецирования  
параллельного, когда все проецирующие лучи  
перпендикулярны плоскости проекций.

Положение точки в пространстве  
однозначно определяется **двумя**  
проекциями. Одну из них принято  
располагать горизонтально  
(горизонтальная плоскость  
проекций), другую – вертикально  
(фронтальная плоскость проекций).  
Иногда используется третья  
плоскость – перпендикулярная двум  
первым (профильная плоскость  
проекций).



## Проецирование: аксонометрическое

Аксонометрические проекции в зависимости от направления проецирования разделяют на:

- 1) *косоугольные*, когда направление проецирования не перпендикулярно плоскости аксонометрических проекций;
- 2) *прямоугольные*, когда направление проецирования перпендикулярно плоскости аксонометрических проекций.

В зависимости от сравнительной величины коэффициентов искажения по осям различают три вида аксонометрии:

- 1) *изометрия*:  $u = v = w$
- 2) *диметрия*:  $u \neq v = w$  или  $u = v \neq w$
- 3) *триметрия*:  $u \neq v \neq w$

$$u^2 + v^2 + w^2 = 2 + ctg^2 \phi$$

$\phi$  — угол между направлением проецирования и плоскостью аксонометрических проекций. В случае  $\phi = 90^\circ$   $u^2 + v^2 + w^2 = 2$ .

# Проецирование

Параллельное проецирование – проецирование с помощью параллельного пучка лучей

АксонOMETрическое проецирование – параллельное проецирование на плоскость проекции (ГОСТ 2.317–69)

Ортогональное проецирование – все проецирующие лучи перпендикулярны плоскости проекции

Изометрия – все три коэффициента искажения равны между собой ( $u = v = w$ )

Диметрия – два коэффициента искажения равны между собой и отличаются от третьего ( $u \neq v = w$  или  $u = v \neq w$ )

Триметрия – все три коэффициента искажения не равны между собой ( $u \neq v \neq w$ ).

Ортографическое проецирование – направление проекции совпадает с одним из векторов мировой системы координат

Центральное проецирование – все проецирующие лучи исходят из центра проекции

...

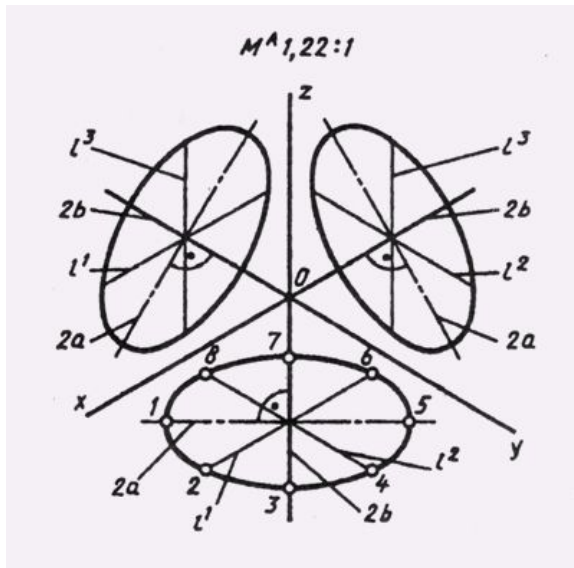
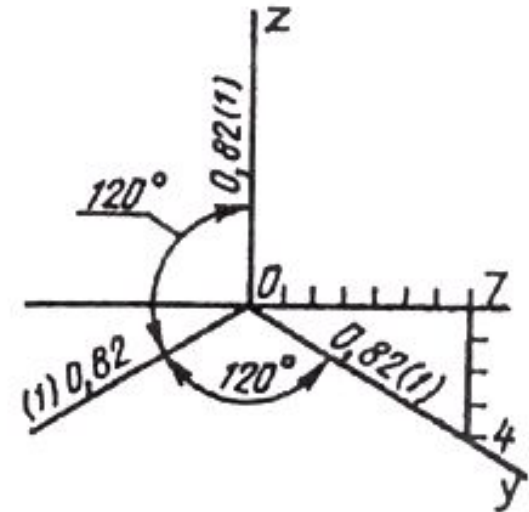
Косоугольное проецирование – направление проецирования не перпендикулярно плоскости проекции

Фронтальная изометрическая проекция – угол наклона проектирующих лучей к плоскости экрана равен  $45^\circ$

Фронтальная диметрическая проекция – масштаб по одной из осей вдвое меньше

## Проецирование: изометрия

При прямоугольном проецировании может быть получена только **одна** изометрическая проекция и **бесконечное множество** диметрических и триметрических проекций.



### Прямоугольная изометрия

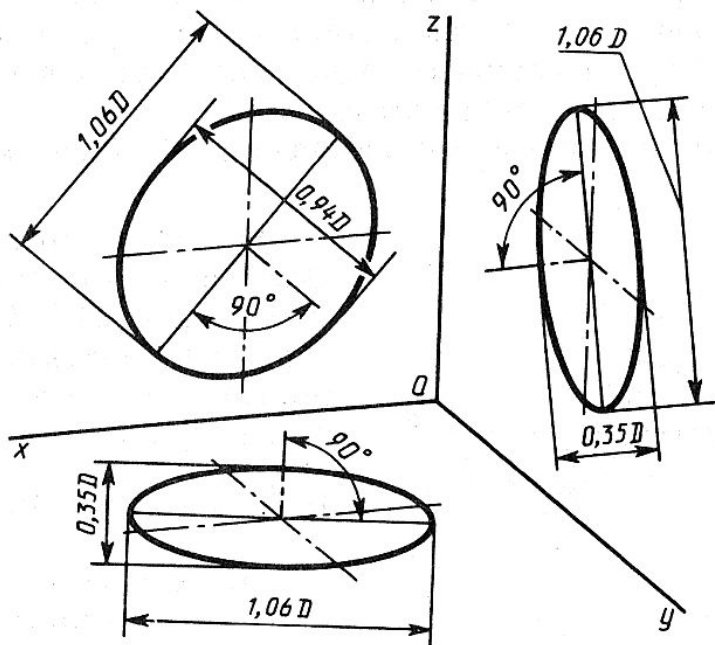
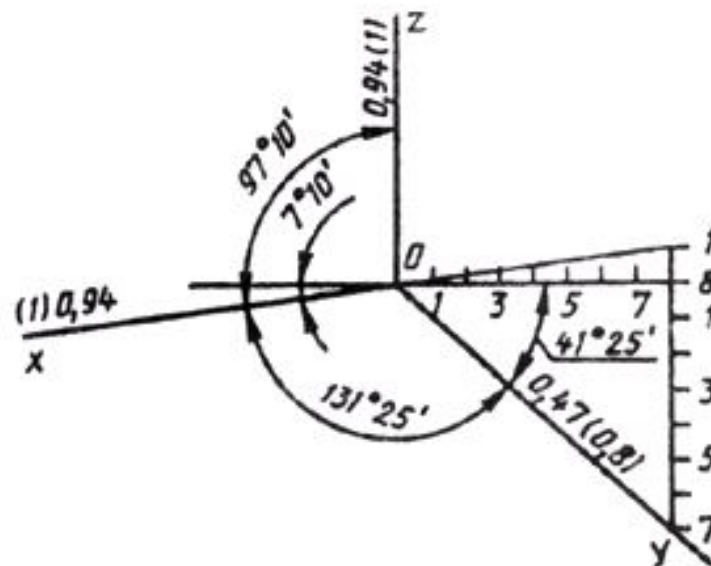
$$3u^2 = 2,$$

$$u = (2/3)^{1/2} \text{ и } u = v = w = 0,82.$$

$$\text{ГОСТ 2.317—69 : } u = v = w = 1.$$



Проецирование:  
диметрия



Прямоугольная диметрия

$$u = w, v = 0.5u$$

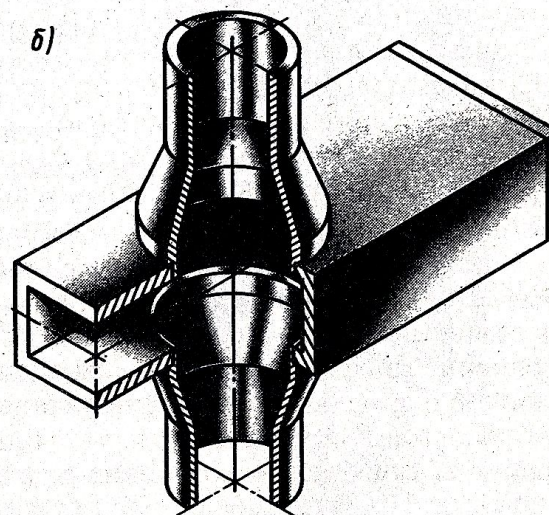
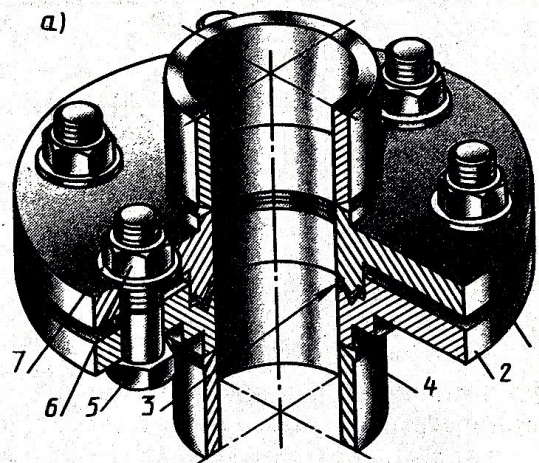
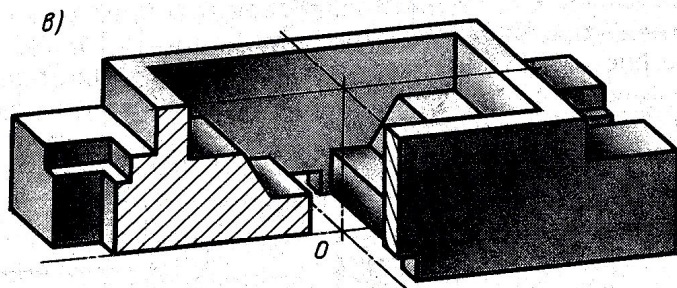
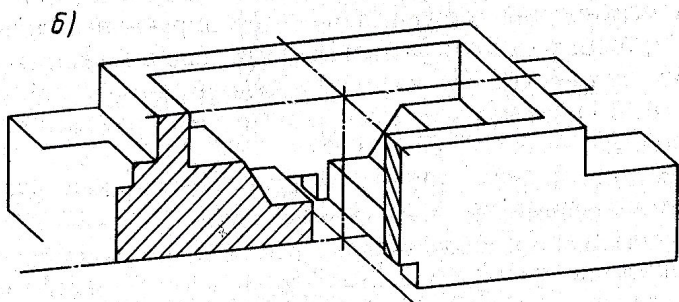
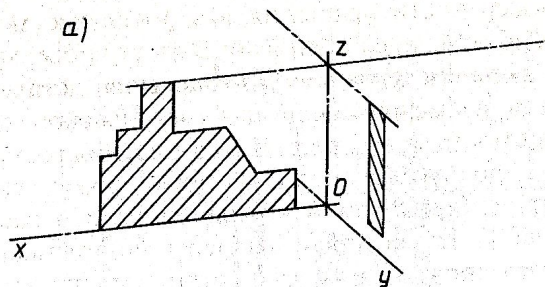
$$2u^2 + (u/2)^2 = 2,$$

$$u = w = (8/9)^{1/2} = 0.94$$

$$v = 0.47.$$

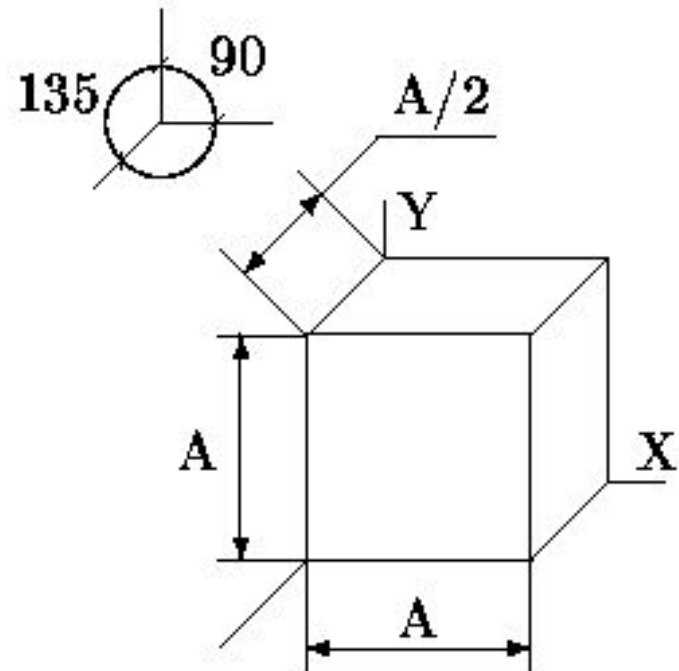
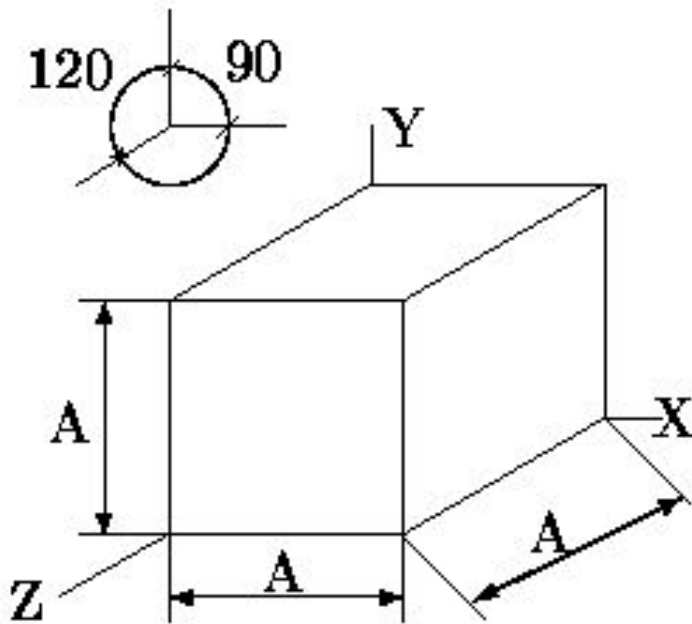
ГОСТ 2.317—69 :  $u = w = 1,$   
 $v = 0.5.$

# Прямоугольные проекции: примеры чертежей



## Проецирование: свободная и кабинетная проекции

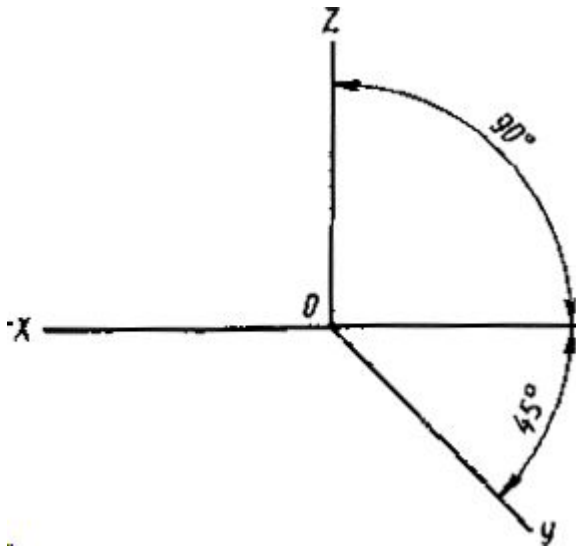
В *косоугольных проекциях* выделяют два вида: *свободную* – когда угол наклона проектирующих лучей к плоскости экрана равен половине прямого, и *кабинетную* – частный случай свободной проекции, при котором масштаб по третьей оси вдвое меньше.



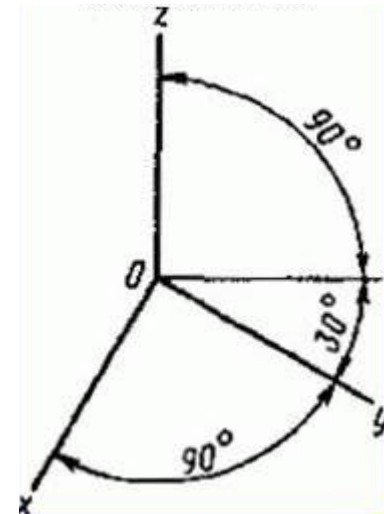
Проецирование:

косоугольные проекции по ГОСТ 2.317-69

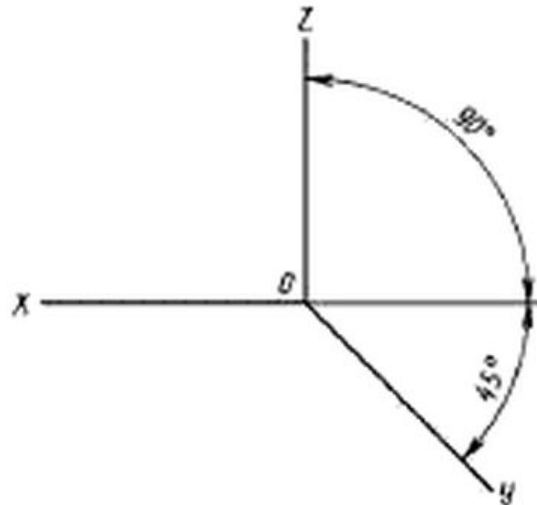
Фронтальная изометрическая проекция ( $u = v = w = 1$ )



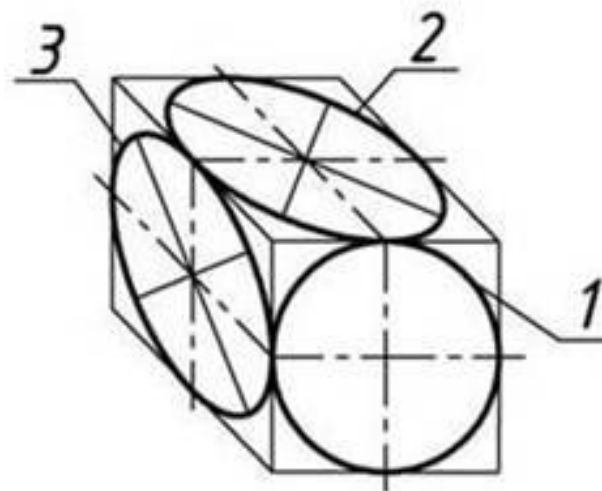
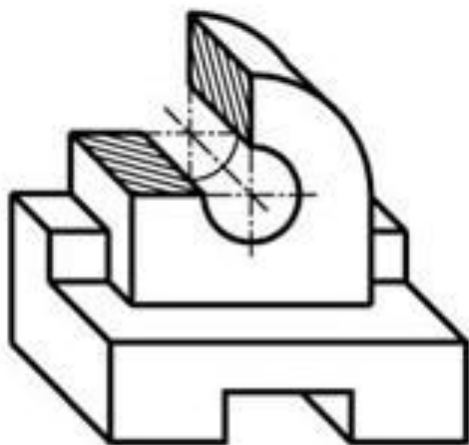
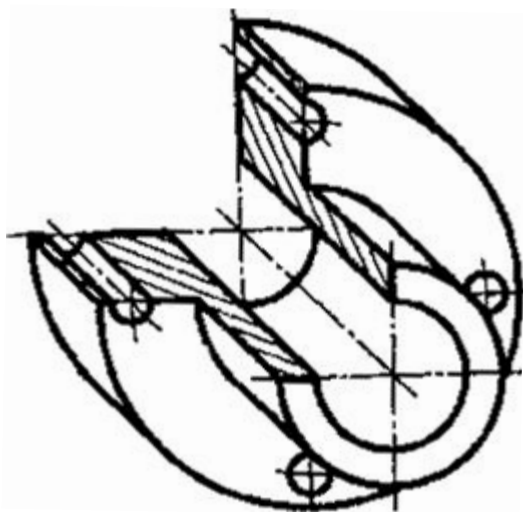
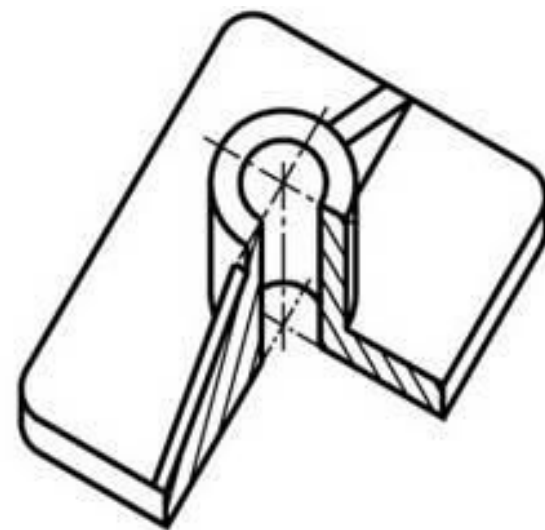
Горизонтальная изометрическая проекция ( $u = v = w = 1$ )



Фронтальная диметрическая проекция ( $u = w = 1, v = 0.5$ )



Косоугольные проекции:  
примеры чертежей



# Проецирование в однородных координатах

$$\mathbf{M}_{orth} = \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \end{bmatrix}$$

Ортографическое проецирование  
вдоль Z на плоскость XY

$$\mathbf{M}_{ax} = \mathbf{M}_{\phi} \cdot \mathbf{M}_{\psi} \cdot \mathbf{M}_{orth} = \begin{bmatrix} \cos \psi & \sin \phi \sin \psi & 0 & 0 \\ 0 & \cos \psi & 0 & 0 \\ \sin \psi & -\sin \phi \cos \psi & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \end{bmatrix}$$

Общий случай аксонометрической проекции.

Для изометрии  $\phi = 35^\circ$ ;  $\psi = -45^\circ$

Для диметрии  $\phi = 20^\circ$ ;  $\psi = -20^\circ$

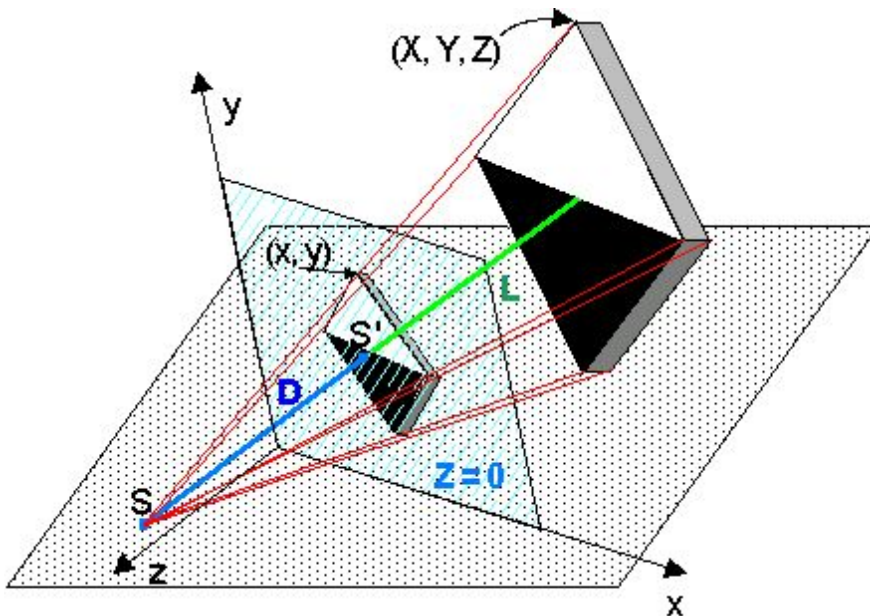
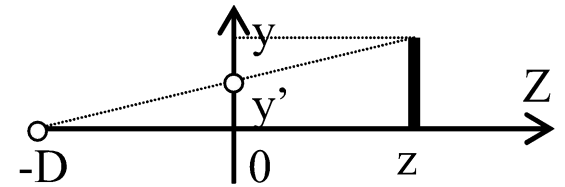
$$\begin{bmatrix} X \\ Y \\ Z \\ 1 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 1 & 0 & \alpha & 0 \\ 0 & 1 & \beta & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \end{bmatrix} \cdot \begin{bmatrix} x \\ y \\ z \\ 1 \end{bmatrix}$$

$$\alpha = \beta = \cos \frac{\pi}{4} \text{ - фронтальная изометрическая}$$

$$\alpha = \beta = \frac{1}{2} \cos \frac{\pi}{4} \text{ - фронтальная диметрическая}$$

Косоугольное проецирование

Проецирование:  
центральное (перспективное)



В параметрическом виде:

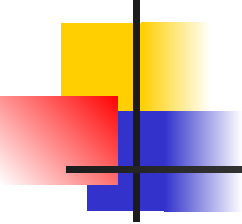
$$x = X \cdot t; \quad y = Y \cdot t; \quad z = D + (Z - D) \cdot t$$

$$0 \leq t \leq 1$$

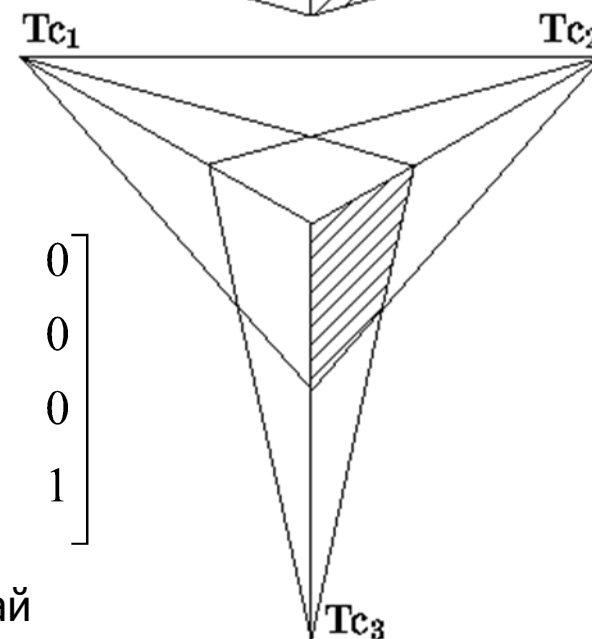
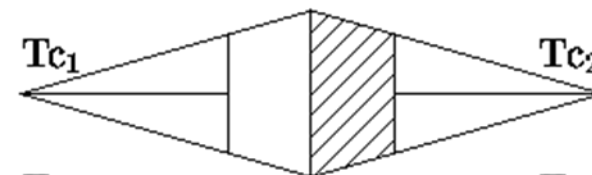
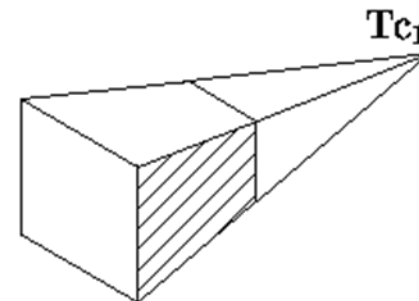
$$t_{(Z=0)} = 1 / (1 - Z/D)$$



$$x = X / (1 - Z/D); \quad y = Y / (1 - Z/D)$$



# Проецирование в однородных координатах



$$\begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & -\frac{1}{D} & 1 \end{bmatrix} \cdot \begin{bmatrix} x \\ y \\ z \\ 1 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} x \\ y \\ 0 \\ 1 - \frac{z}{D} \end{bmatrix}$$

$$\mathbf{M} = \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 0 \\ -\frac{1}{a} & -\frac{1}{b} & -\frac{1}{c} & 1 \end{bmatrix}$$

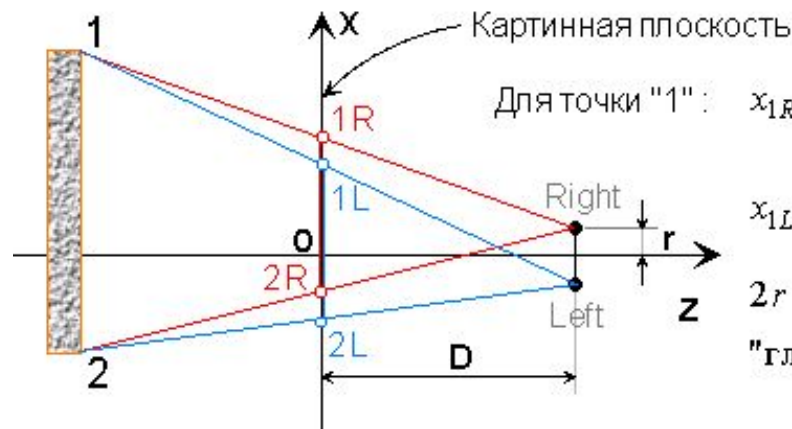
Центральное проецирование: одноточечное и общий случай



## Проецирование: специальные проекции

Специальные перспективные проекции – проекции на цилиндрические, конические, сферические и др. поверхности с последующим разворачиванием полученной проекции на плоскость.

Еще один вид специальных проекций – *стереоскопические*. Простейший вид стереоизображения образуется с помощью стереопары – двух перспективных проекций, построенных каждая для своего «глаза».



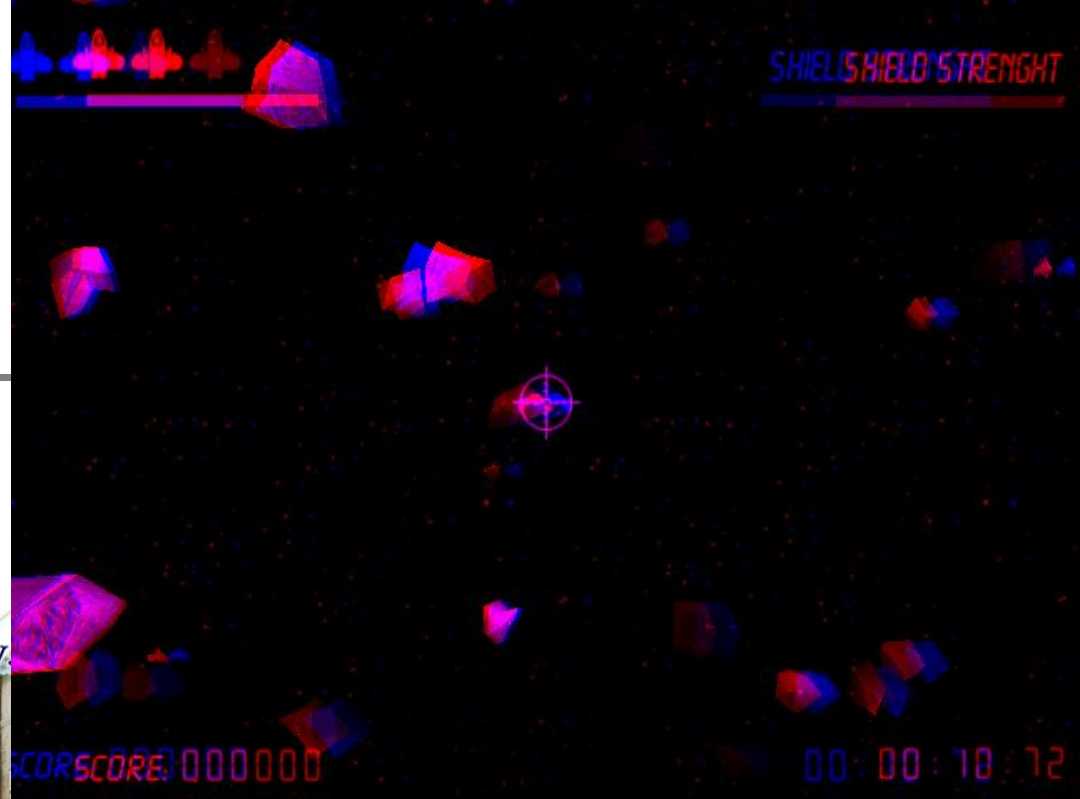
Для точки "1":

$$x_{1R} = \frac{(X_1 - r) \cdot D}{D - Z_1} + r$$

$$x_{1L} = \frac{(X_1 + r) \cdot D}{D - Z_1} - r$$

$2r$  – расстояние между  
"глазами" стереосистемы

Проецирование:  
пример  
стереоизображения



Проецирование:  
стереограмма



