

Факультет фундаментальной подготовки

Кафедра теоретических основ связи и радиотехники (ТОС и Р)

располагается на 6-м этаже

В аудиториях №607, №609, №611, 613.

Дисциплина

Радиотехнические цепи и сигналы

Лектор:

Заведующий кафедрой
Шумаков Павел Петрович

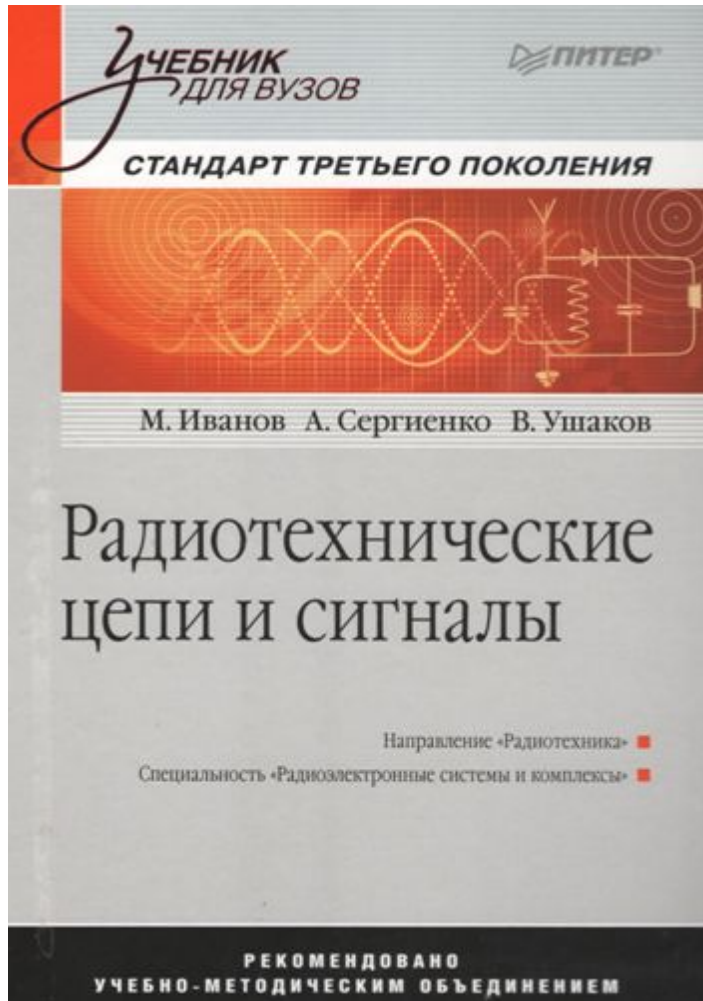
Лекция № 4

Концепция аналитического сигнала в радиотехнике.

Учебные вопросы:

1. Свертка сигналов.
2. Квадратурный и сопряженный сигнал.
3. Аналитический сигнал и его спектр.
4. Преобразование Гильберта.

Литература:



Стр. 44..46; 47..50; 76..84.

Используя MathCAD , рассчитать и построить АКФ двумя способами:

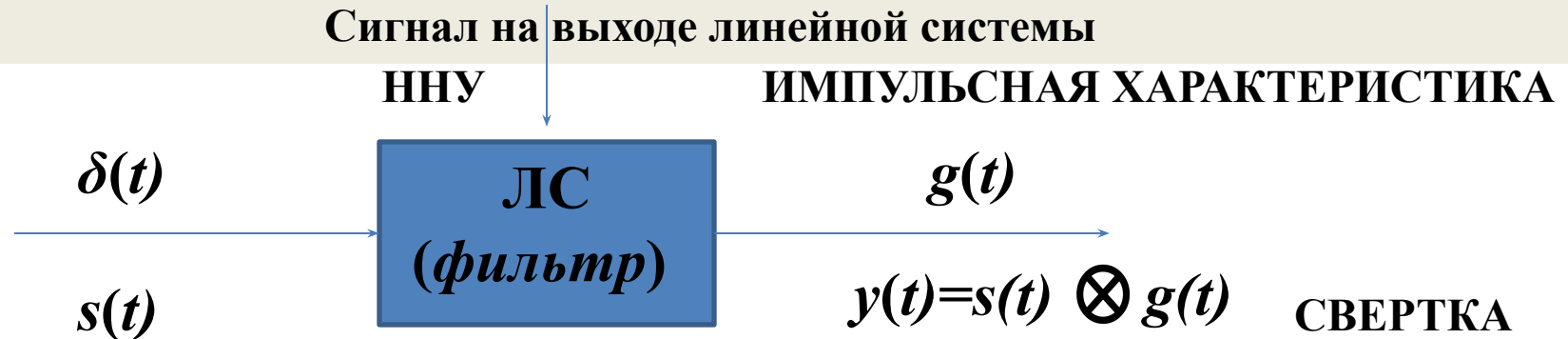
- 1) по определению АКФ;**
- 2) с использованием ОПФ от энергетического спектра ;**

для импульсных сигналов:

Четные номера : треугольный и косинусоидальный .

Нечетные номера : пилообразный и SINC-образный (5).

Вопрос 1. Свертка сигналов



Частотная характеристика линейной системы

$$S_y(j\omega) = S_s(j\omega) \cdot K(j\omega)$$

$$K(j\omega) = \int_{-\infty}^{+\infty} g(t) e^{-j\omega t} dt = |K(j\omega)| \cdot e^{j \cdot \arg[K(j\omega)]}$$

$$|K(j\omega)| = \sqrt{\operatorname{Re}^2[K(j\omega)] + \operatorname{Im}^2[K(j\omega)]}$$

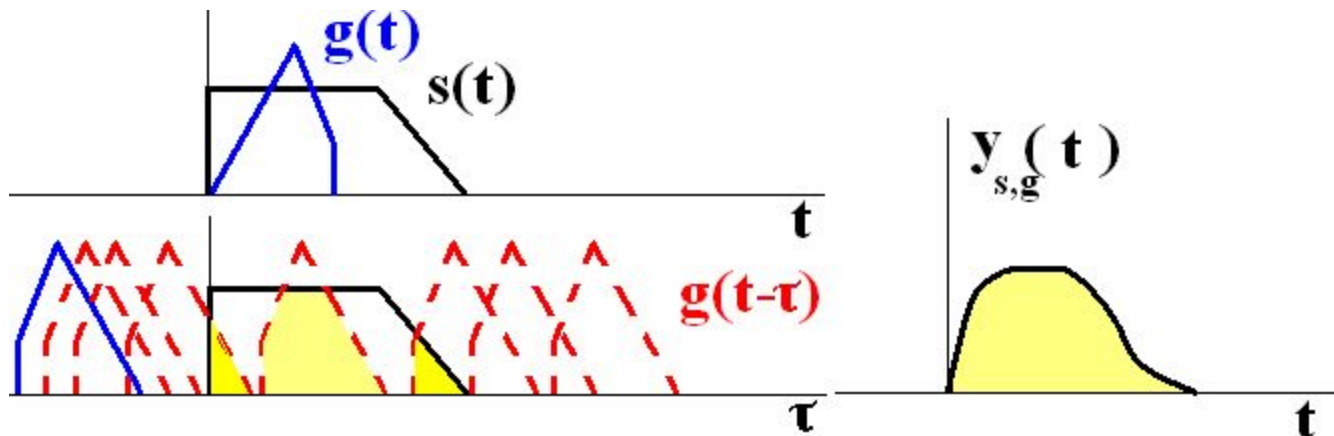
$$\arg[K(j\omega)] = \psi(\omega) = \operatorname{arctg} \frac{\operatorname{Im}[K(j\omega)]}{\operatorname{Re}[K(j\omega)]}$$

Свертка двух сигналов во временной и частотной области

Под сверткой понимается математическая операция, которая выполняется в соответствии со следующим алгоритмом:

1. Второй сигнал отображается зеркально симметрично.
2. Второй сигнал задерживается по времени от $-\infty$ до $+\infty$.
3. Для каждого времени задержки находится произведение с первым сигналом.
4. Результаты произведений, полученные при каждом времени задержки суммируются.

$$y_{s,g}(t) = \int_{-\infty}^{+\infty} s(\tau) g(t-\tau) d\tau = s(t) \otimes g(t).$$



Свойства свертки

КОММУТАТИВНОСТЬ

$$s(t) \otimes g(t) = g(t) \otimes s(t).$$

$$y_{s,g}(t) = \int_{-\infty}^{+\infty} s(\tau)g(t-\tau)d\tau = y_{g,s}(t) = \int_{-\infty}^{+\infty} g(\tau)s(t-\tau)d\tau.$$

ДИСТРИБУТИВНОСТЬ

$$s(t) \otimes [g(t) + u(t)] = s(t) \otimes g(t) + s(t) \otimes u(t).$$

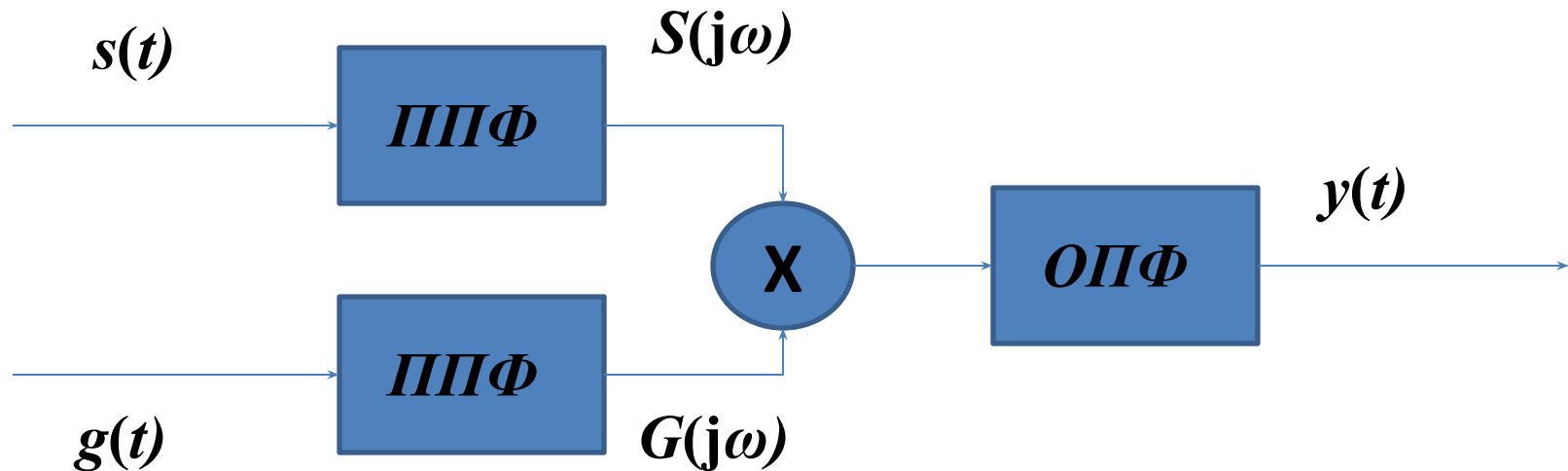
АССОЦИАТИВНОСТЬ

$$s(t) \otimes [g(t) \otimes u(t)] = [s(t) \otimes g(t)] \otimes u(t).$$

Выполнение свертки в частотной области

Согласно свойства преобразования Фурье свертке во временной области соответствует перемножение спектров двух сигналов в частотной области.

$$y_{s,g}(t) = s(t) \otimes g(t) \quad \Leftrightarrow \quad Y_{s,g}(j\omega) = S(j\omega) \cdot G(j\omega).$$



Если второй сигнал является зеркальной комплексно-сопряженной копией первого сигнала, то результатом свертки таких сигналов является АКФ сигнала.

Математический и Физический спектр непериодического сигнала

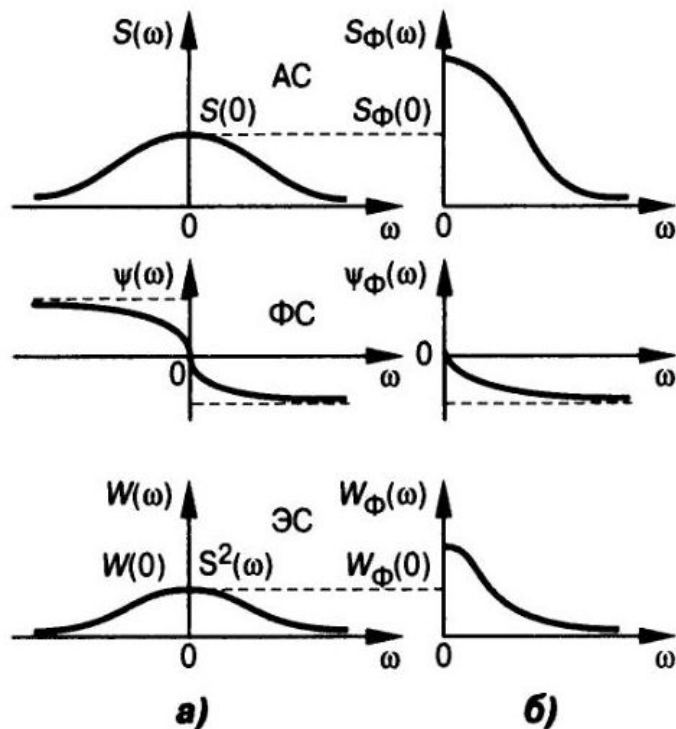
Сопоставим комплексную и амплитудно фазовую формы ОПФ

Учитывая чётность модуля $S(\omega)$ и нечётность фазы $\varphi(\omega)$, обратное преобразование Фурье можно записать следующим образом

$$s(t) = \frac{1}{2 \cdot \pi} \int_0^{\infty} 2S(\omega) \cos[\omega t + \varphi(\omega)] d\omega$$

$$s(t) = \frac{1}{2 \cdot \pi} \int_{-\infty}^{\infty} S(\omega) \cdot e^{j \cdot [\omega t + \varphi(\omega)]} d\omega$$

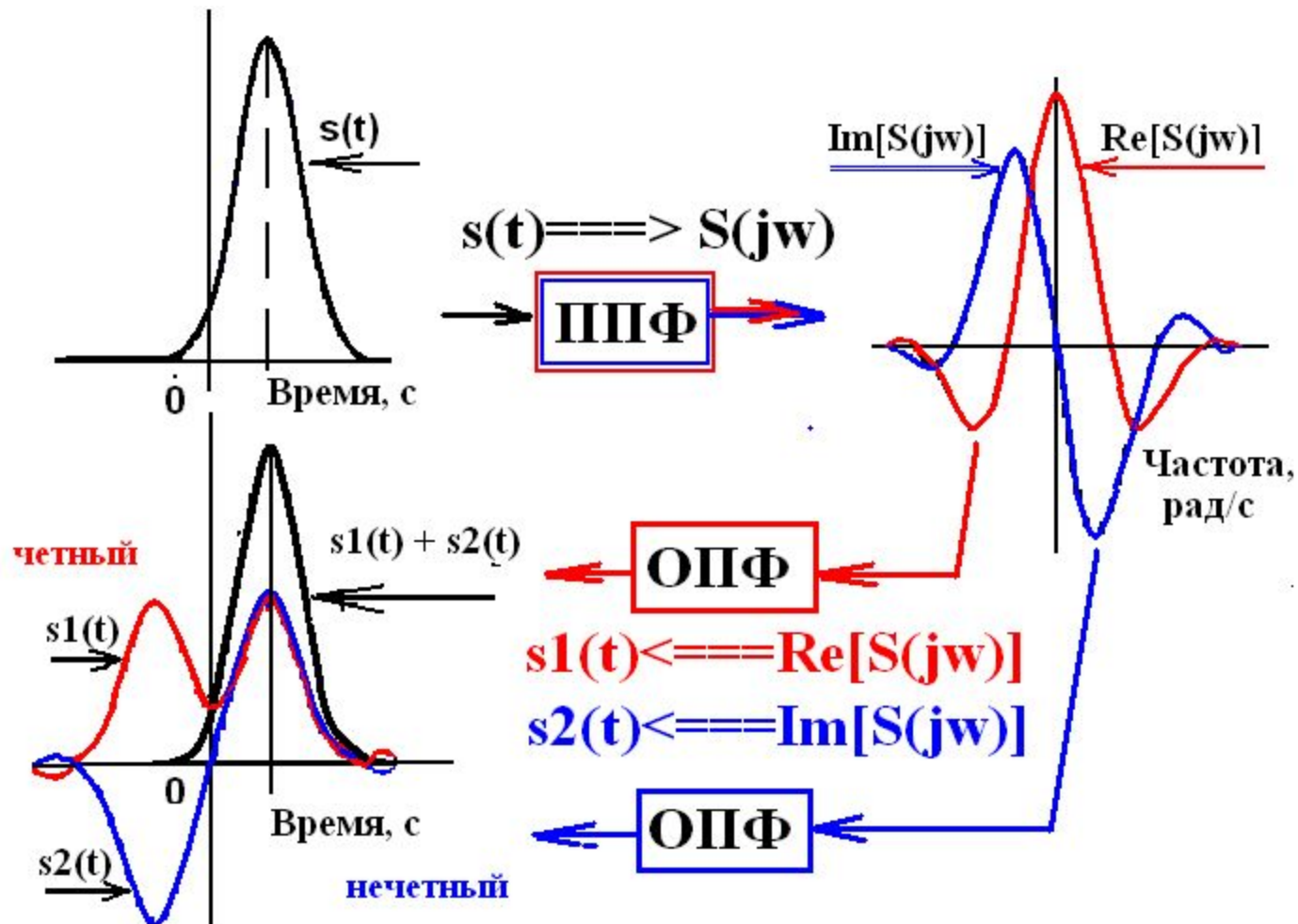
$$S_{\Phi}(\omega) = 2S(\omega)1(\omega) = \begin{cases} 2S(\omega); & \omega \geq 0 \\ S(0); & \omega = 0 \\ 0; & \omega < 0 \end{cases}$$



Вопрос 2. Квадратурный и сопряженный сигналы

Комплексное представление вещественного сигнала

$$s(t) = \operatorname{Re}[s(t)] \quad u(t) = U \cdot \cos(\omega t + \varphi) = \operatorname{Re}[U \cdot e^{j\omega t} \cdot e^{j\varphi}]$$



Сигнал, сопряженный с вещественным сигналом.

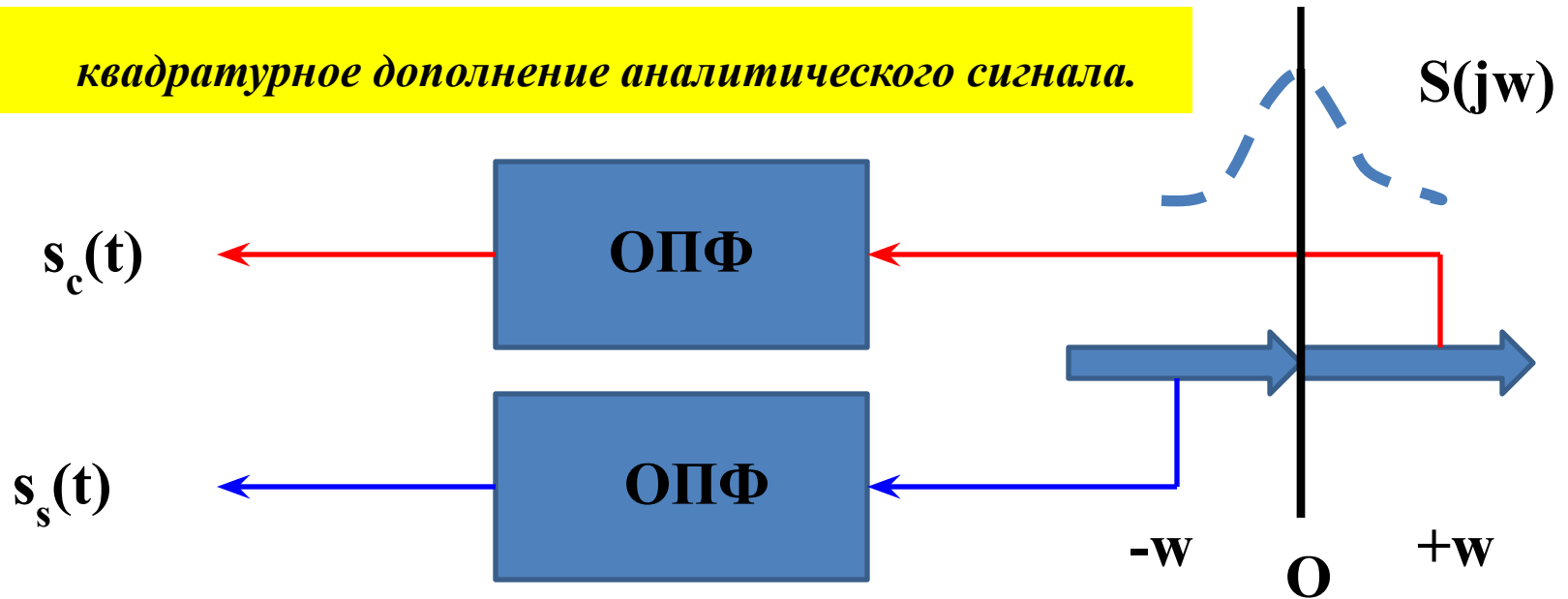
$$s(t) = \frac{1}{2\pi} \int_{-\infty}^0 S(j\omega) e^{j\omega t} d\omega + \frac{1}{2\pi} \int_0^{\infty} S(j\omega) e^{j\omega t} d\omega = s_c(t) + s_s(t)$$

Аналитический сигнал, отображающий вещественный сигнал

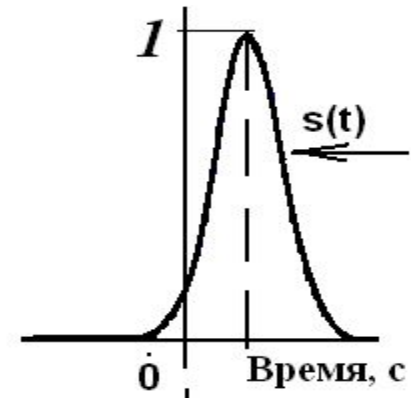
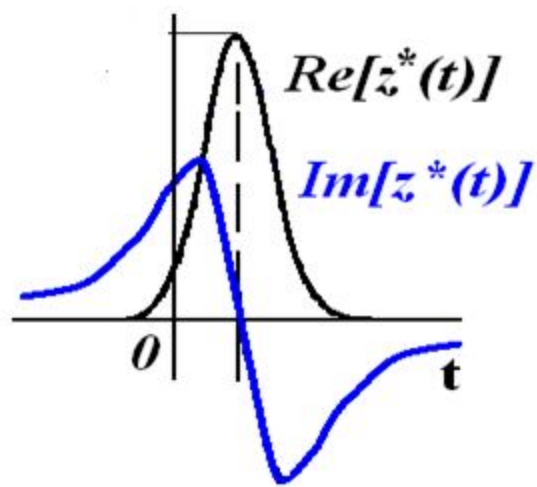
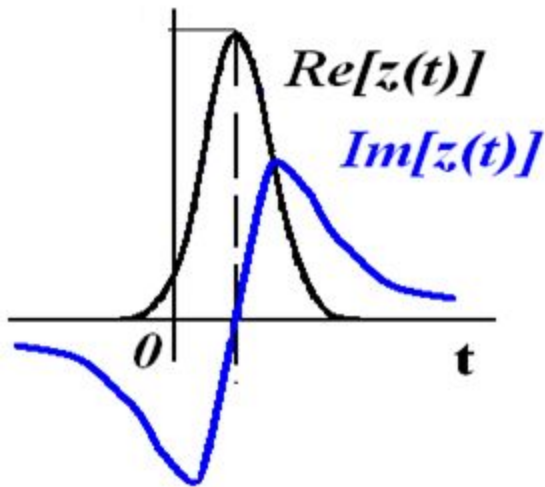
$$z_s(t) = \frac{1}{\pi} \int_0^{\infty} S(j\omega) e^{j\omega t} d\omega = \text{Re}[z_s(t)] + j \cdot \text{Im}[z_s(t)]$$

$$z_s(t) = s(t) + j \cdot \bar{s}(t) \quad z_s^*(t) = s(t) - j \cdot \bar{s}(t)$$

$\bar{s}(t)$ *квадратурное дополнение аналитического сигнала.*



$$s(t) = \frac{z_s(t) + z_s^*(t)}{2} = \operatorname{Re}[z_s(t)]$$



Преобразование Гильберта

Реальная и мнимая части спектра произвольных каузальных сигналов связаны преобразованием Гильберта.

Вещественный сигнал и его квадратурное дополнение связаны преобразованием Гильберта

Преобразование Гильберта есть свертка сигнала и ядра $1/\pi t$

$$s(t) = - \int_{-\infty}^{\infty} \bar{s}(\tau) \cdot \left[\frac{1}{\pi} \cdot \frac{1}{t-\tau} \right] d\tau = - \frac{1}{\pi} \cdot \int_{-\infty}^{\infty} \frac{\bar{s}(\tau)}{t-\tau} d\tau$$

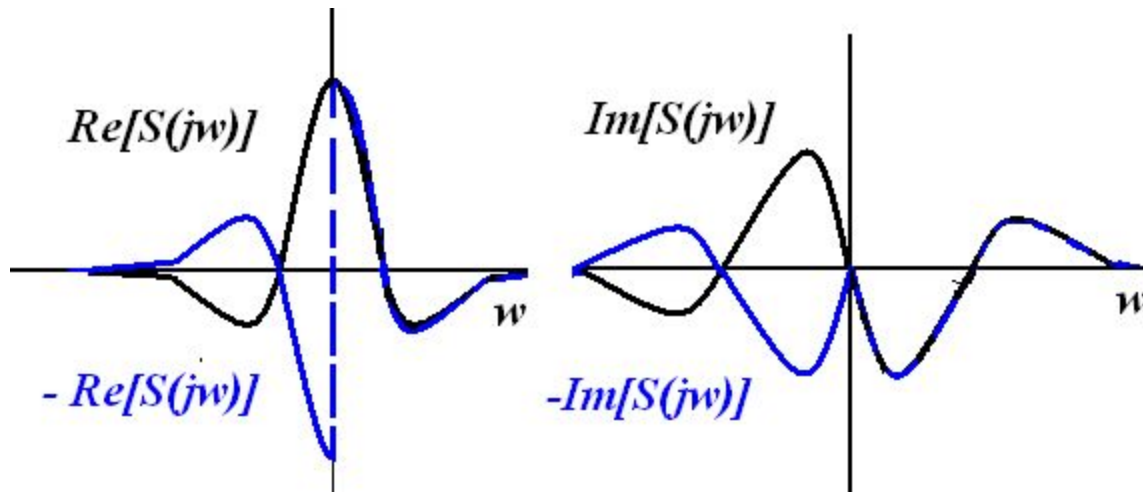
$$\bar{s}(t) = \int_{-\infty}^{\infty} s(\tau) \cdot \left[\frac{1}{\pi} \cdot \frac{1}{t-\tau} \right] d\tau = \frac{1}{\pi} \cdot \int_{-\infty}^{\infty} \frac{s(\tau)}{t-\tau} d\tau$$

Реальная и мнимая части спектра произвольных каузальных сигналов связаны преобразованием Гильберта.

$$Z_s(j\omega) = \int_{-\infty}^{\infty} z_s(t) \cdot e^{-j\omega t} dt = S(j\omega) + j\bar{S}(j\omega) =$$

$$Z_s(j\omega) = \begin{cases} 0, & \omega < 0 \\ 2 \cdot S(j\omega), & \omega \geq 0 \end{cases}$$

$$\bar{S}(j\omega) = -j \cdot \text{signum}(\omega) \cdot S(j\omega)$$



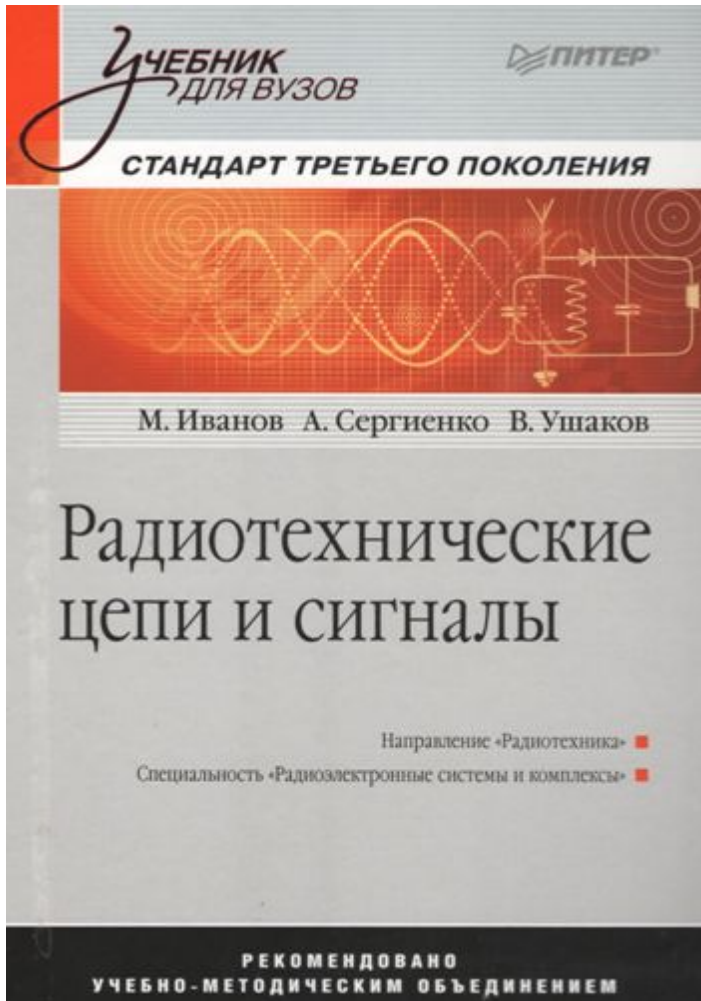
Лекция № 5

Дискретные сигналы в радиотехнике.

Учебные вопросы:

- 1. Дискретизация аналогового сигнала.**
- 2. Теорема Котельникова.**
- 3. Дискретное преобразование Фурье.**

Литература:



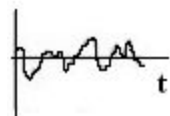
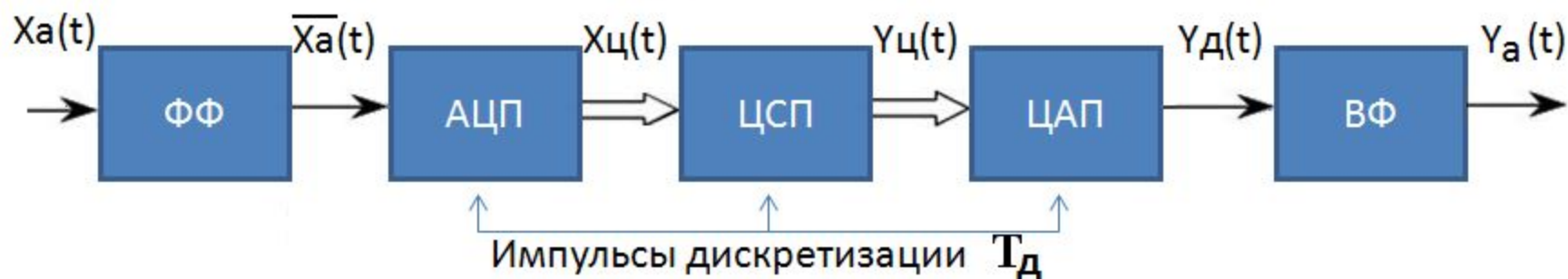
Стр. 188..191; 192..197; 197..202.

Используя MathCAD , рассчитать и построить линейную и круговую свертку двух дискретных сигналов :

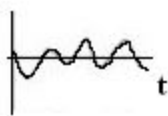
Четные номера : 5 и 13 значный код Баркера.

Нечетные номера : 7 и 11 значный код Баркера.

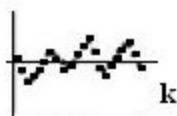
Устройство цифровой обработки сигналов



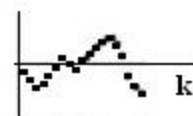
Аналоговый
входной



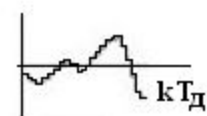
Аналоговый
фильтрованный



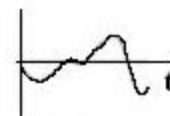
Цифровой
входной



Цифровой
обработанный

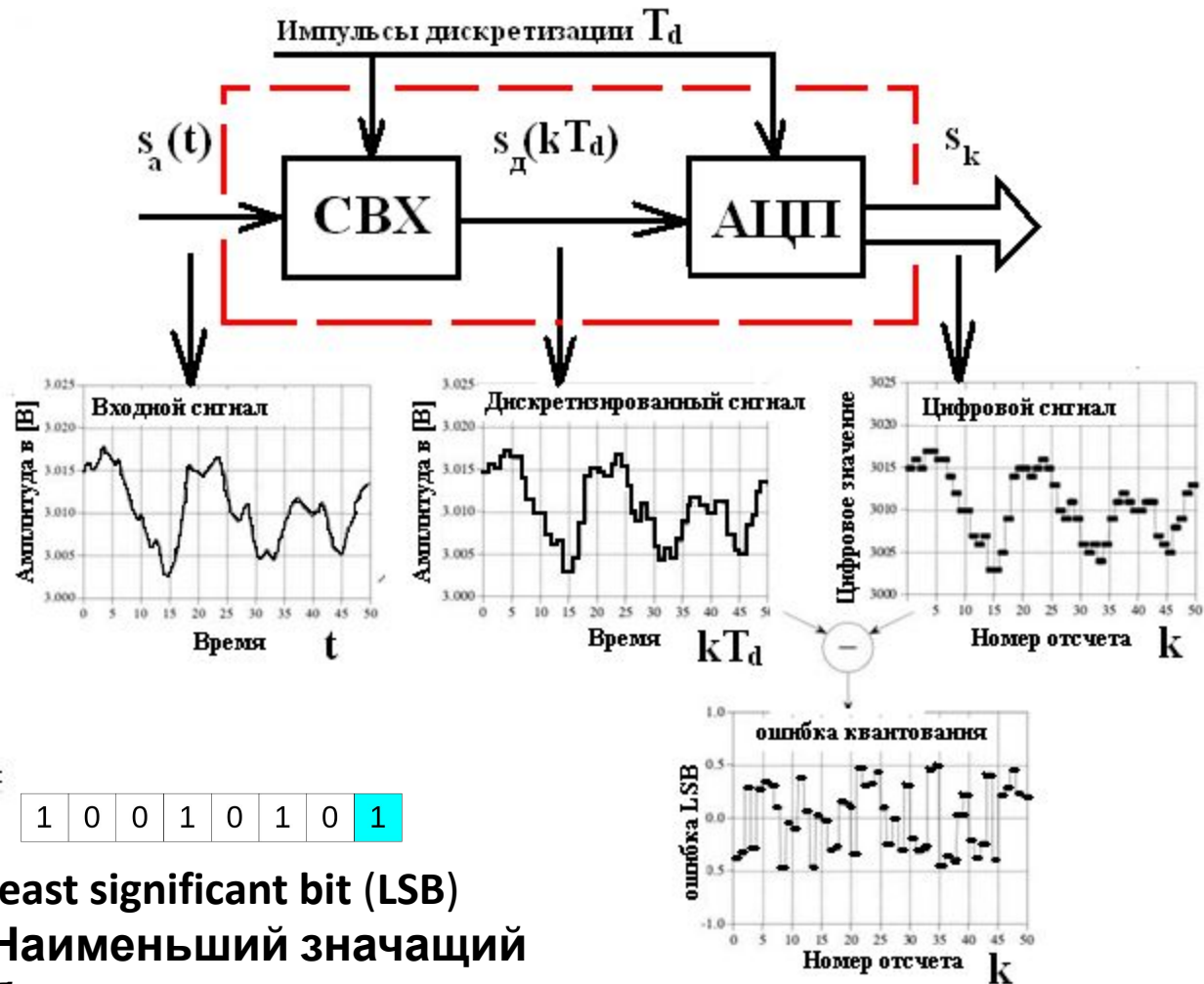


Дискретный
выходной



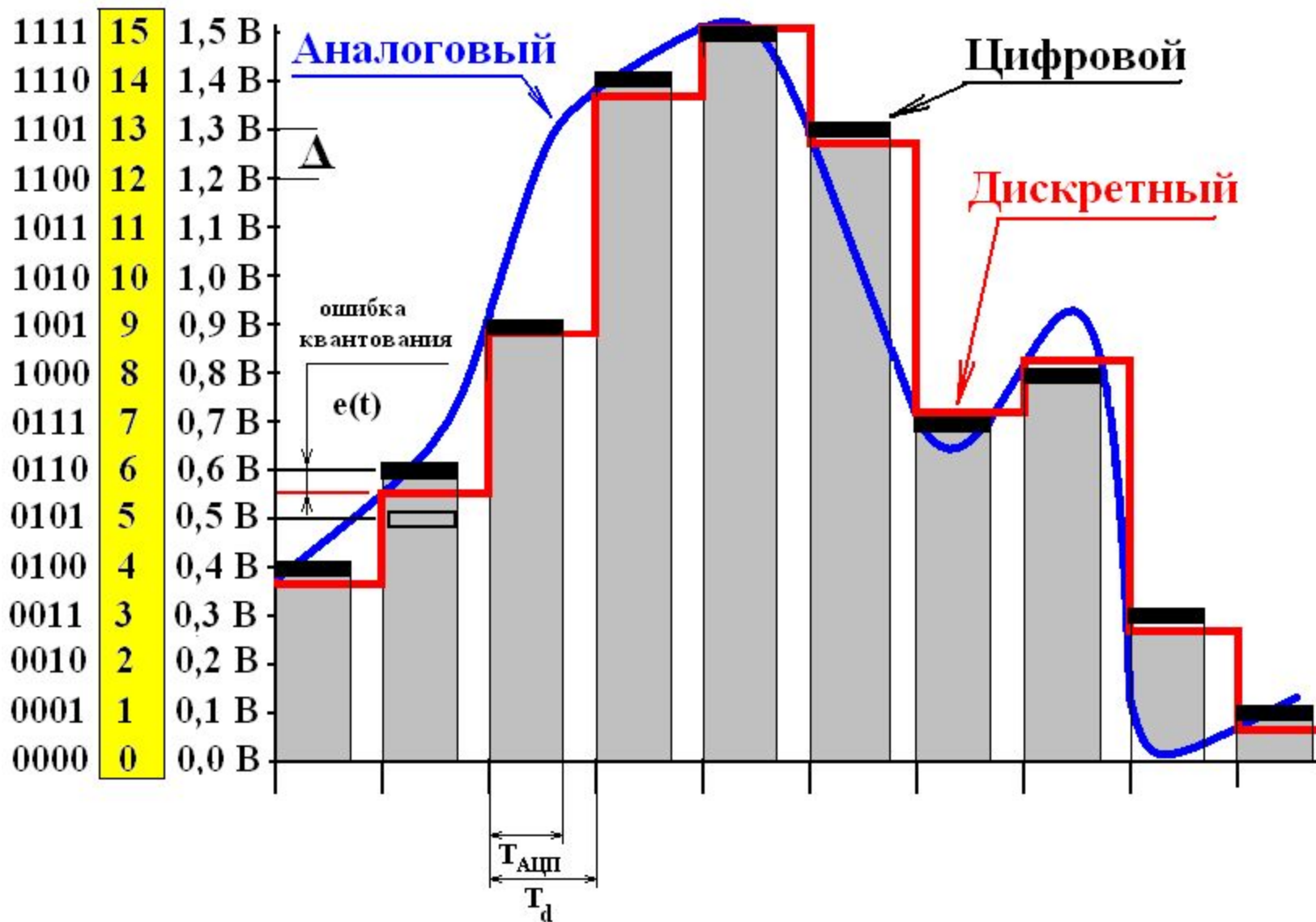
Аналоговый
выходной

Вопрос №1. Дискретизация аналогового сигнала

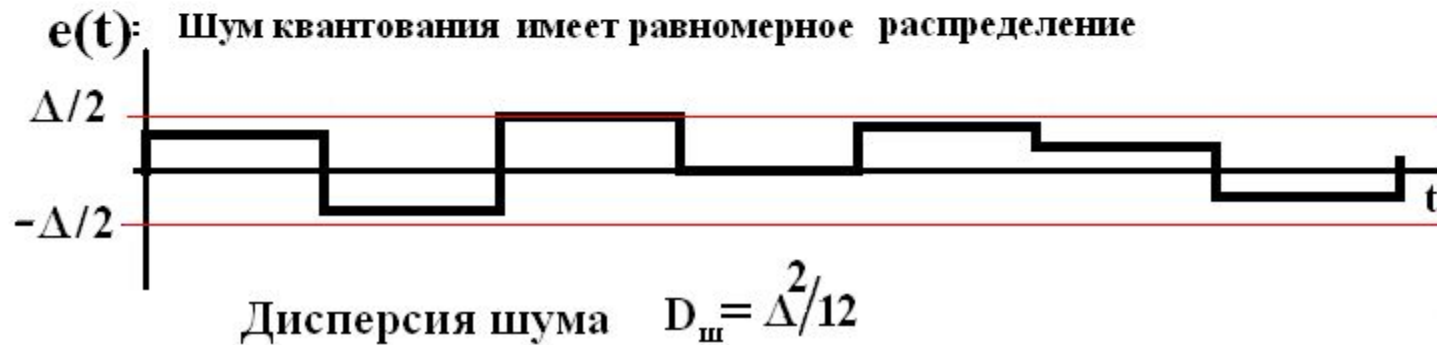
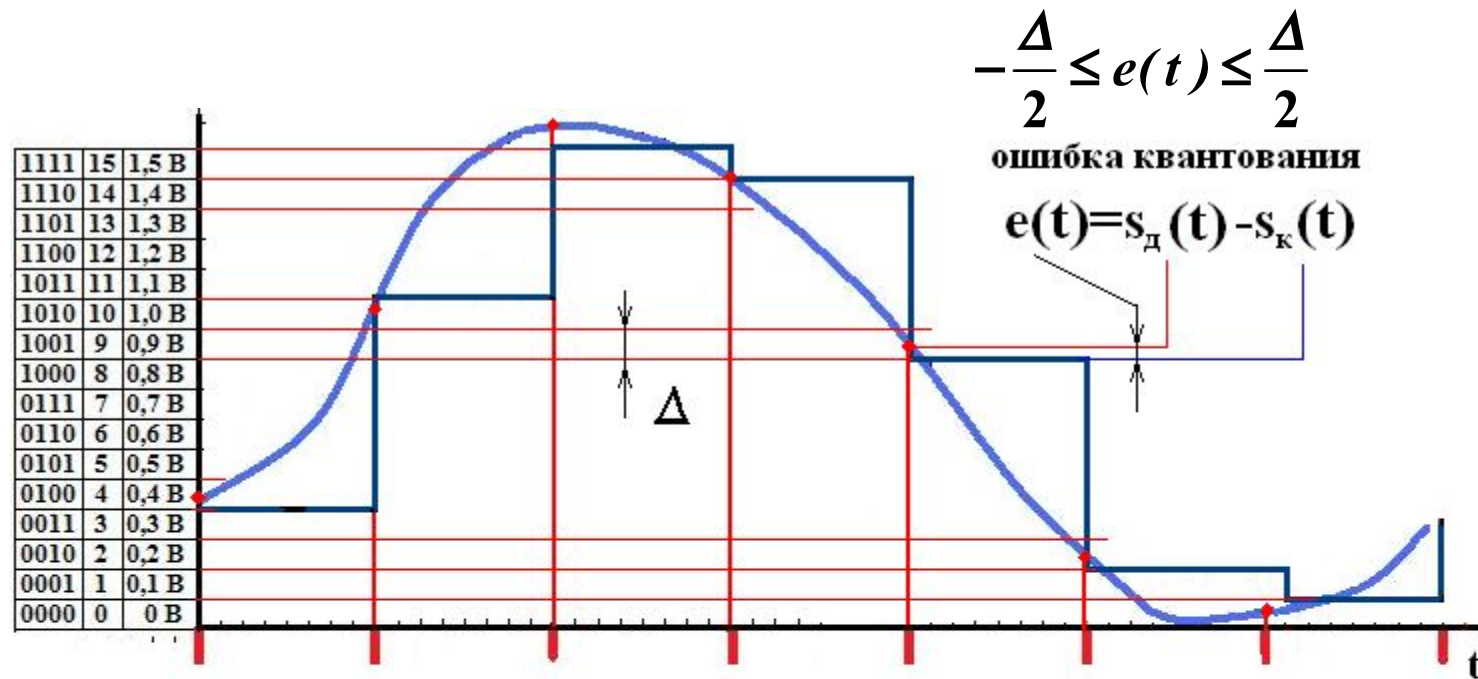


least significant bit (LSB)
Наименьший значащий
бит

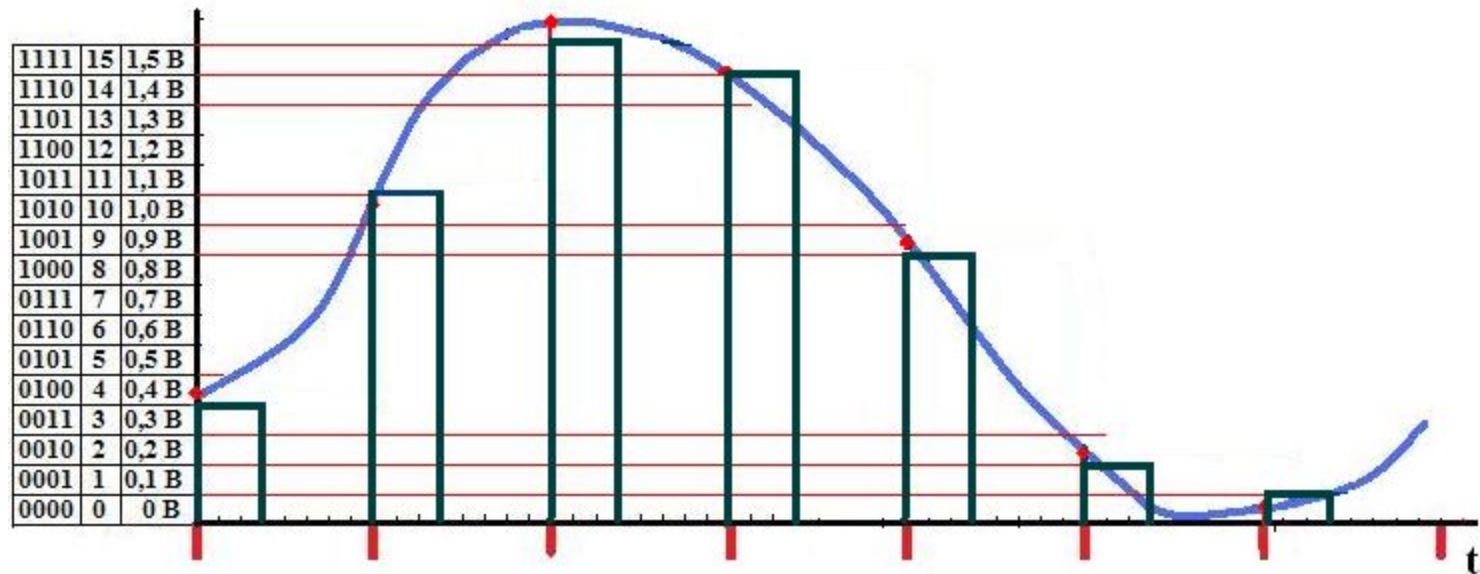
Дискретизация по времени и квантование по уровню.



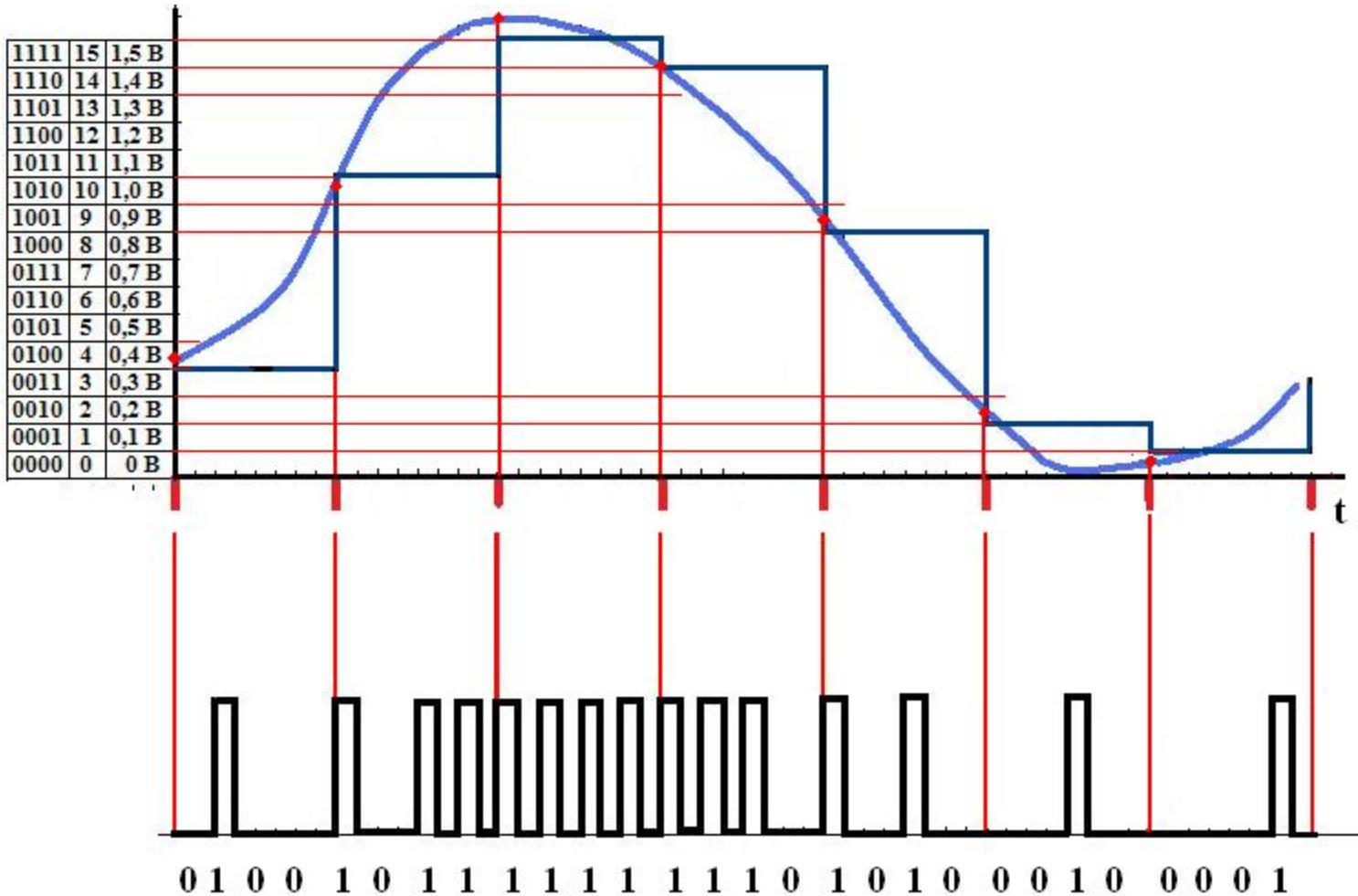
Шум квантования



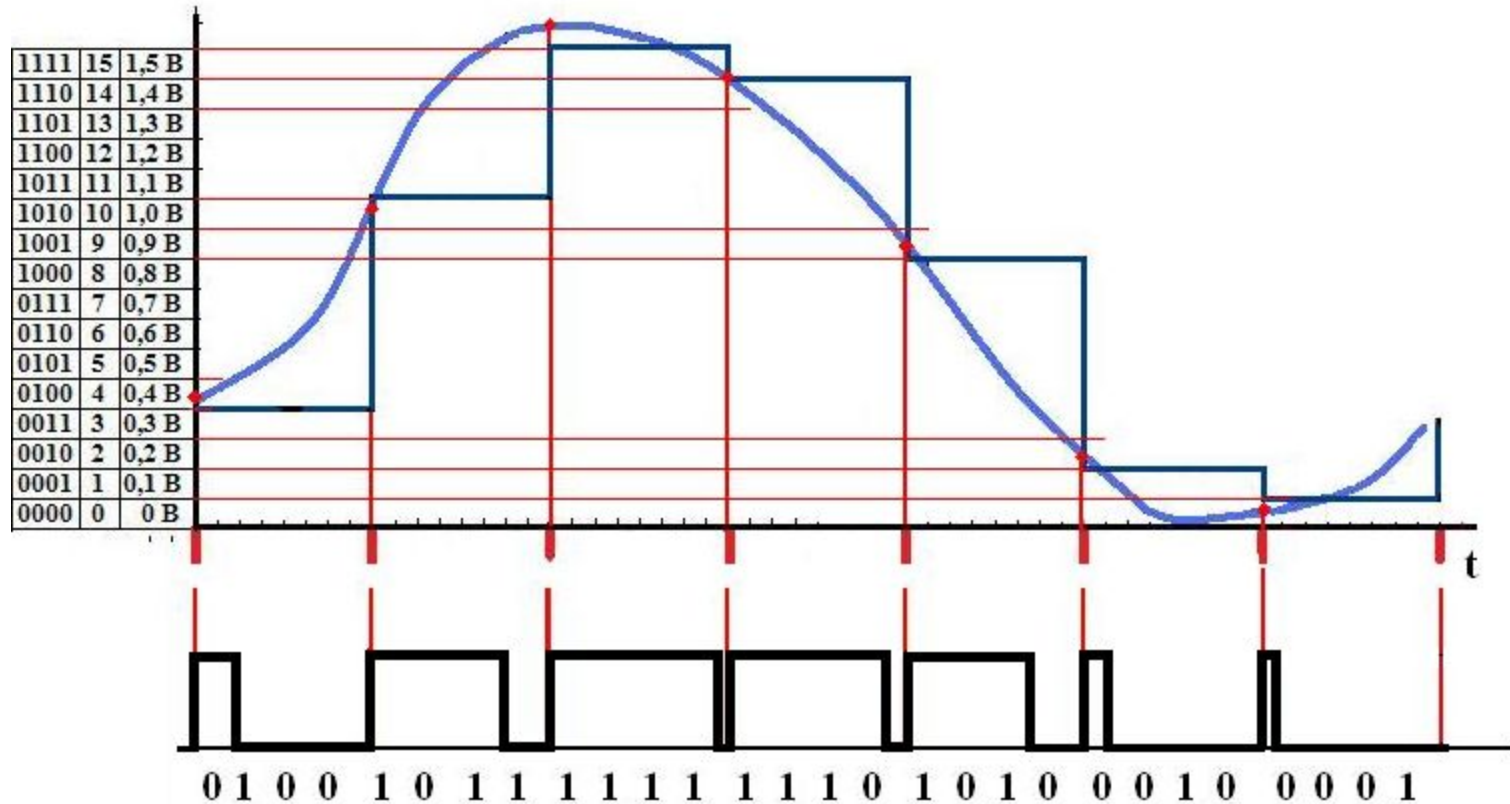
Аналогово-цифровое преобразование и Амплитудно-импульсная модуляция (АИМ)



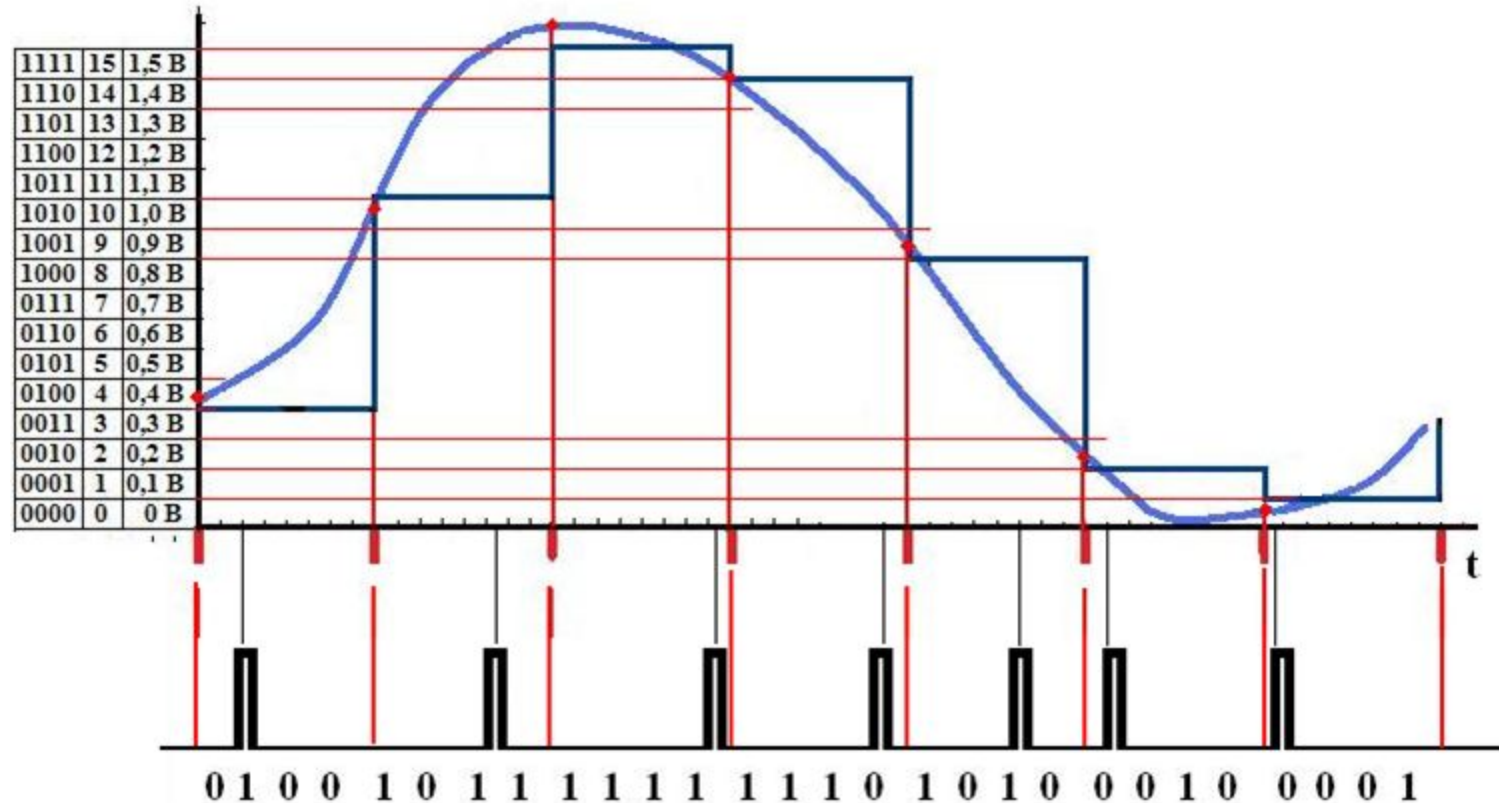
Аналогово-цифровое преобразование и Импульсно-кодовая модуляция (ИКМ)



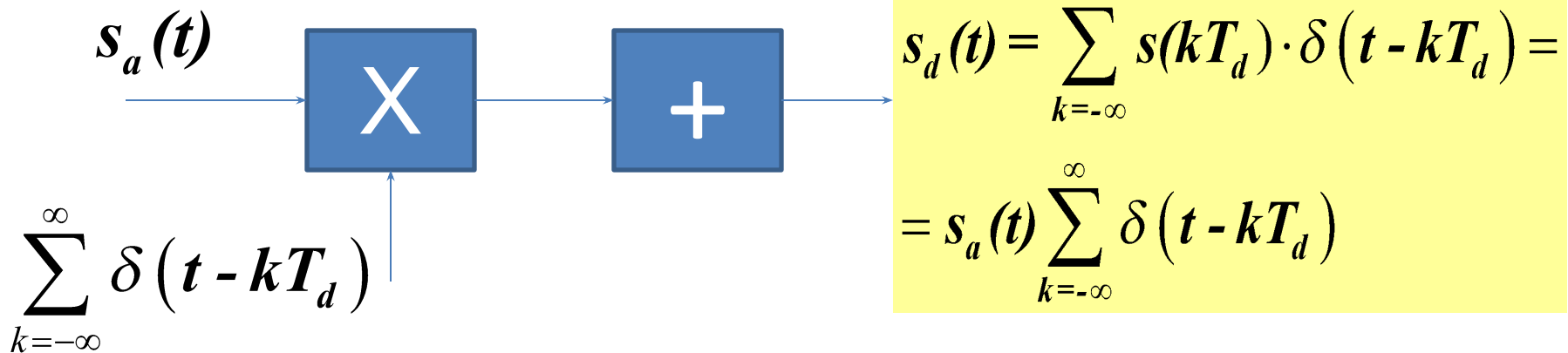
Аналогово-цифровое преобразование и Широтно-импульсная модуляция (ШИМ)



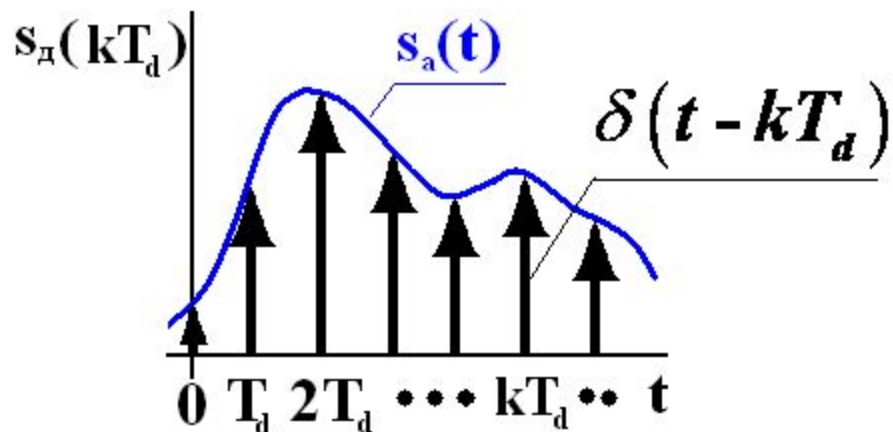
Аналогово-цифровое преобразование и Время-импульсная модуляция (ВИМ)



Дискретизированный сигнал – последовательность дельта-функций, взвешенных значениями дискретных отсчетов



Решетчатая функция отсчетов
- периодический сигнал



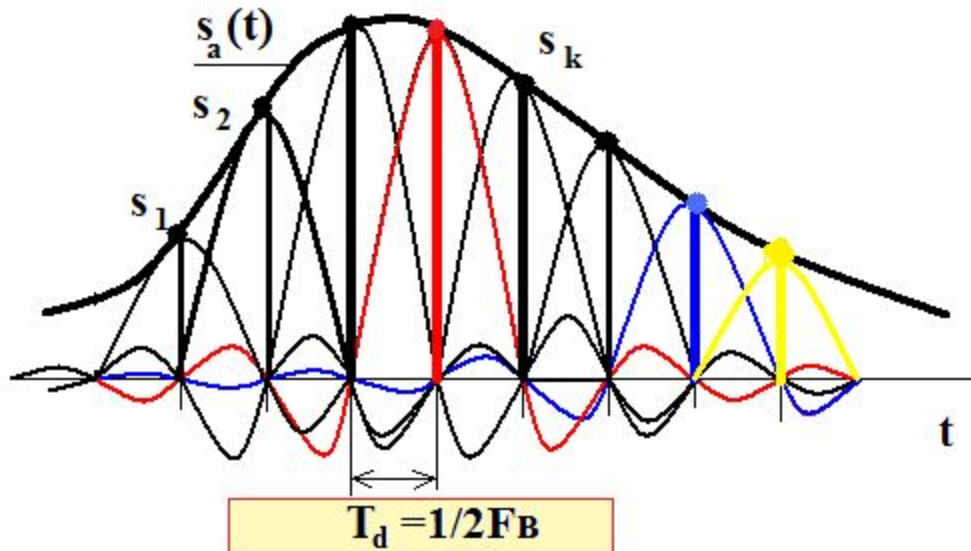
Дискретизация аналогового сигнала.

Теорема Котельникова.

Обобщенный ряд Фурье по системе базисных (ортогональных) функций
Котельникова

$$s_a(t) = \sum_{k=-\infty}^{\infty} s_k \cdot \frac{\sin(x)}{x}$$

$$x = \frac{\pi}{T_d} \cdot (t - kT_d) = \pi \cdot F_d \cdot (t - kT_d)$$



$$T_d \leq \frac{1}{2F_B} = \frac{1}{B}$$

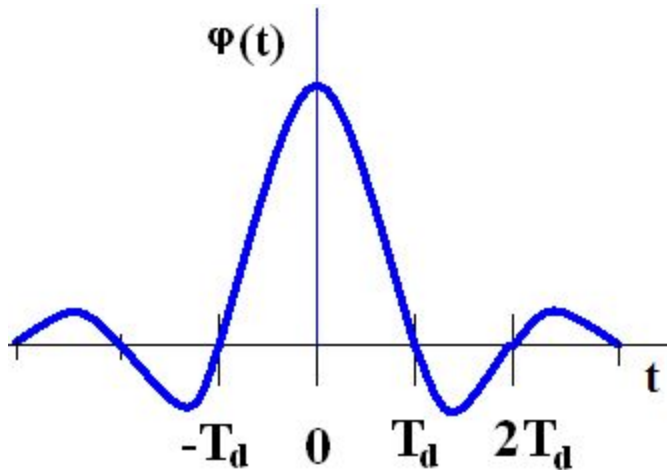
Дискретизация аналогового сигнала.

Теорема Котельникова.

Восстановление аналогового сигнала по дискретным отсчетам.

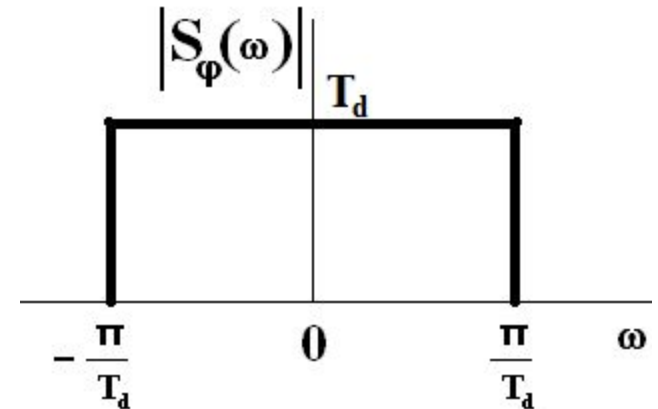
$$x_a(t) = \sum_{k=-\infty}^{\infty} T_d s_k \cdot \frac{\sin(x)}{x} \quad x = \frac{t - kT_d}{T_d} = \frac{t}{T_d} - k$$

Спектральная плотность базисных функций Котельникова.



ППФ

=

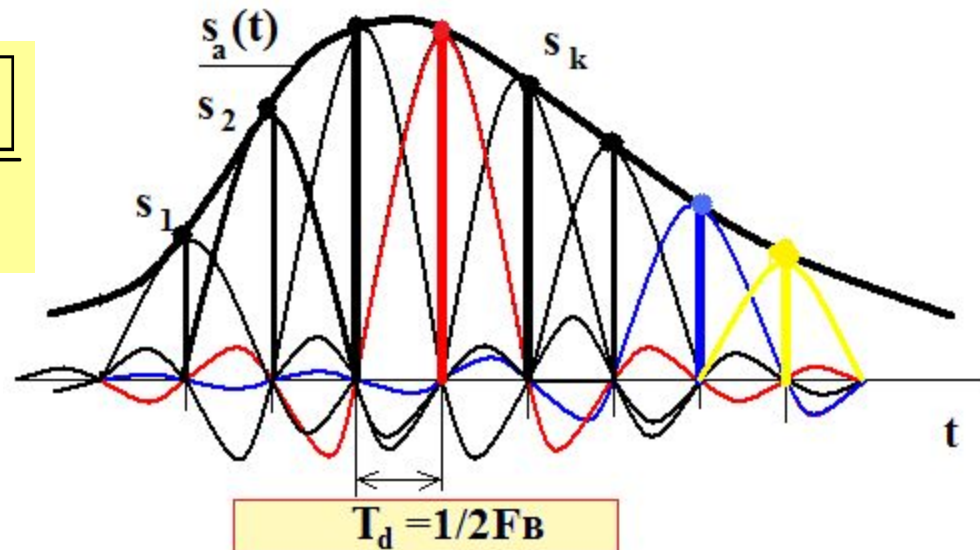


$$S_\Phi(j\omega) = \begin{cases} T_d, & |\omega| \leq \pi / T_d \\ 0, & |\omega| > \pi / T_d \end{cases}$$

Восстановление аналогового сигнала по его дискретным отсчетам

Восстановление аналогового сигнала по его дискретным отсчетам ведется весовым суммированием базисных функций Котельникова имеющих вид $\text{SIN}(x)/x$.

$$s_a(t) = \sum_{k=-\infty}^{\infty} s_k \frac{\sin[2\pi F_B(t - kT_d)]}{2\pi F_B(t - kT_d)}$$



Для получения базисных функций Котельникова необходимо радиотехническое устройство (фильтр), которое в ответ на дискретный отсчет S_k выдает сигнал вида $\text{SIN}(x)/X$.

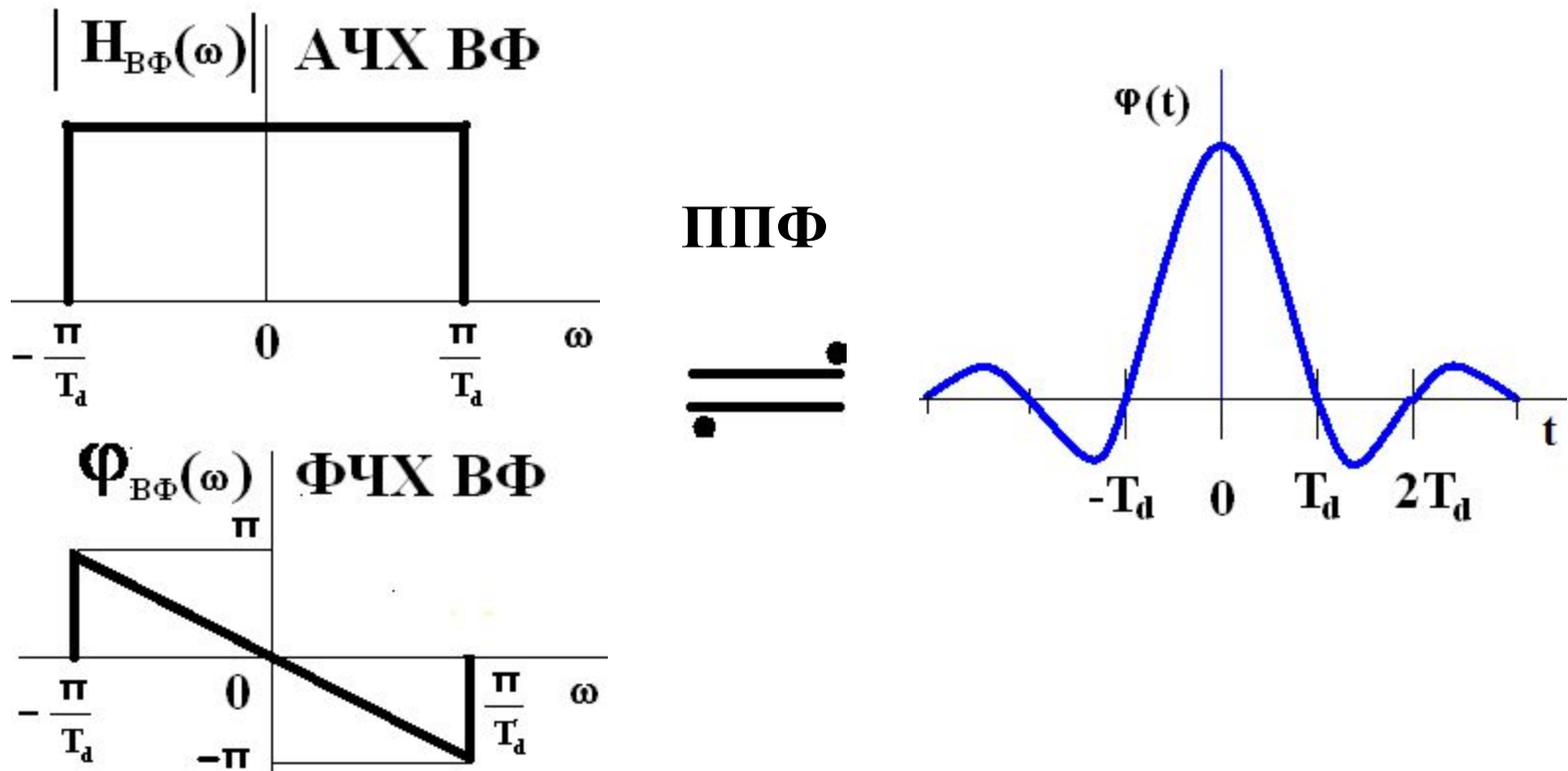
Так как дискретный отсчет является эквивалентом дельта функции, то реакция на него будет являться импульсной характеристикой фильтра.

Следовательно восстанавливающий фильтр должен иметь импульсную характеристику вида $\text{SIN}(x)/x$.

Восстанавливающий фильтр

Импульсная характеристика фильтра связана с его частотной характеристикой преобразованием Фурье.

По свойству дуальности преобразования Фурье, таким устройством должен быть низкочастотный фильтр с идеальной (прямоугольной) АЧХ и линейной ФЧХ, частота среза которого равна половине частоты дискретизации аналогового сигнала



Спектр дискретизированного сигнала

$$y(t) = \sum_{k=-\infty}^{\infty} \delta(t - kT_d)$$

Решетчатая функция отсчетов - периодический сигнал, который можно разложить в ряд Фурье с коэффициентами:

$$C_n = \frac{1}{T_d} \int_{-T_d/2}^{T_d/2} y(t) e^{-j\omega_n t} dt = \frac{1}{T_d} \int_{-T_d/2}^{T_d/2} \delta(t - kT_d) e^{-j\omega_n t} dt = \frac{1}{T_d}$$

Ряд Фурье для решетчатой функции отсчетов:

$$y(t) = \frac{1}{T_d} \sum_{n=-\infty}^{\infty} e^{j\omega_n t} \quad \omega_n = \frac{2\pi}{T_d} n = 2\pi F_d \cdot n$$

Новая модель дискретизированного сигнала

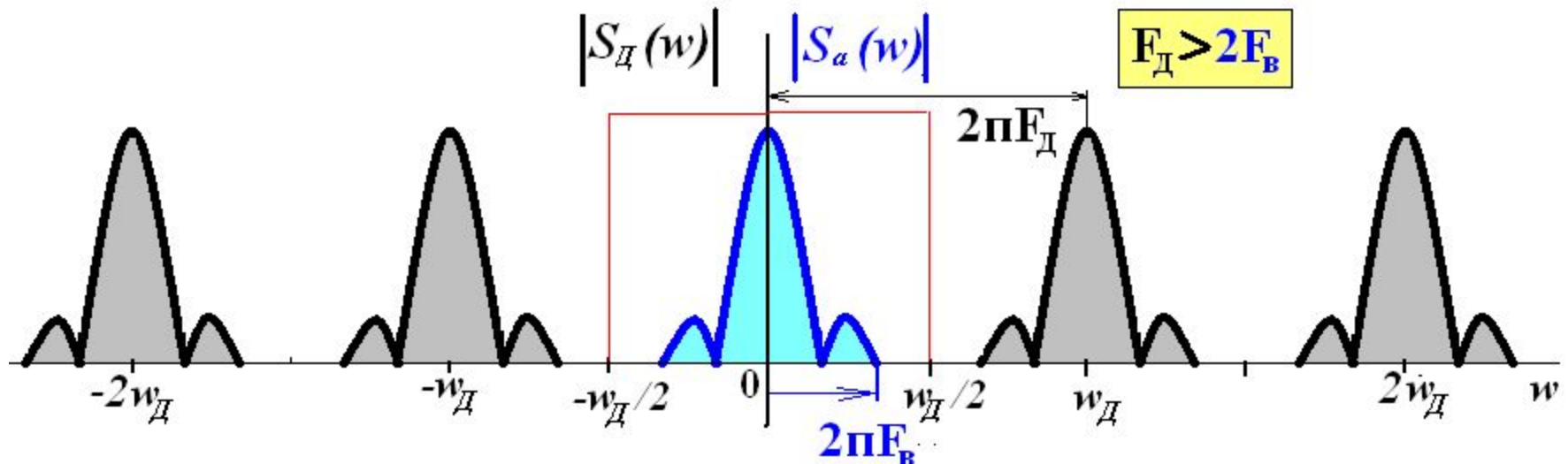
$$s_d(t) = \sum_{k=-\infty}^{\infty} s(kT_d) \cdot \delta(t - kT_d) = s_d(t) = \frac{1}{T_d} \sum_{k=-\infty}^{\infty} s_a(t) \cdot e^{j\omega_n t}$$

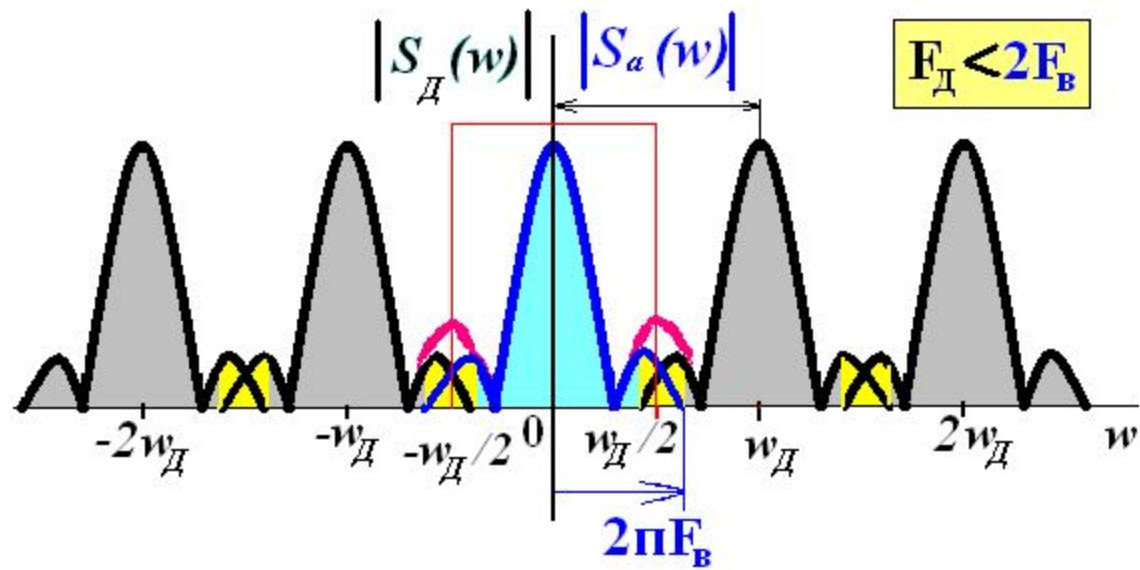
Спектр дискретизированного сигнала

Преобразование Фурье для дискретизированного сигнала

$$\begin{aligned} S_{\ddot{A}}(\omega) &= \frac{1}{T_d} \int_{-T_d/2}^{T_d/2} s_{\ddot{A}}(t) e^{-j\omega t} dt = \frac{1}{T_d} \int_{-T_d/2}^{T_d/2} \sum_{n=-\infty}^{\infty} s_a(t) \cdot e^{j\omega_n t} e^{-j\omega t} dt = \\ &= \frac{1}{T_d} \sum_{n=-\infty}^{\infty} \int_{-T_d/2}^{T_d/2} s_a(t) \cdot e^{-j(\omega - \omega_n)t} dt = \frac{1}{T_d} \sum_{n=-\infty}^{\infty} S_a\left(\omega - \frac{2\pi}{T_d} n\right) \end{aligned}$$

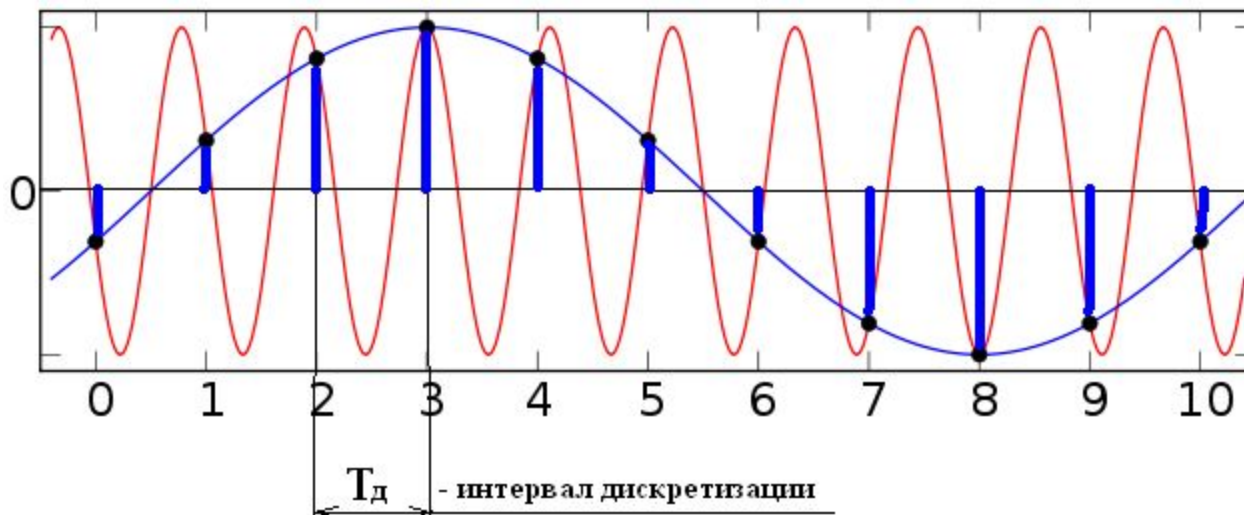
Спектр дискретизированного сигнала при правильном выборе интервала дискретизации





Эффект наложения при дискретизации - элайзинг (алиасинг)

Алиасинг — одна из главных проблем при [аналого-цифровом преобразовании видео](#)- и [аудиосигналов](#). Неправильная дискретизация аналогового сигнала приводит к тому, что [высокочастотные](#) его составляющие накладываются на низкочастотные, в результате чего [восстановление сигнала](#) во времени приводит к его искажениям. Для предотвращения этого эффекта [частота дискретизации](#) должна быть достаточно высокой и сигнал должен быть надлежащим образом [отфильтрован](#) перед оцифровкой.



Аналоговый
сигнал

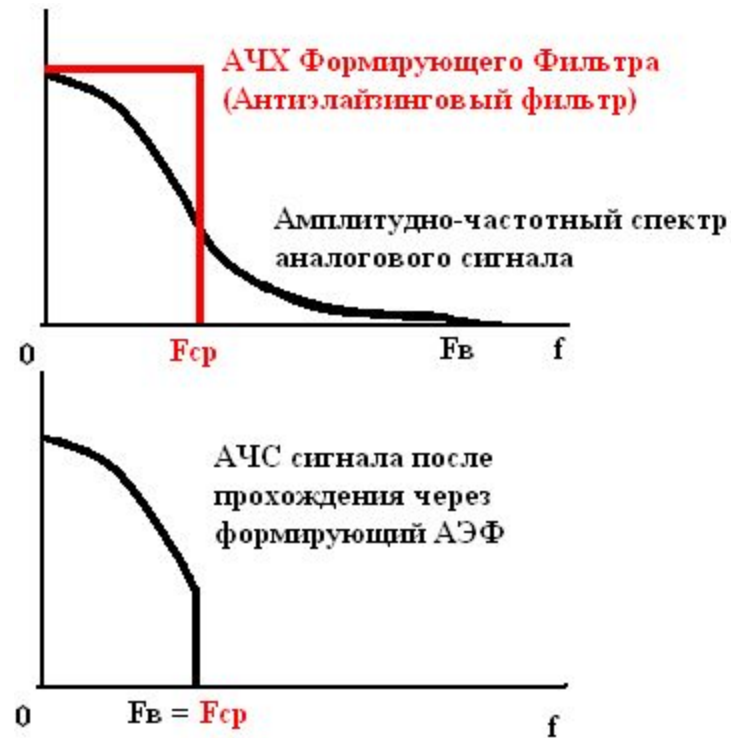
Антиэлайзингов
ый
фильтр

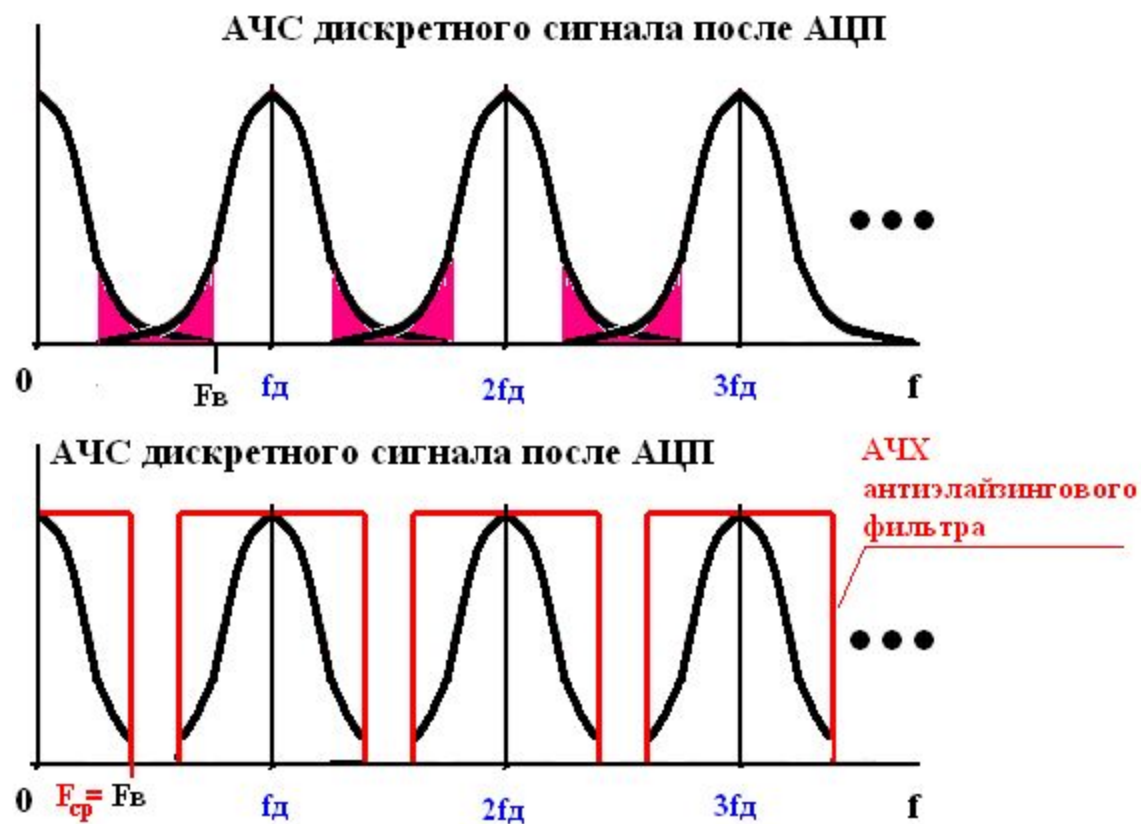
АЦП

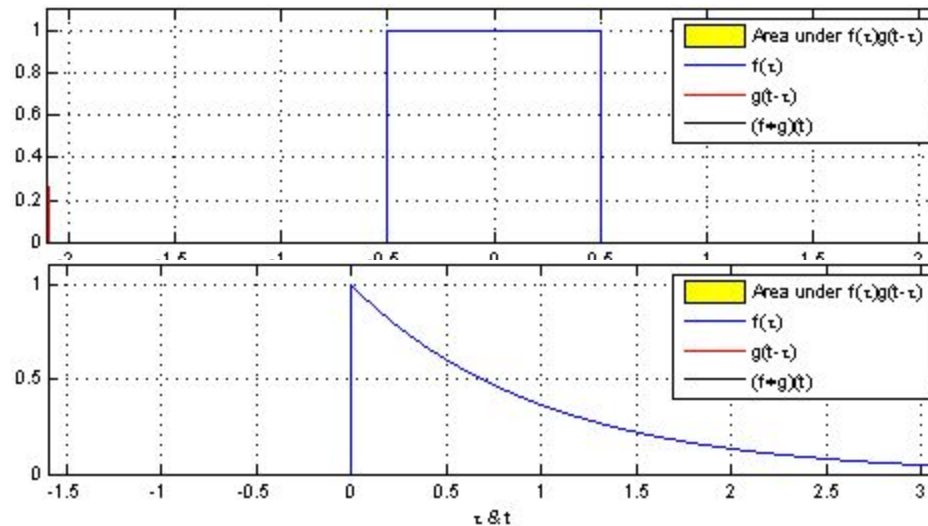
Цифровой
сигнал

Импульсы
дискретизации

Назначение формирующего АЭФ







Линейная Дискретная свертка (свертка дискретных сигналов)
Длина первого N отсчетов, длина второго M отсчетов

$$s(n) = a * b = \sum_{m=0}^n a(m) \cdot b(n-m), \quad n=0..N+M-2.$$

Круговая (циклическая) Дискретная свертка

Обе последовательности имеют одинаковую длину N отсчетов

Чтобы выровнять длину последовательностей их дополняют нулями до длины M+N-1.

$$s(n) = \sum_{m=0}^{N-1} a(m) \cdot b(n-m), \quad n=0..N-1.$$

$$b(-m) = b(N-m)$$

$a(m)$	2	1	3	-1
$b(0-m)$	2	1	-1	$s(0)=2 \cdot (-1)=-2$
$b(1-m)$	2	1	-1	$s(1)=2-1=1$
$b(2-m)$	2	1	-1	$s(2)=2 \cdot 2+1-3=2$
$b(3-m)$	2	1	-1	$s(3)=2+3+1=6$
$b(4-m)$	2	1	-1	$s(4)=2 \cdot 3-1=5$
$b(5-m)$	2	1	-1	$s(5)=-2$

Линейная свертка

Циклическая свертка

$$a(n)=[2,1,3,-1]$$

2	1	3	-1
---	---	---	----

$$b(n)=[-1,3,2,1]$$

-1	3	2	1
----	---	---	---

1	2	3	-1
---	---	---	----

$a(m)$	2	1	3	-1	2	1	3	-1	2	1	3	-1	
$b(0-m)$	-1	1	2	3	-1	1	2	3	-1	1	2	3	$s(0)$
$b(1-m)$	3	-1	1	2	3	-1	1	2	3	-1	1	2	$s(1)$
$b(2-m)$	2	3	-1	1	2	3	-1	1	2	3	-1	1	$s(2)$
$b(3-m)$	1	2	3	-1	1	2	3	-1	1	2	3	-1	$s(3)$

Вычисление Линейной свертки с помощью циклической свертки

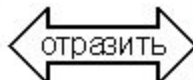
Линейная свертка = дополнить сигналы нулями и сделать циклическую свертку

$$a(n) = [2, 1, 3, -1, 0, 0]$$

2	1	3	-1	0	0
---	---	---	----	---	---

$$b(n) = [-1, 1, 2, 0, 0, 0]$$

-1	1	2	0	0	0
----	---	---	---	---	---



0	0	0	2	1	-1
---	---	---	---	---	----

$a(m)$	2	1	3	-1	0	0	
$b(0-m)$	-1	0	0	0	2	1	$s(0) = -2$
$b(1-m)$	1	-1	0	0	0	2	$s(1) = 1$
$b(2-m)$	2	1	-1	0	0	0	$s(2) = 2$
$b(3-m)$	0	2	1	-1	0	0	$s(3) = 6$
$b(4-m)$	0	0	2	1	-1	0	$s(4) = 5$
$b(5-m)$	0	0	0	2	1	-1	$s(5) = -2$

Дискретное преобразование Фурье

$$S(k) = \sum_{n=0}^{N-1} s(n) \cdot W_N^{n \cdot k}, \quad k=0..N-1,$$

$$W_N^{n \cdot k} = \exp\left(-j \cdot \frac{2 \cdot \pi}{N} \cdot n \cdot k\right). \quad W_N^{n \cdot k} = W_N^{(n-m+m) \cdot k} = W_N^{(n-m) \cdot k} \cdot W_N^{m \cdot k}$$

Аналогично можно поступить и при расчете линейной свертки через циклическую. Рассмотрим пример. Пусть $N=4000$, а $M=3000$. Прямое вычисление линейной свертки потребует $N \cdot M = 12000000$ (12 миллионов) операций умножения и сложения. Дополним каждую из последовательностей до 8192 отсчетов нулями и применим [алгоритм БПФ с прореживанием по времени](#), тогда на вычисление одного БПФ потребуется $3 \cdot 428000 = 1284000$ операций комплексного умножения или 428000 операций действительного умножения. Таких блоков БПФ будет всего 3 штуки, плюс надо учесть 8192 комплексных умножений спектров, итого $3 \cdot 428000 + 8192 \cdot 4 \approx 1610000$, что почти в 7.5 раз ниже чем если бы мы считали линейную свертку в лоб

Циклическая свертка может быть выполнена через ДПФ (БПФ) гораздо быстрее

