Факультет фундаментальной подготовки

Кафедра теоретических основ связи и радиотехники (ТОС и Р)

располагается на 6-м этаже

В аудиториях №607, №609, №611, 613.

Дисциплина

Общая теория связи

Лектор:

Заведующий кафедрой

Шумаков Павел Петрович

Лекция № 3

Векторные и спектральные модели сигналов в инфотелекоммуникации

Учебные вопросы:

1. Векторные модели сигналов. Обобщенный ряд Фурье.
2. Спектры периодических сигналов.
3. Спектры непериодических сигналов.
4. Теоремы о спектрах.

Литература:

Стр. 28..37; 37..40; 40..52

Используя MathCAD расчитать и построить энергетические спектры для импульсных сигналов из таблицы 2.1 на стр 45. Четные номера : треугольный (2) и косинусоидальный (3). Нечетные номера : Прямоугольный (1) и SINC-образный (5).

Используя MathCAD рассчитать и построить энергетические спектры для импульсных сигналов вида:
Четные номера : пилообразный возрастающий.
Нечетные номера : пилообразный нисдающий.

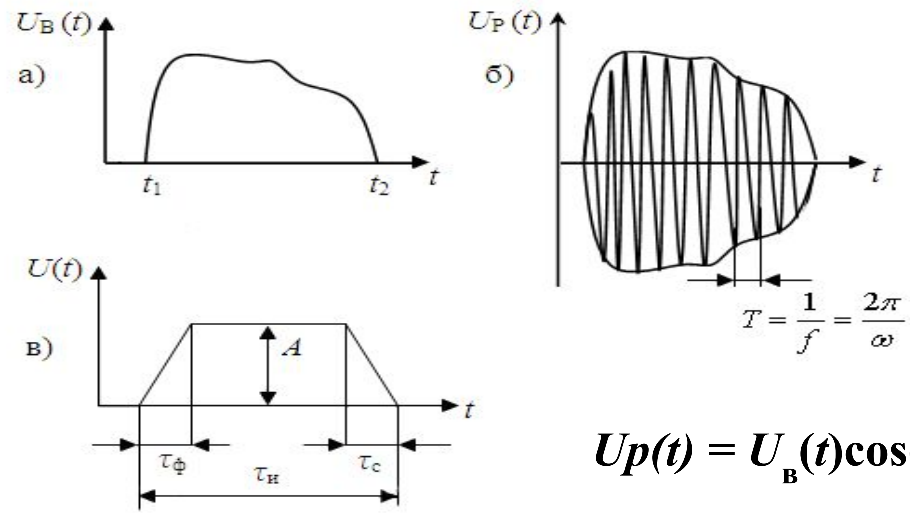
Задание на самостоятельную отработку

Теория электрической связи :учебное пособие для студентоввысших учебных заведений

/Биккенин Р. Р., Чесноков М. Н. –М.:Издательский центр «Академия», 2010.

-28-37;37-40;40-52 с.

Импульсные сигналы: а) *видеоимпульсы*; б) *радиоимпульсы*



$$Up(t) = U_в(t)\cos(\omega t + \varphi)$$

$U_в(t)$ — **огибающая радиоимпульса**

ω — опорная (несущая) частота

φ — фаза

Вопрос №1. Векторное представление сигнала. Понятие базиса, нормы, скалярного произведения сигналов, ортогональности сигналов, ортонормированного базиса сигналов.

Сигналы могут быть *одномерными* $U_1(t)$, и *многомерными* $\{U_N(t)\}$,

***Многомерный (векторный)*) - сигнал образованный упорядоченным множеством одномерных сигналов $V(t) = \{U_1(t), U_2(t), \ldots, U_N(t)\}$,**

N — размерность сигнала.

Пространство сигналов

Множество сигналов **M={s_1(t), s_2(t),…s_n(t)}** обладающих определенными свойствами называется **пространством** сигналов. Структура пространства сигналов определяется алгебраическими и геометрическими свойствами.

Алгебраическая структура пространства сигналов

Множество сигналов образует **Вещественное Линейное Пространство Сигналов L** если справедливы следующие аксиомы:

1.Все сигналы при любом времени **t** принимают только вещественные значения.

2.Сумма любого числа сигналов данного множества также принадлежит этому множеству, при чем эта сумма подчиняется свойствам: для $x = Si(t)$ $y = Sj(t)$

- ✔ $x + y = y + x$ — коммутативность;
- ✔ $x + (y + z) = (x + y) + z$ — ассоциативность;
- ✔ $x + \varnothing = x$, где $\varnothing$ — нулевой элемент;
- ✔ $x + (-x) = 0$, где $-x$ — противоположный элемент.

3. Умножение сигнала на скаляр (число) **α** определяет новый сигнал принадлежащий исходному множеству $\alpha s_i(t) \in M$.

4. Операция умножения на скаляр подчиняется свойствам:

- $\alpha(bx) = (\alpha b)x$
- $1x = x$
- $(\alpha + b)x = \alpha x + bx$
- $\alpha(x + y) = \alpha x + \alpha y$

- **Если α** будет произвольным **комплексным** числом, то множество сигналов образует
- **Комплексное Линейное Пространство Сигналов C.**
- Элементы структурированного пространства в математике называются точками, функциями, **векторами.**

Геометрическая структура пространства сигналов

Норма сигнала .

Эквивалентом длины вектора для аналоговых и дискретных сигналов является ***норма***

Для вещественного сигнала норма определяется :
$$\|s(t)\| = \sqrt{\int_T s^2(t)dt}$$

Для комплексного сигнала норма определяется :
$$\|s(t)\| = \sqrt{\int_T s(t)s^*(t)dt}$$

Норма подчиняется следующим аксиомам:

$$\|s(t)\| \geq 0 \qquad \|\alpha \cdot s(t)\| = \|\alpha\| \cdot \|s(t)\| \qquad \|s_1(t) + s_2(t)\| \leq \|s_1(t)\| + \|s_2(t)\|$$

Если ***S*** — это вектор, то норма – это его длина или расстояние от конца вектора до начала координат.

Энергия сигнала

Пусть **s**(***t***) — напряжение на резисторе с сопротивлением в 1 Ом, тогда $s^2(t)$ — мгновенная мощность, а квадрат нормы — есть энергия, выделяемая на резисторе за время ***T***.

$$\|s(t)\|^2 = \int_T s^2(t)dt = E_s$$

Геометрическая структура пространства сигналов

Метрика пространства сигналов

Для усовершенствовании структуры пространства вводится ***расстояние*** между его элементами, которое называют также ***метрикой***.

Каждой паре элементов пространства ставится в соответствие положительное число, которое трактуется как расстояние между элементами. В качестве расстояния используется функционал $d(x,y) = R$, называемый ***метрикой*** и обладающий следующими свойствами:

- $d(x,y) \geq 0$ **и** $d(x,y) = 0$, только если $x = y$;
- $d(x,y) = d(y,x)$ – свойство симметрии;
- $d(x,y) < d(x,z) + d(z,y)$ – неравенство треугольника.

В качестве метрики можно выбрать величину

$$d(x,y) = \|x - y\|$$

Линейное метрическое пространство с квадратичной нормой обозначается:

Вещественное $\mathbf{L_2}$ **комплексное** $\mathbf{C_2}$

Геометрическая структура пространства сигналов

Скалярное произведение сигналов

Найдем энергию суммы двух сигналов u(t) и v(t).

$$\|u(t)+v(t)\|^2=\int_T u(t)^2dt+\int_T v(t)^2dt+2\int_T u(t)v^*(t)dt$$

Если сигналы рассматривать как вектора **U** и **V** получим

$$|U+V|^2=|U|^2+|V|^2+2\cdot|U|\cdot|V|cos(\varphi)$$

Где $(U,V)=|U|\cdot|V|cos(\varphi)$ скалярное произведение двух векторов

$\varphi=\angle UV$ угол между векторами

Сопоставляя сигналы с векторами в пространстве L_2 получим что скалярное произведение двух сигналов

$$(u(t),v(t))=\int_T u(t)v^*(t)dt=\|u(t)\|\cdot\|v(t)\|\cdot cos(\varphi)$$

Свойства скалярного произведения сигналов

Для комплексных сигналов скалярное произведение должно удовлетворять следующим условиям:

$(x, y) = (y, x)^*$, где знак * означает комплексно сопряженную величину;

$(\alpha x, y) = \alpha(x, y);$

$(x_1 + x_2, y) = (x_1, y) + (x_2, y);$

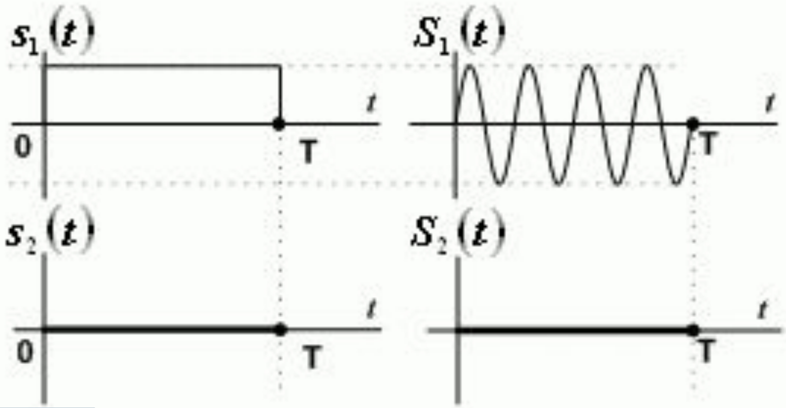
$(x, x) \geq 0.$

Ортогональность двух сигналов

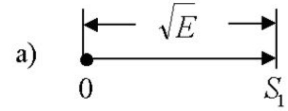
Если $\varphi = \angle UV = 90\left[\text{ãðàäóñî â}\right] = {}^{\pi}\!/_{2}\left[\text{ðàäèàí}\right]$

$$\cos({}^{\pi}\!/_{2}) = 0$$

то скалярное произведение двух сигналов равно нулю , значит взаимная энергия этих сигналов равна нулю , а такие сигналы - ***ортогональные.***



Сигналы с пассивной паузой

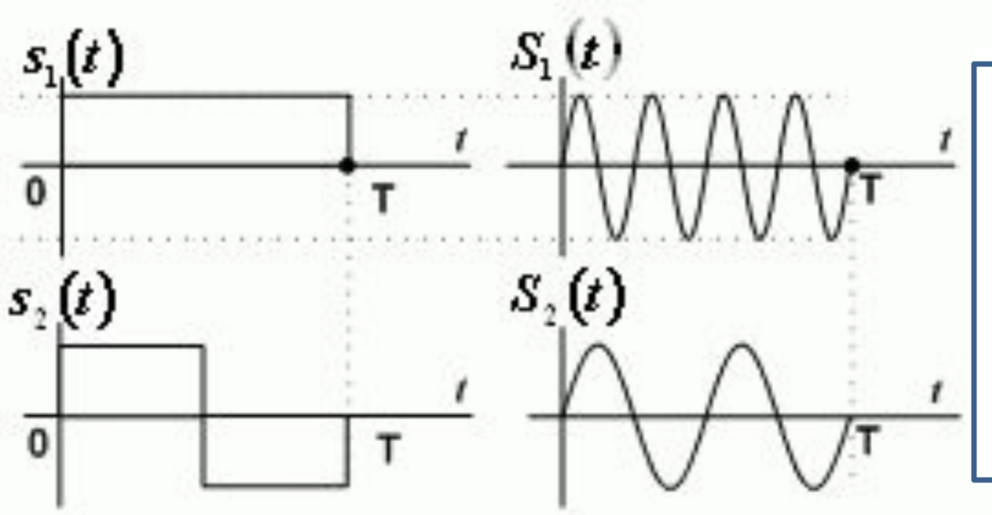


Если $S_2(t) = 0$ *то имеем* **систему передачи с пассивной паузой**

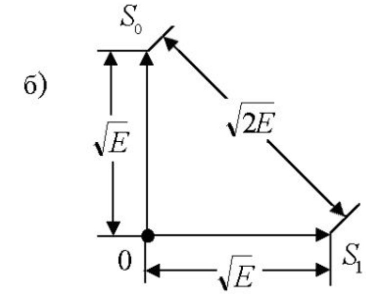
$S_1(t) = U_c \sin(\omega_0 t + \varphi)$, $t \in [0,T]$, $S_1(t) = 0$

$$(S_0, S_1) = \frac{1}{T}\int_0^T S_0(t) S_1(t)\,dt = 0$$

$$d^2(S_0(t), S_1(t)) = \int_0^T S_0{}^2(t)\,dt = E_1$$



Ортогональные сигналы



$S_1(t) = U_c \cos(\omega_1 t + \phi_1)$, $t \in [0,T]$, $S_2(t) = U_c \cos(\omega_2 t + \phi_2)$.

Пусть $\omega_1 = 2\pi k_1/T$, $\omega_2 = 2\pi k_2/T$, где k_1 и k_2 — целые числа, ϕ_1 и ϕ_2 принимают любые значения. Тогда:

$$(S_1, S_2) = \frac{1}{T}\int_0^T S_1(t)S_2(t)dt = \frac{1}{T}U_1 \cdot U_2 \int_0^T cos(\frac{2\pi}{T}k_1 t + \varphi_1) \cdot cos(\frac{2\pi}{T}k_2 t + \varphi_2)dt = 0$$

$$d^2(S_1(t), S_2(t)) = \int_0^T [S_1(t) - S_2(t)]^2 dt = \int_0^T S_1^2(t)dt + \int_0^T S_2^2(t)dt - 2\int_0^T S_1(t)S_2(t)dt = E_0 + E_1 = 2E,$$

Базисные сигналы

В линейном пространстве сигналов можно определить совокупность **линейно независимых** сигналов $\{e_i(t)\}$ таких, что весовая сумма $\sum \alpha_i e_i = 0$ возможна только при одновременном равенстве нулю всех коэффициентов α. Эти сигналы называются **координатным базисом**. **Базисные сигналы попарно ортогональные.**

Обобщенный ряд Фурье

Если выбраны сигналы координатного базиса, то любой сигнал **s(t)** в линейном пространстве может быть представлен **взвешенной суммой ортогональных сигналов координатного базиса**

$$\sum C_i e_i(t) = s(t)$$

Такое представление сигнала называется обобщенный ряд Фурье.

Французский математик Жан Батист Жозеф Фурье (1768-1830

Весовые коэффициенты этого ряда рассчитываются как скалярное произведение сигнала s(t) и соответствующего *i*- того базисного сигнала ei(t):

$$C_i = (s(t), e_i(t)) = \frac{1}{\|e_i\|^2} \int_T s(t) e_i^*(t) dt = \|s(t)\| \cdot \|e_i(t)\| \cdot \cos(\varphi) = \|s(t)\| \cdot \cos(\varphi)$$

Совокупность коэффициентов обобщенного ряда Фурье **{Ci}** называется **спектром** сигнала **s(t)** в базисе ортогональных сигналов $\{e_i(t)\}$

Выводы по первому вопросу

1.Сигналы в радиотехнике рассматриваются как проявления электромагнитного поля в элементах радиотехнических цепей в виде колебаний напряжения или тока.

2.Обобщенной математической моделью сигналов является их описание как элементов функционального пространства (векторов).

3.Вещественные и комплексные сигналы можно рассматривать как элементы множества векторного линейного нормированного метрического пространства.

4.Скалярное произведение двух сигналов по физическому смыслу представляет собой взаимную энергию между двумя сигналами , действующими суммарно на сопротивление в один Ом.

5.Скалярное произведение двух сигналов определяется углом между ними. Если угол между двумя сигналами равен 90 градусов то скалярное произведение равно нулю, и такие сигналы являются ортогональными.

6. Набор ортогональных сигналов называется координатным базисом пространства сигналов.

7. При известном базисе , любой сигнал можно представить взвешенной суммой сигналов ортогонального базиса в виде обобщенного ряда Фурье. Весовые коэффициенты этого ряда называются спектром сигнала.

Вопрос 2. Спектры периодических сигналов.

- Периодическим называют сигнал, мгновенные значения которого повторяются через равные промежутки времени – ***T***
- Модель такого сигнала имеет вид $$s(t) = s(t + k \cdot T),$$

  где **T**- период повторения, а **F=1/T-**частота повторения периодического сигнала (ПС)
- Основной математический аппарат спектрального анализа таких сигналов –**<u>ряд Фурье в базисе гармонических сигналов с кратными частотами.</u>**

Формы спектрального представления периодического сигнала

Квадратурная

$$s(t + k \cdot T) = s_T(t) = \frac{a_0}{2} + \sum_{k=1}^{\infty} \left\{ a_k \cos(\frac{2\pi}{T}kt) + b_k \sin(\frac{2\pi}{T}kt) \right\}$$

$$a_k = \frac{2}{T} \int_{-T/2}^{+T/2} S(t) \cos(\frac{2\pi}{T}kt)dt - \text{àì ïëèò óäà ñèí ô àçí û õ ãàðì î í èê}$$

$$b_k = \frac{2}{T} \int_{-T/2}^{+T/2} S(t) \sin(\frac{2\pi}{T}kt)dt - \text{àì ïëèò óäà êâàäðàò óðí û õ ãàðì î í èê}$$

$$a_0 = \frac{2}{T} \int_{-T/2}^{+T/2} S(t)dt - \text{ïî ñò î ÿí í àÿ ñî ñò àâëÿþ ù àÿ}$$

Амплитудно – фазовая форма ряда Фурье

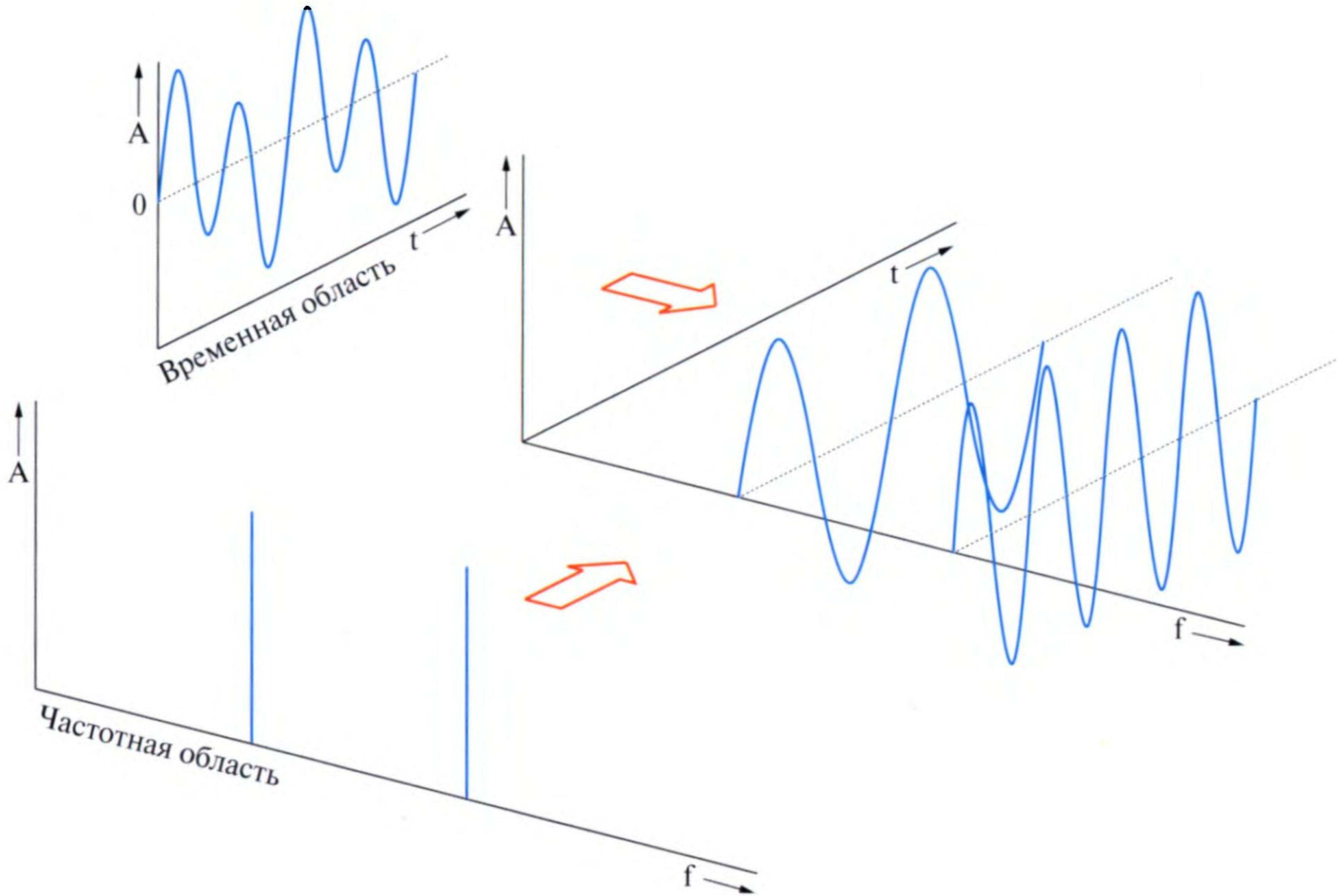
$$s_T(t) = s(t - k \cdot T) = \frac{a_0}{2} + \sum_{k=1}^{\infty} A_k \cos(x_k - \varphi_k)$$

$$a_k \cos x_k + b_k \sin x_k = \sqrt{a_k{}^2 + b_k{}^2} \cos(x_k - \varphi_k)$$

$$x_k = \frac{2\pi}{T} kt = k 2\pi f_1 t = k\omega_1 t = \omega_k t;$$

$$\sqrt{a_k{}^2 + b_k{}^2} = A_k - \quad \grave{A} \times \tilde{N} \qquad \varphi_k = arctg \frac{b_k}{a_k} - \quad \hat{O} \times \tilde{N}$$

$$a_k = A_k \cos(\varphi_k) \qquad b_k = -A_k \sin(\varphi_k)$$



Сигналы, наблюдаемые во временной и частотной областях

Комплексная форма ряда Фурье

$$\cos x = \frac{e^{jx} + e^{-jx}}{2} \qquad \sin x = \frac{e^{jx} - e^{-jx}}{j2}$$

$$s(t + k \cdot T) = \frac{a_0}{2} + \sum_{k=1}^{\infty} \left[\frac{a_k}{2} \left(e^{j\frac{2\pi}{T}t} + e^{-j\frac{2\pi}{T}t} \right) + \frac{b_k}{j2} \left(e^{j\frac{2\pi}{T}t} - e^{-j\frac{2\pi}{T}t} \right) \right] =$$

$$= \frac{a_0}{2} + \sum_{k=1}^{\infty} \frac{1}{2} (a_k - jb_k) e^{j\frac{2\pi}{T}t} + \sum_{k=1}^{\infty} \frac{1}{2} (a_k + jb_k) e^{-j\frac{2\pi}{T}t}$$

$$s(t + k \cdot T) = \frac{a_0}{2} + \sum_{k=1}^{\infty} \frac{1}{2} A_k e^{-j\varphi_k} e^{j\frac{2\pi}{T}kt} + \sum_{k=1}^{\infty} \frac{1}{2} A_k e^{j\varphi_k} e^{-j\frac{2\pi}{T}kt} = \sum_{k=-\infty}^{\infty} \dot{C}_k e^{j\frac{2\pi}{T}kt}$$

Комплексная форма ряда Фурье

$$\dot{C}_k = \frac{A_k}{2} e^{j\varphi_k} = \frac{1}{T} \int\limits_{-T/2}^{+T/2} S(t) e^{-j\frac{2\pi}{T}kt} dt$$

$$\dot{A}_k = a_k - jb_k, \quad \dot{A}_{-k} = a_k + jb_k$$

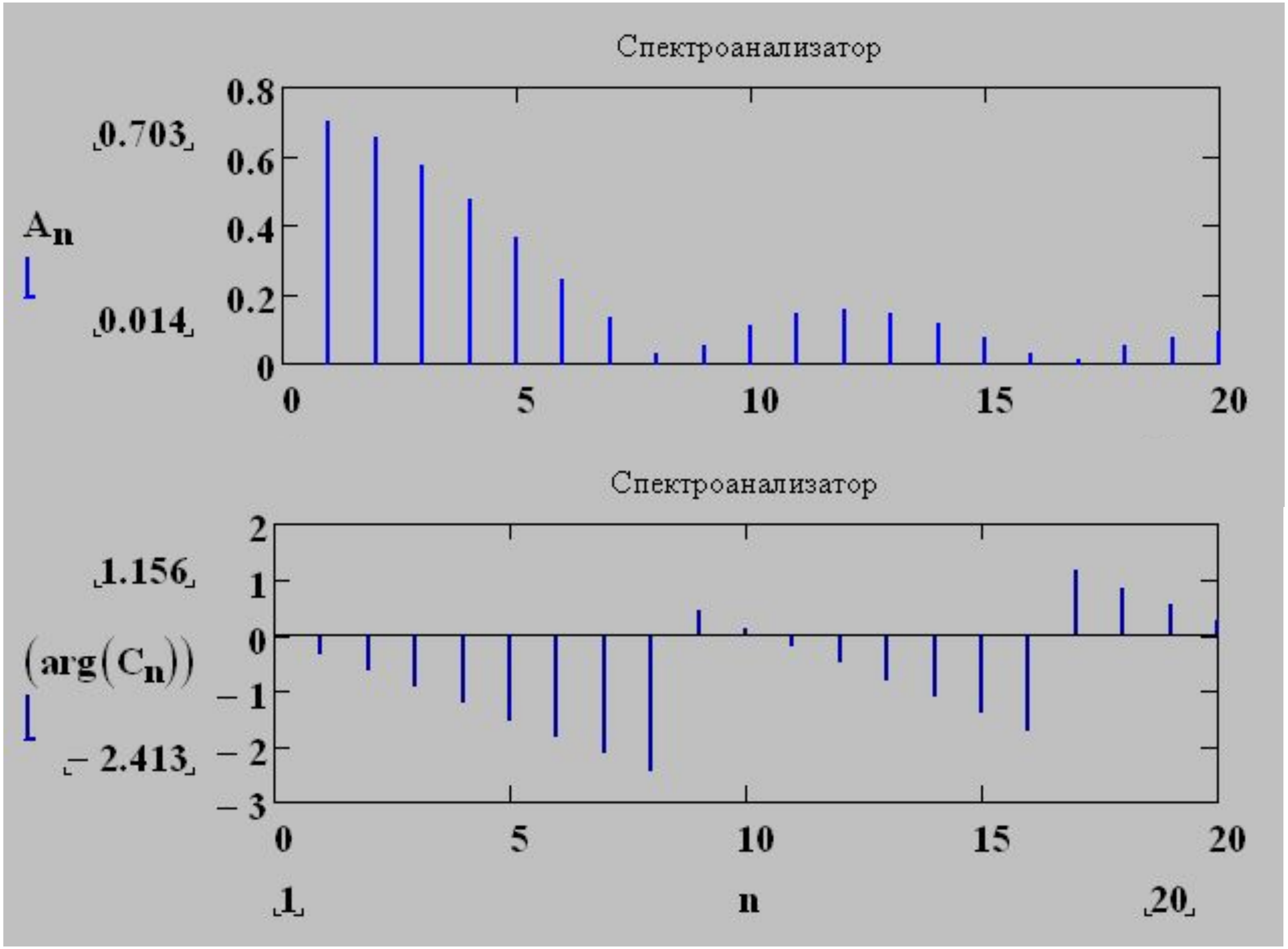
$$a_k = \frac{1}{2}\left(\dot{A}_k + \dot{A}_{-k}\right) \qquad b_k = j\frac{1}{2}\left(\dot{A}_k + \dot{A}_{-k}\right)$$

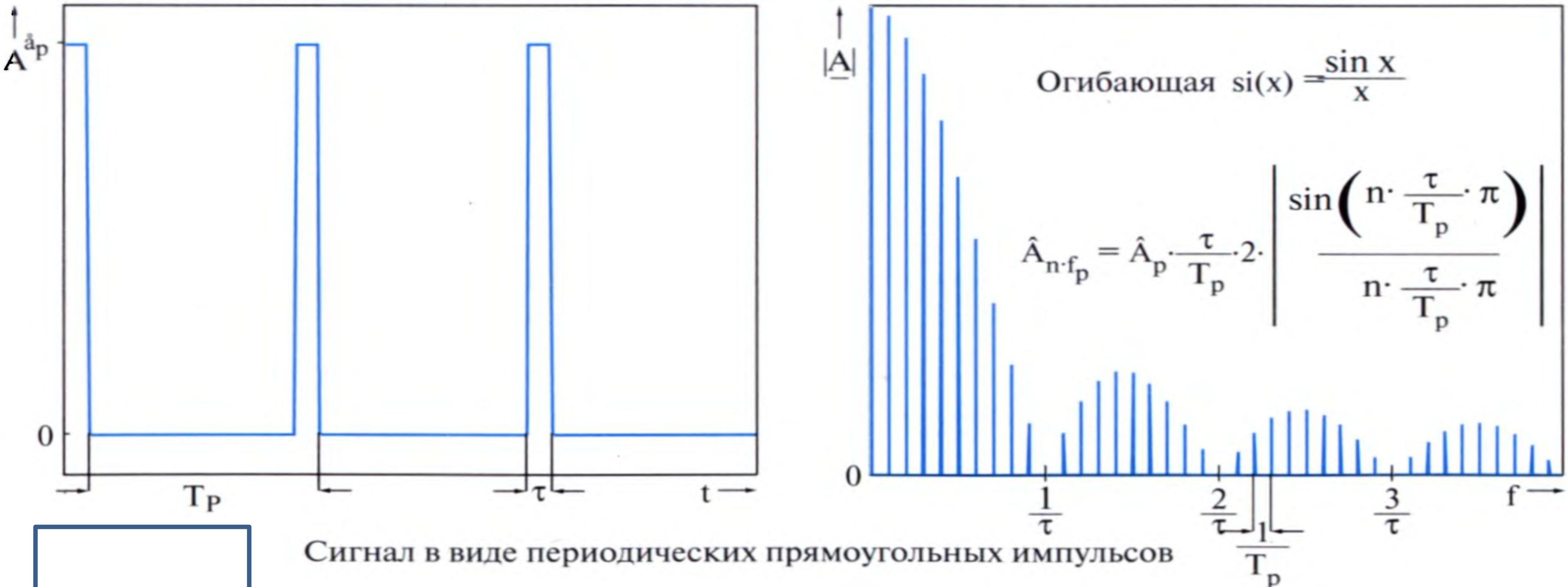
ì î äóëü $\left|\dot{C}_k\right| = \frac{A_k}{2}$ – À×Ñ

àðãóì åí ò $\varphi_k = \arg \dot{C}_k$ – Ô×Ñ

АЧС –четная функция частоты (обладает симметрией в области положительных и отрицательных частот)

ФЧС – нечетная функция (обладает центральной симметрией)


Спектроанализатор
0.8
0.703
0.6
A_n
0.4
0.2
0.014
0
0
5
10
15
20
Спектроанализатор
2
1.156
1
0
$(\arg(C_n))$
−1
−2.413
−2
−3
0
5
10
15
20
1
n
20



Сигнал в виде периодических прямоугольных импульсов

Периодические сигналы во временной и частотной областях (спектр амплитуд)

Вопрос 3. Спектры непериодических сигналов.

В подавляющем большинстве случаев в теории и технике связи приходится иметь дело с сигналами, которые по существу являются непериодическими. К таким сигналам аппарат рядов Фурье не применим.

Модель непериодического сигнала как предельного случая периодического сигнала , когда период стремится к бесконечности

Устремим в периодическом сигнале $T \to \infty$ или $f_1 = 1/T = \omega_1/2\pi \to 0$

$$s(t) = \frac{1}{2\pi}\sum_{k=-\infty}^{\infty}\dot{A}_k T e^{jk\omega_1 t}\Delta\omega$$

где $\Delta\omega = \omega_1 = [k\omega_1 - (k-1)\omega_1]$ — разность между частотами соседних гармоник

$$S(j\omega) = \lim_{T\to\infty}\dot{A}_k T = \lim_{\Delta\omega\to 0}\frac{\dot{A}_k}{\Delta\omega}2\pi -$$ ñïåêòðàëüíàÿ ïëîòíîñòü ñèãíàëà

Вопрос 3. Спектры непериодических сигналов.

В подавляющем большинстве случаев в теории и технике связи приходится иметь дело с сигналами, которые по существу являются непериодическими. К таким сигналам аппарат рядов Фурье не применим.

Модель непериодического сигнала как предельного случая периодического сигнала , когда период стремится к бесконечности

Устремим в периодическом сигнале $T \to \infty$ или $f_1 = 1/T = \omega_1/2\pi \to 0$

$$s(t) = \frac{1}{2\pi} \sum_{k=-\infty}^{\infty} \dot{A}_k T e^{jk\omega_1 t} \Delta\omega$$

где $\Delta\omega = \omega_1 = [k\omega_1 - (k-1)\omega_1]$ — разность между частотами соседних гармоник

$$S(j\omega) = \lim_{T\to\infty} \dot{A}_k T = \lim_{\Delta\omega\to 0} \frac{\dot{A}_k}{\Delta\omega} 2\pi - \text{ñï åêò ðàëüí àÿ ï ëî ò í î ñò ü ñèãí àëà}$$

Прямое и обратное преобразование Фурье

$$s(t) = \frac{1}{2\pi}\int_{-\infty}^{\infty} S(j\omega)e^{j\omega t}d\omega \quad \text{- Î Ï Ô}$$

$$s(t) \leftrightarrow \dot{S}(j\omega)$$

$$S(j\omega) = \int_{-\infty}^{\infty} s(t)e^{-j\omega t}dt \quad \text{- Ï Ï Ô}$$

Обратное преобразование Фурье **для сигнала *s(t)* -** ***операция синтеза*****, поскольку с ее помощью сигнал восстанавливается (синтезируется) из спектральных составляющих.**

Прямое преобразование Фурье – ***операция анализа*** **сигнала на основе определения его спектральных составляющих.**

Физический смысл спектральной плотности сигнала

Учитывая чётность модуля $S(\omega)$ и нечётность фазы $\varphi(\omega)$, обратное преобразование Фурье можно записать следующим образом

$$s(t) = \frac{1}{\pi}\int_0^\infty |S(j\omega)|\cos[\omega t + \varphi(\omega)]d\omega$$

$$\frac{1}{2\pi} S(j\omega)d\omega e^{j\omega t} \qquad \frac{1}{\pi} S(\omega)d\omega \cos[\omega t + \varphi(\omega)]$$

$$|S(j\omega)| = \frac{1}{c}\frac{A_m}{d\omega} \qquad \frac{1}{c} = \pi$$

Спектральная плотность сигнала является комплексной амплитудой эквивалентной гармоники на соответствующей опорной частоте .

Эквивалентная гармоника есть результат когерентного сложения бесконечно большого числа гармоник с бесконечно малыми амплитудами расположенными в бесконечно малом по частоте диапазоне в районе выбранной (опорной) частоты.

Вопрос 4. Свойства преобразования Фурье

№ п/п	Название теоремы	Временное представление	Спектральное представление
1	Теорема сложения	$S(t)=S_1(t)+S_2(t)$	$S(j\omega)=S_1(j\omega)+S_2(j\omega)$
2	Теорема временного сдвига	$S_1(t)=S(t\mp t_0)$	$S_1(j\omega)=S(j\omega)e^{\mp j\omega t_0}$
3	Теорема смещения (модуляции)	$S_1(t)=S(t)e^{\pm j\omega_0 t}$	$S_1(j\omega)=S(j(\omega\mp\omega_0))$
4	Теорема об изменении масштаба	$S_1(t)=S\left(\frac{t}{a}\right)$	$S_1(j\omega)=aS(ja\omega)$
5	Теорема о дифференцировании	$S_1(t)=\frac{dS(t)}{dt}$	$S_1(j\omega)=j\omega S(j\omega)$
6	Теорема об интегрировании	$S_1(t)=\int_{-\infty}^{t}S(t)dt$	$S_1(j\omega)=\left(\frac{1}{j\omega}\right)S(j\omega)$
7	Теорема о свёртке	$S(t)=\int_{-\infty}^{\infty}S_1(\tau)S_2(t-\tau)d\tau=S_1(t)*S_2(t)$	$S(j\omega)=S_1(j\omega)S_2(j\omega)$
8	Преобразование Фурье	$\begin{cases} S_1(t)=\frac{1}{2\pi}\int_{-\infty}^{\infty}S(j\omega)e^{j\omega t}d\omega \\ S(j\omega)=\int_{-\infty}^{\infty}S(t)e^{-j\omega t}dt \end{cases}$	

Вопрос 4. Свойства преобразования Фурье

Теорема сложения спектров гласит: спектр суммы колебаний равен сумме спектров слагаемых колебаний.

Теорема временного сдвига (запаздывания) формулируется следующим образом: при сдвиге колебания во времени (изменении начального момента отсчёта времени) спектральная плотность амплитуд сохраняется постоянной, а спектр фаз изменяется на величину, пропорциональную частоте и времени сдвига с учётом его знака.

Теорема смещения (модуляции): умножение колебания *S(t)* на $e^{j\omega_0 t}$ **приводит к смещению его спектра на величину** ω_0**.**

Теорема об изменении масштаба: растяжение колебания во времени (*a*>1) влечёт за собой сжатие его частотного спектра и увеличение спектральной плотности амплитуд. Сжатие колебания во времени (*a*<1) приводит к расширению его частотного спектра и уменьшению спектральной плотности амплитуд.

Теорема о свёртке: свёртка двух колебаний $S_1(t)$ **и** $S_2(t)$ **соответствует перемножению их спектров.**