СПбГУТ им. проф. М.А. Бонч-Бруевича

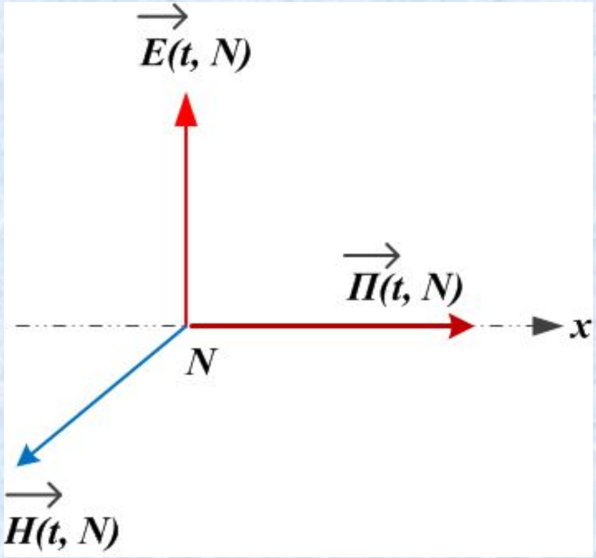
Основы радиоэлектроники и связи

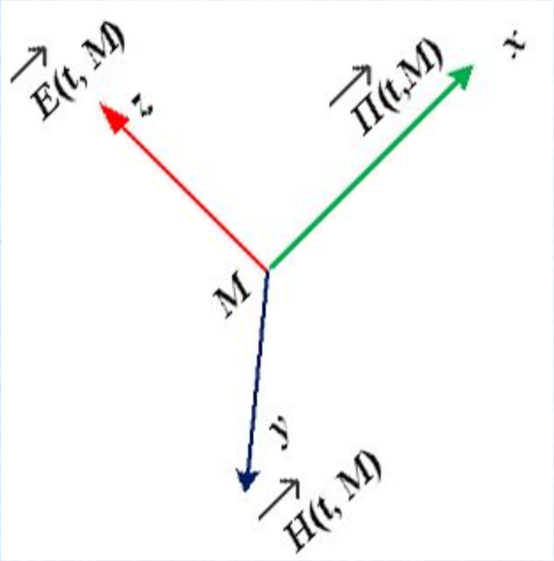
2013 г.

Колебания

Классификация колебаний

Колебание – изменение [во времени и (или) пространстве и т.д.] характеристики физического объекта, например, электромагнитного поля. Колебания определяются математическими соотношениями, в общем случае, с несколькими переменными.

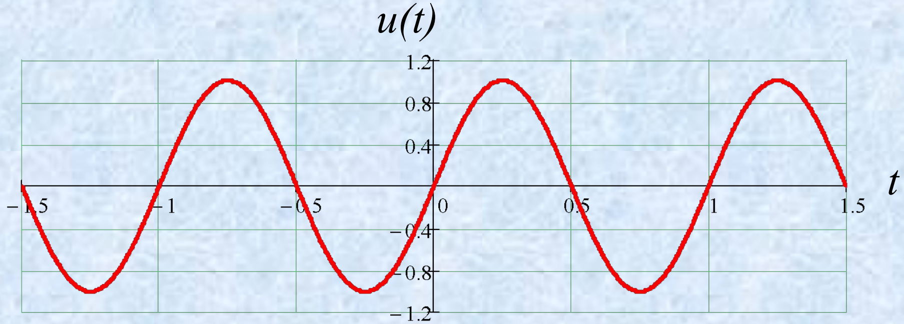




Предсказуемость значения колебания во времени

Детерминированными называют колебания, которые точно определены в любые моменты времени.

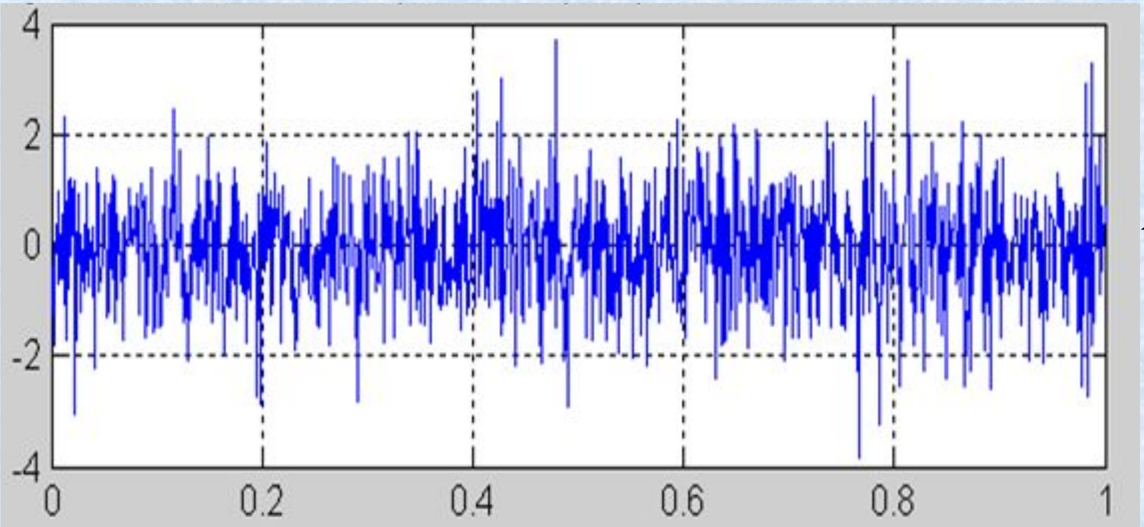
$$u(\mathrm{t}) = U \cdot \cos(\omega \cdot t + \varphi)$$



Предсказуемость значения колебания во времени

Случайными называют колебания, интервал значений которых можно лишь с определенной вероятностью предсказать в заданной момент времени

u(t)



t

Временное окно колебания

Временное окно колебания – интервал времени, внутри которого исследуется колебание.

Это окно может быть больше, равно или меньше временной длительности колебания. В первом случае принято называть колебания ***финитными*** (импульсными).

u(t)

t

Финитное колебание

Периодические колебания

Периодические колебания

Условие периодичности **колебания:**

$$u(t) = u(t + k \cdot T_0), \qquad k = 0, \ \pm 1, \ \pm 2, \ \pm 3, \ ....$$

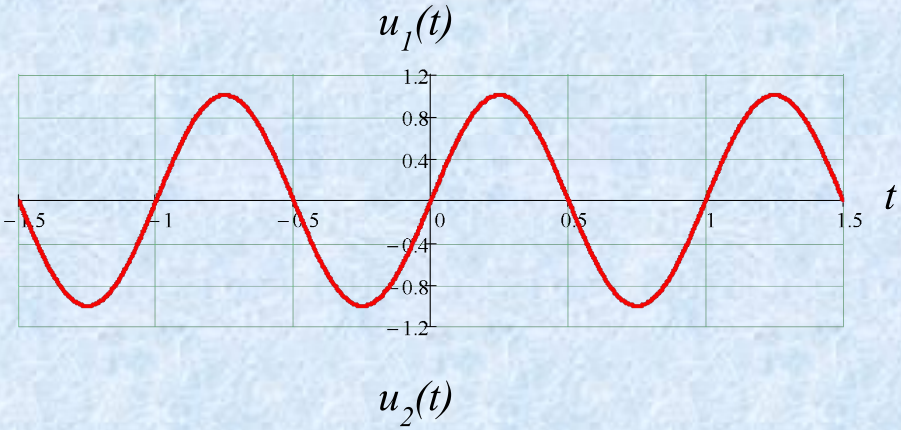
Периодические колебания относятся к детерминированным колебаниям с временным окном -∞ … +∞.

Примеры периодических колебания

$$u_1(t) = U_1 \cdot \cos(\omega_1 \cdot t + \varphi_1);$$

$$U_1 = 1; \quad \omega_1 = \pm\ 2 \cdot \pi; \quad \varphi_1 = -\frac{\pi}{2};$$

$$T_0 = \frac{|\omega_1|}{2 \cdot \pi} = 1;$$

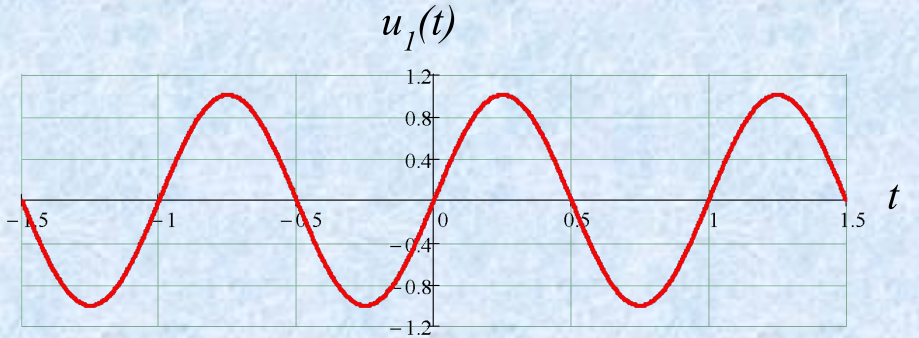


Примеры периодических колебания

$$u_1(t) = U_1 \cdot \cos(\omega_1 \cdot t + \varphi_1);$$

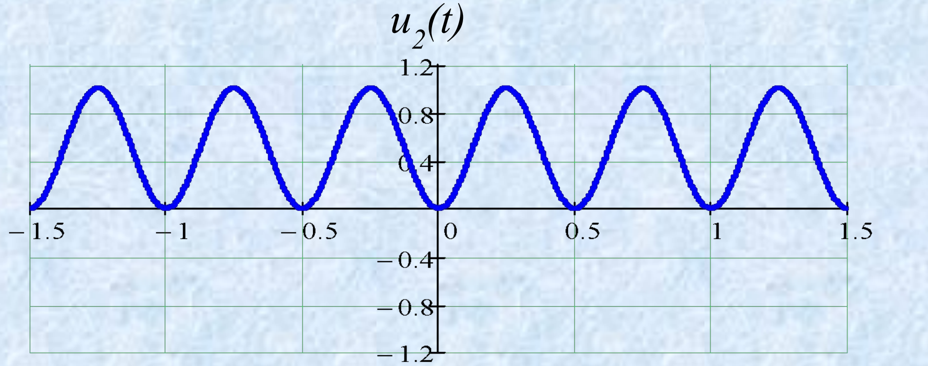
$$U_1 = 1; \quad \omega_1 = \pm\, 2 \cdot \pi; \quad \varphi_1 = -\frac{\pi}{2};$$

$$T_0 = \frac{|\omega_1|}{2 \cdot \pi} = 1;$$



$$u_2(t) = [u_1(t)]^2;$$

$$T_0 = 0{,}5;$$

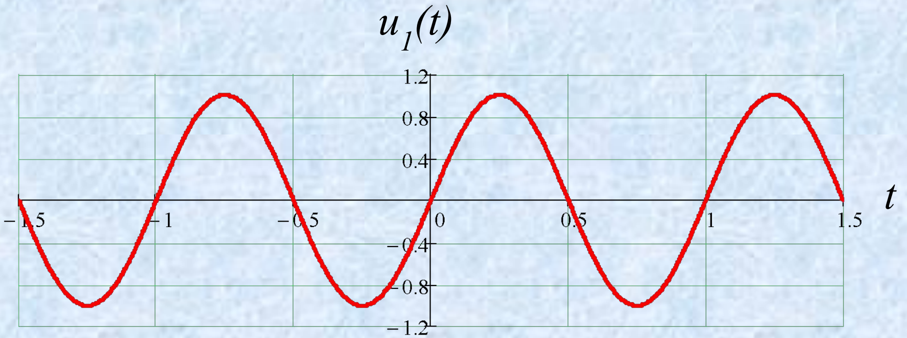


Примеры периодических колебания

$$u_1(t) = U_1 \cdot \cos(\omega_1 \cdot t + \varphi_1);$$

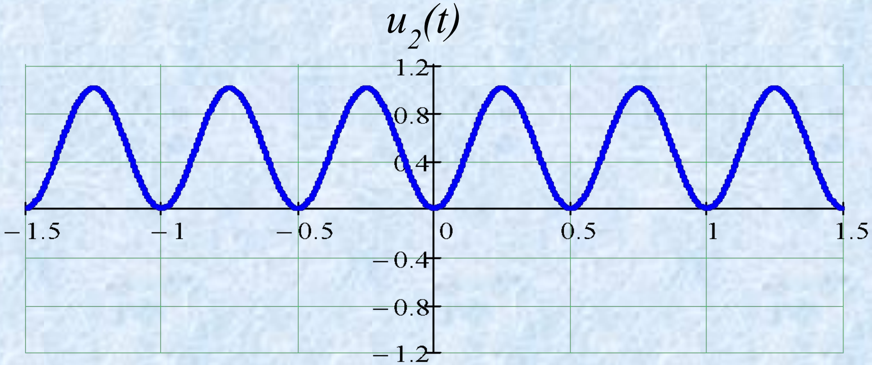
$$U_1 = 1; \quad \omega_1 = \pm\, 2 \cdot \pi; \quad \varphi_1 = -\frac{\pi}{2};$$

$$T_0 = \frac{|\omega_1|}{2 \cdot \pi} = 1;$$



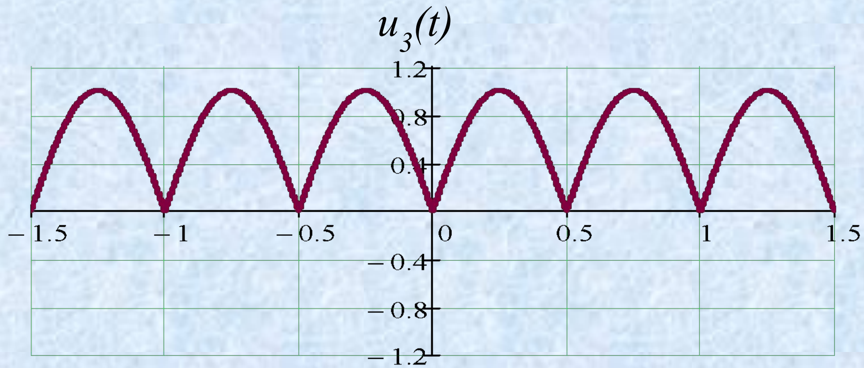
$$u_2(t) = [u_1(t)]^2;$$

$$T_0 = 0,5;$$

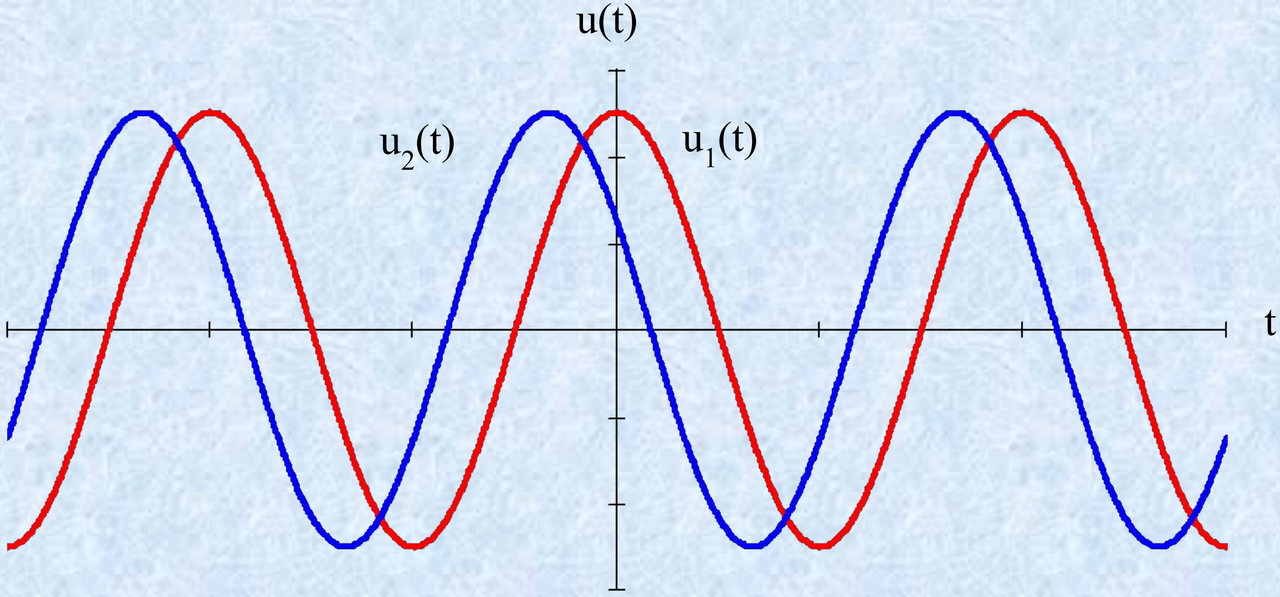


$$u_3(t) = |u_1(t)|;$$

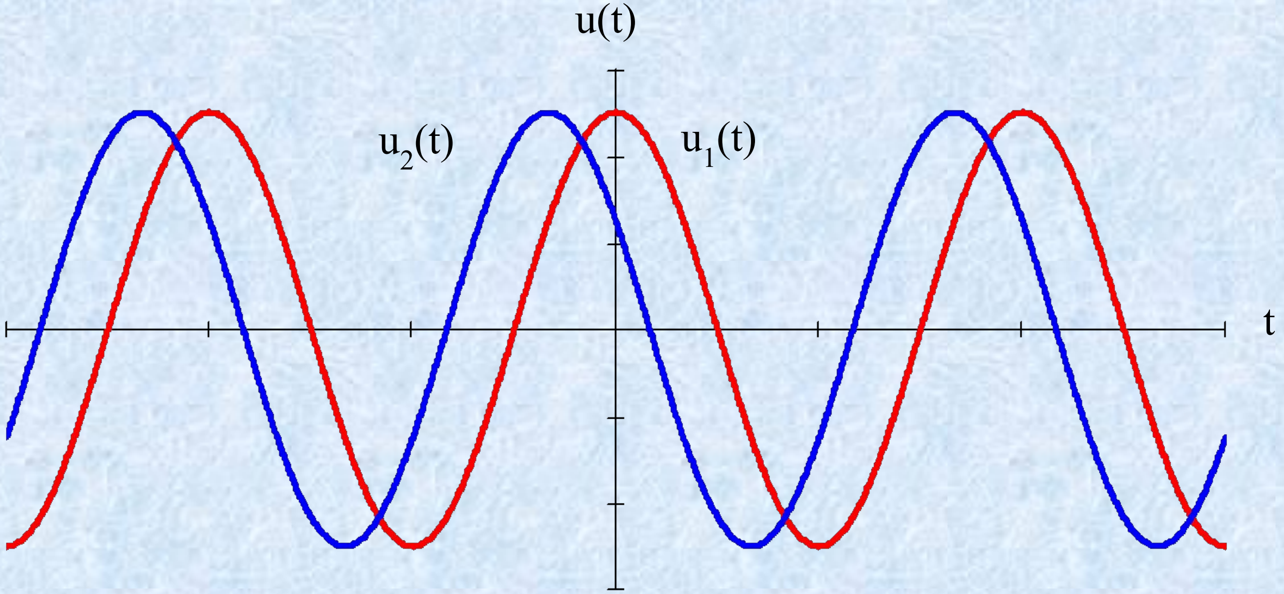
$$T_0 = 0,5;$$



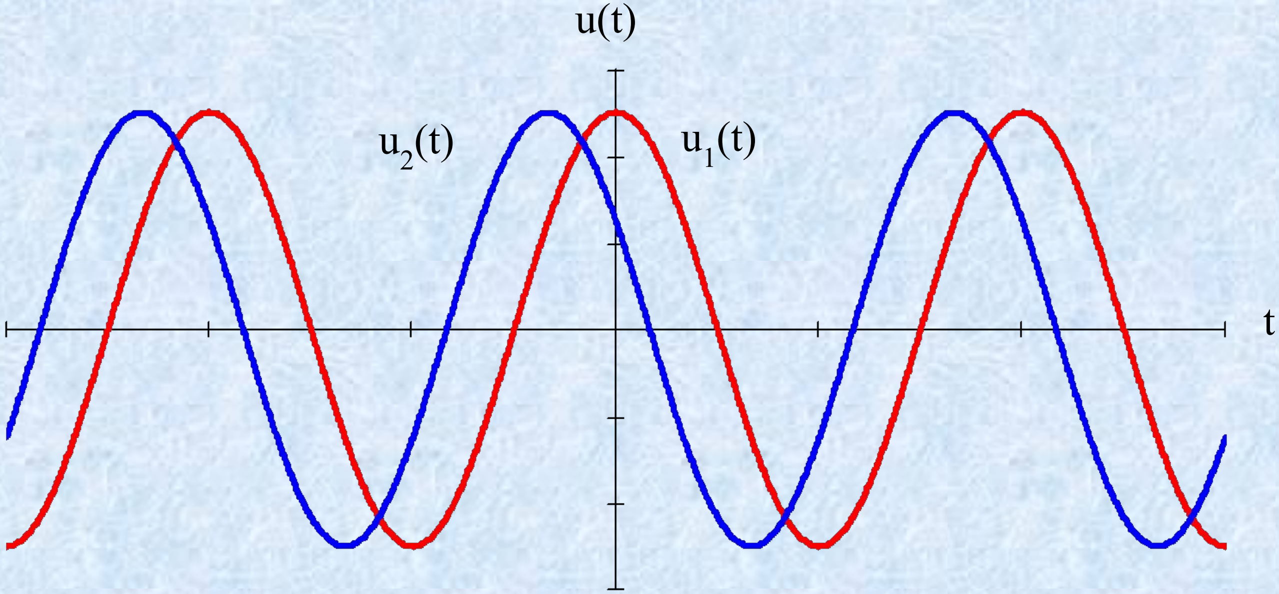
Гармонические колебания



u(t)
u2(t)
u1(t)
t

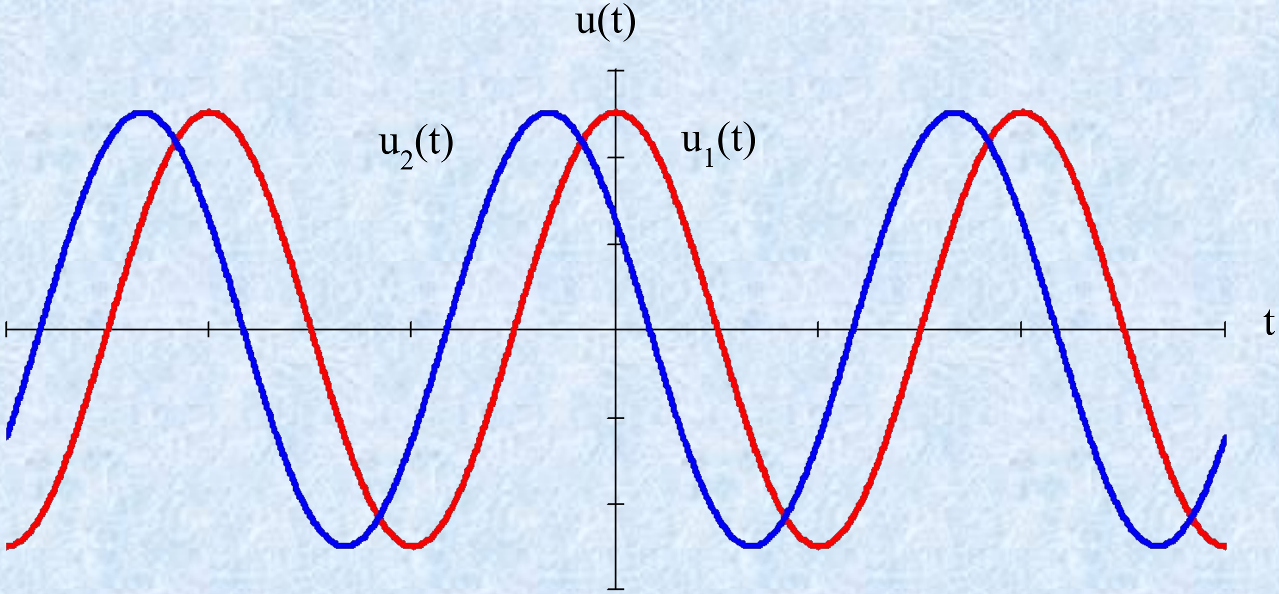


$u_1(\mathrm{t}) = U_1 \cdot \cos(\omega_1 \cdot t + \varphi_1)$ $u_2(\mathrm{t}) = U_2 \cdot \cos(\omega_2 \cdot t + \varphi_2)$



$$u_1(\mathrm{t}) = U_1 \cdot \cos(\omega_1 \cdot t + \varphi_1) \qquad u_2(\mathrm{t}) = U_2 \cdot \cos(\omega_2 \cdot t + \varphi_2)$$

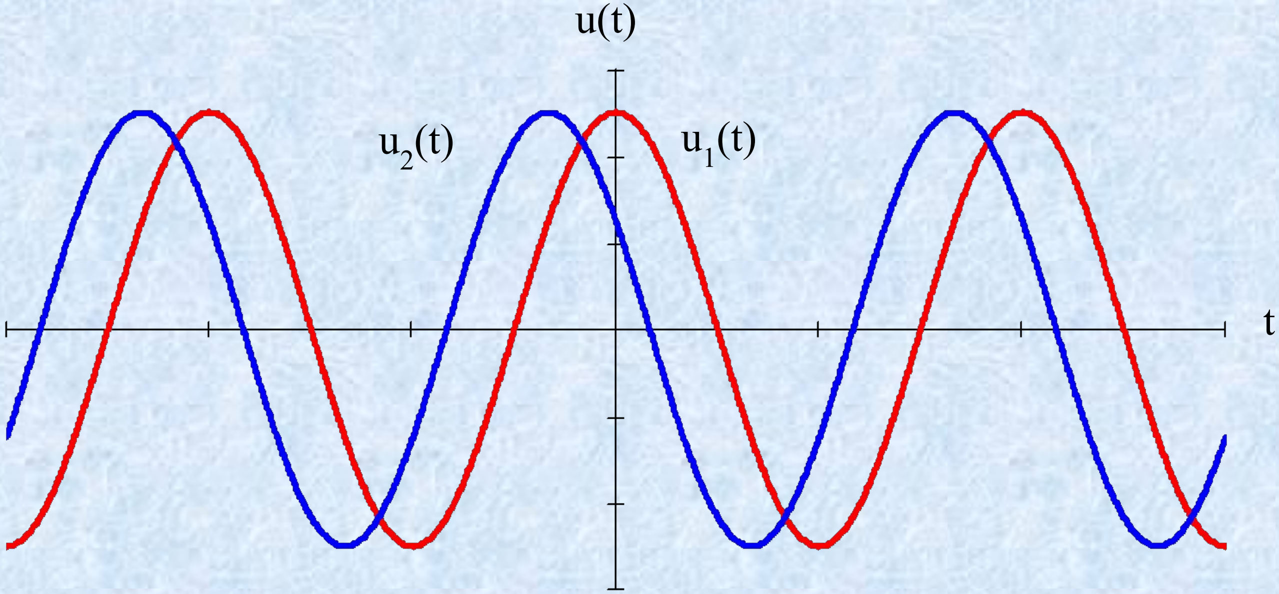
$$U_1 = U_2 \geq 0$$



$$u_1(\mathrm{t}) = U_1 \cdot \cos(\omega_1 \cdot t + \varphi_1) \qquad u_2(\mathrm{t}) = U_2 \cdot \cos(\omega_2 \cdot t + \varphi_2)$$

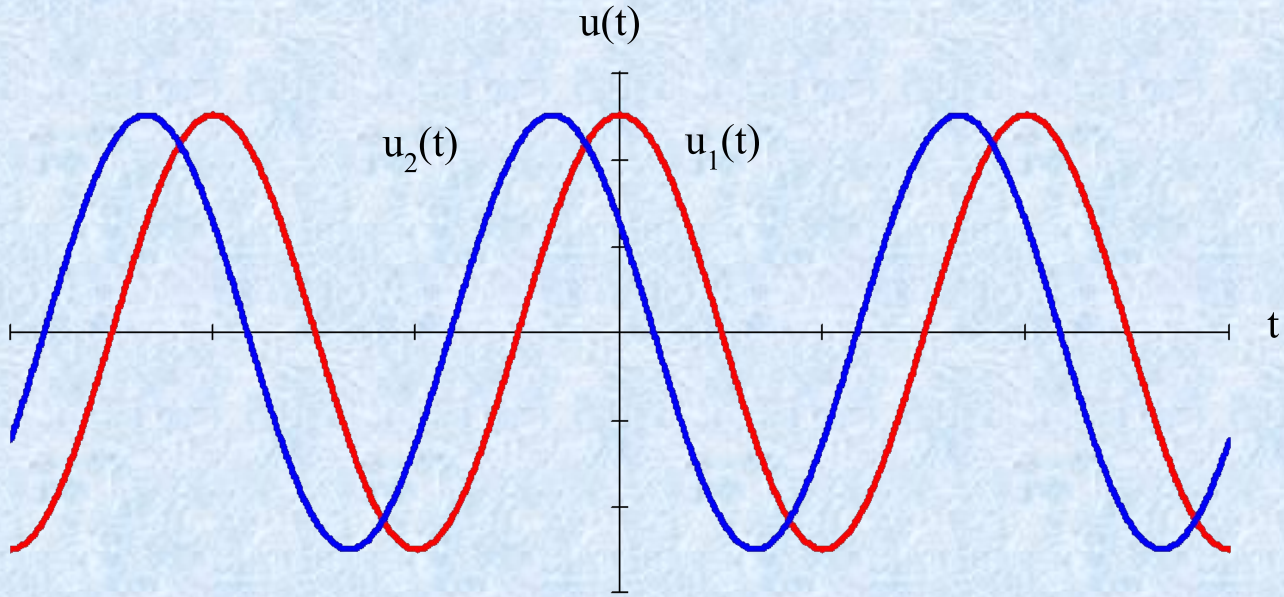
$$U_1 = U_2 \geq 0$$

$$\boxed{f_1 = \frac{1}{T_1} = \frac{1}{T_2} = f_2 \;\; \geq 0;}$$



$$u_1(\mathrm{t}) = U_1 \cdot \cos(\omega_1 \cdot t + \varphi_1) \qquad u_2(\mathrm{t}) = U_2 \cdot \cos(\omega_2 \cdot t + \varphi_2)$$

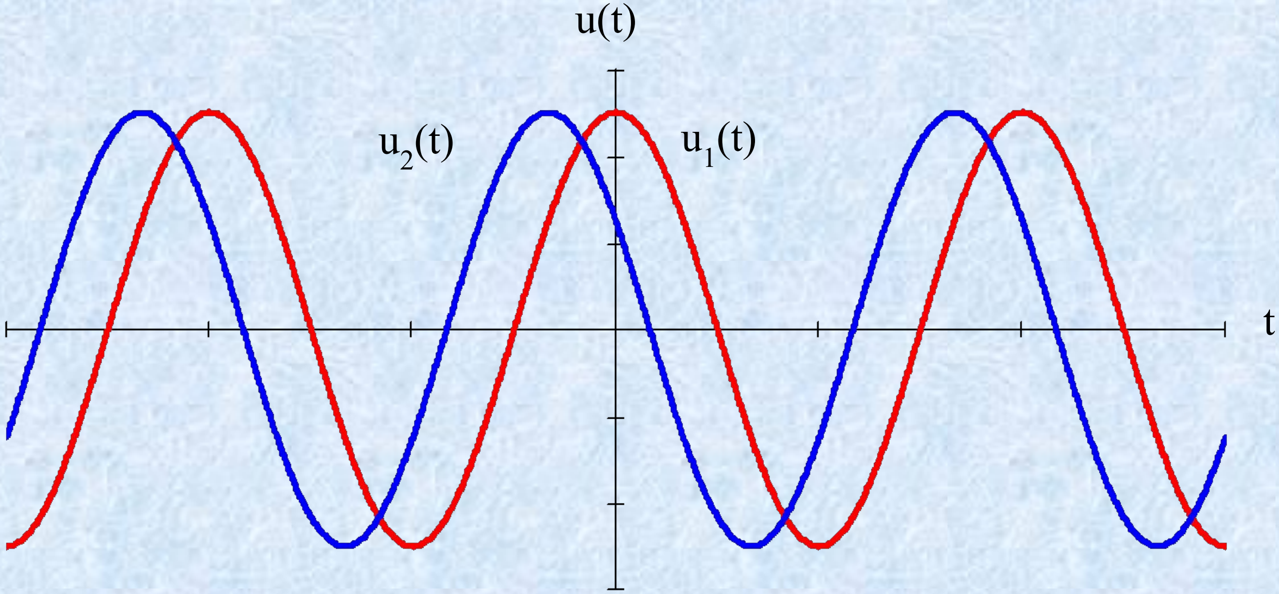
$$U_1 = U_2 \geq 0 \qquad f_1 = \frac{1}{T_1} = \frac{1}{T_2} = f_2 \;\; \geq 0; \qquad \left|\omega_1\right| = 2 \cdot \pi \cdot f_1 = 2 \cdot \pi \cdot f_2 = \left|\omega_2\right|$$



$$u_1(\mathrm{t}) = U_1 \cdot \cos(\omega_1 \cdot t + \varphi_1) \qquad u_2(\mathrm{t}) = U_2 \cdot \cos(\omega_2 \cdot t + \varphi_2)$$

$$U_1 = U_2 \geq 0 \qquad f_1 = \frac{1}{T_1} = \frac{1}{T_2} = f_2 \ \geq 0; \quad |\omega_1| = 2 \cdot \pi \cdot f_1 = 2 \cdot \pi \cdot f_2 = |\omega_2|$$

$$\omega \to \begin{cases} > 0 \\ = 0 \\ < 0 \end{cases}$$

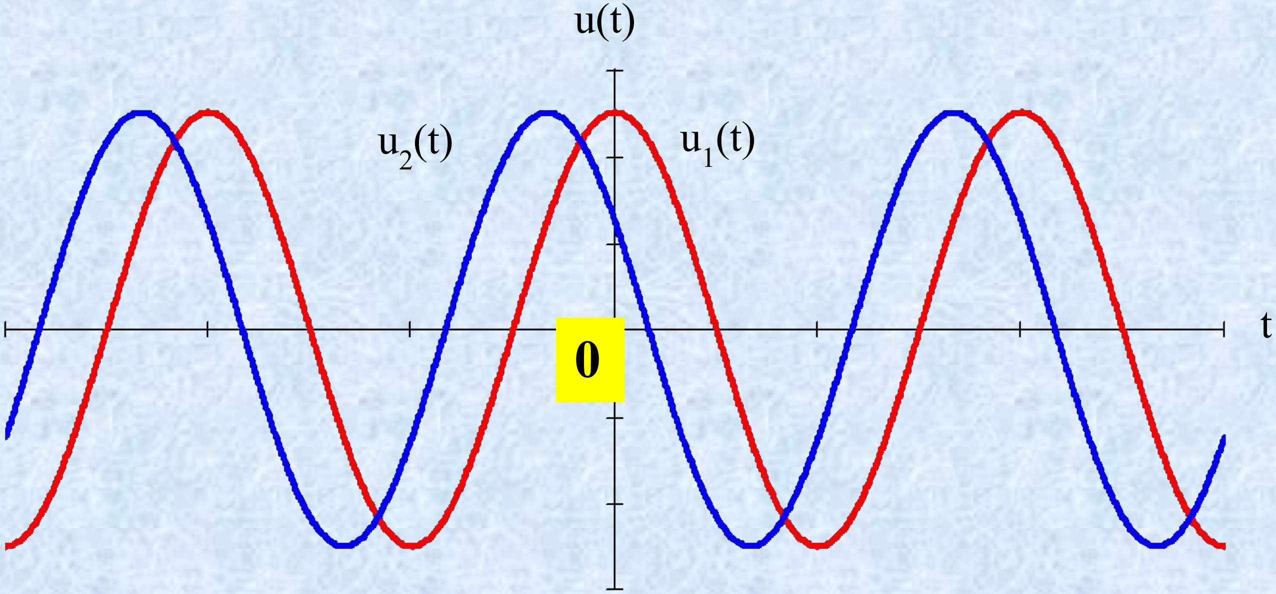


$$u_1(\mathrm{t}) = U_1 \cdot \cos(\omega_1 \cdot t + \varphi_1) \qquad u_2(\mathrm{t}) = U_2 \cdot \cos(\omega_2 \cdot t + \varphi_2)$$

$$U_1 = U_2 \geq 0 \qquad f_1 = \frac{1}{T_1} = \frac{1}{T_2} = f_2 \ \geq 0; \quad |\omega_1| = 2 \cdot \pi \cdot f_1 = 2 \cdot \pi \cdot f_2 = |\omega_2|$$

$$\omega \rightarrow \begin{cases} > 0 \\ = 0 \\ < 0 \end{cases}$$

$\varphi_1 = ?;$ $\varphi_2 = ?;$



$$\varphi_1 = arc\cos\left[\frac{u_1(0)}{U_1}\right];$$

$$\varphi_2 = arc\cos\left[\frac{u_2(0)}{U_2}\right];$$

Комплексная форма гармонического колебания

$$u(\mathrm{t}) = U \cdot \cos(\omega \cdot t + \varphi)$$

$$u(\mathrm{t}) = U \cdot \frac{e^{j\cdot(\omega\cdot t+\varphi)} + e^{-j\cdot(\omega\cdot t+\varphi)}}{2} = \frac{U}{2} \cdot e^{j\cdot\varphi} \cdot e^{j\cdot\omega\cdot t} + \frac{U}{2} \cdot e^{-j\cdot\varphi} \cdot e^{-j\cdot\omega\cdot t};$$

Комплексная форма гармонического колебания

$$u(\mathrm{t}) = U \cdot \cos(\omega \cdot t + \varphi)$$

$$u(\mathrm{t}) = U \cdot \frac{e^{j\cdot(\omega\cdot t+\varphi)} + e^{-j\cdot(\omega\cdot t+\varphi)}}{2} = \frac{U}{2} \cdot e^{j\cdot\varphi} \cdot e^{j\cdot\omega\cdot t} + \frac{U}{2} \cdot e^{-j\cdot\varphi} \cdot e^{-j\cdot\omega\cdot t};$$

Комплексные амплитуды

$$\underline{C} = \frac{U}{2} \cdot e^{j\cdot\varphi};$$

$$\underline{C}^{*} = \frac{U}{2} \cdot e^{j\cdot\varphi};$$

Комплексная форма гармонического колебания

$$u(\mathrm{t}) = U \cdot \cos(\omega \cdot t + \varphi)$$

$$u(\mathrm{t}) = U \cdot \frac{e^{j\cdot(\omega\cdot t+\varphi)} + e^{-j\cdot(\omega\cdot t+\varphi)}}{2} = \frac{U}{2}\cdot e^{j\cdot\varphi}\cdot e^{j\cdot\omega\cdot t} + \frac{U}{2}\cdot e^{-j\cdot\varphi}\cdot e^{-j\cdot\omega\cdot t};$$

Комплексные амплитуды

$$\underline{C} = \frac{U}{2}\cdot e^{j\cdot\varphi}; \qquad \underline{C}^{*} = \frac{U}{2}\cdot e^{j\cdot\varphi};$$

$U = 2\cdot\left|\underline{C}\right|$, при $\omega \neq 0;$

$U = \left|\underline{C}\right|$, при $\omega = 0;$

Комплексная форма гармонического колебания

$$u(\mathrm{t}) = U \cdot \cos(\omega \cdot t + \varphi)$$

$$u(\mathrm{t}) = U \cdot \frac{e^{j\cdot(\omega\cdot t+\varphi)} + e^{-j\cdot(\omega\cdot t+\varphi)}}{2} = \frac{U}{2}\cdot e^{j\cdot\varphi}\cdot e^{j\cdot\omega\cdot t} + \frac{U}{2}\cdot e^{-j\cdot\varphi}\cdot e^{-j\cdot\omega\cdot t};$$

Комплексные амплитуды

$$\underline{C} = \frac{U}{2}\cdot e^{j\cdot\varphi}; \qquad \underline{C}^{*} = \frac{U}{2}\cdot e^{j\cdot\varphi};$$

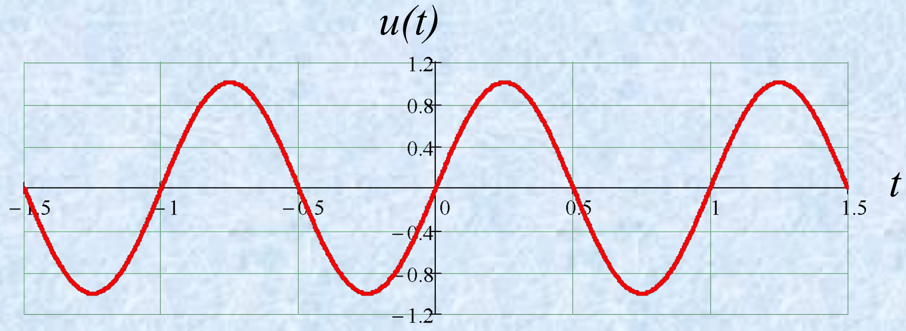
$$U = 2\cdot\left|\underline{C}\right|, \qquad \omega \neq 0;$$

$$U = \left|\underline{C}\right|, \qquad \omega = 0;$$

$$\varphi = arg\left(\underline{C}\right);$$

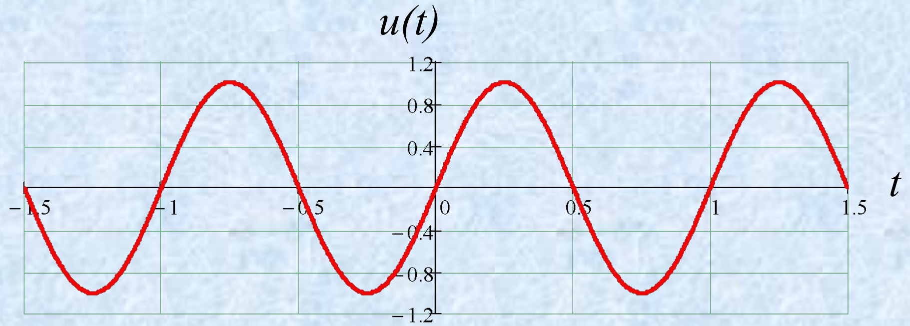
Спектры гармонического колебания

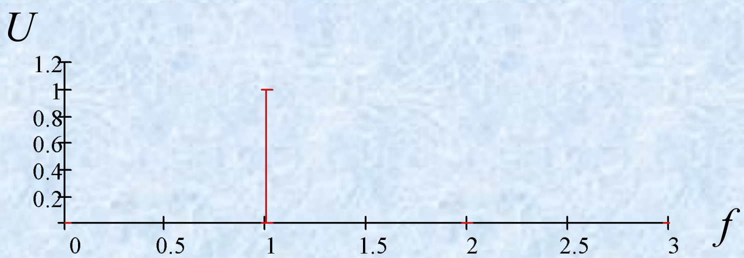
$$u(\mathrm{t}) = U \cdot \cos(\omega \cdot t + \varphi)$$



Спектры гармонического колебания

$$u(\mathrm{t}) = U \cdot \cos(\omega \cdot t + \varphi)$$

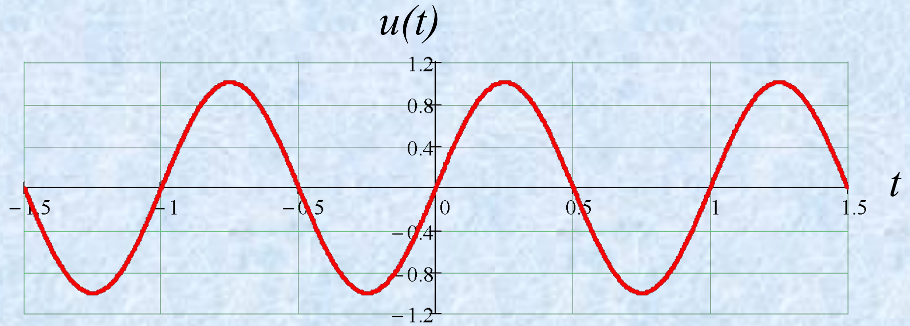


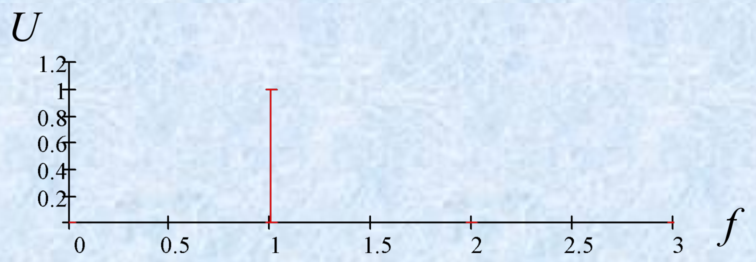


Спектр амплитуд

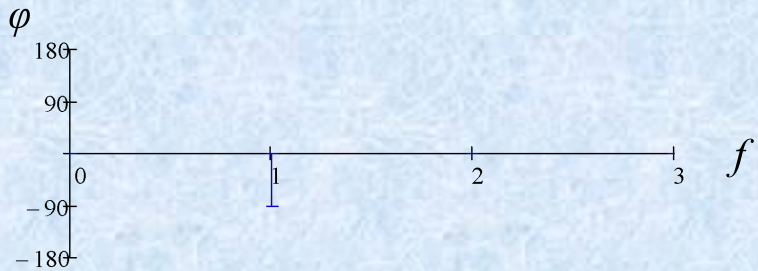
Спектры гармонического колебания

$$u(\mathrm{t}) = U \cdot \cos(\omega \cdot t + \varphi)$$



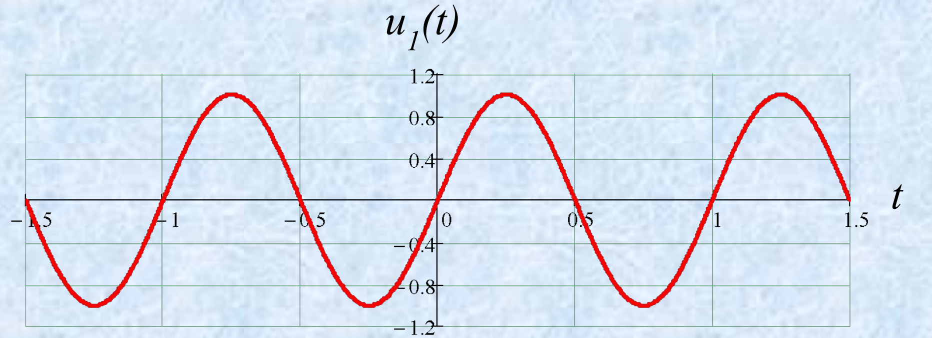


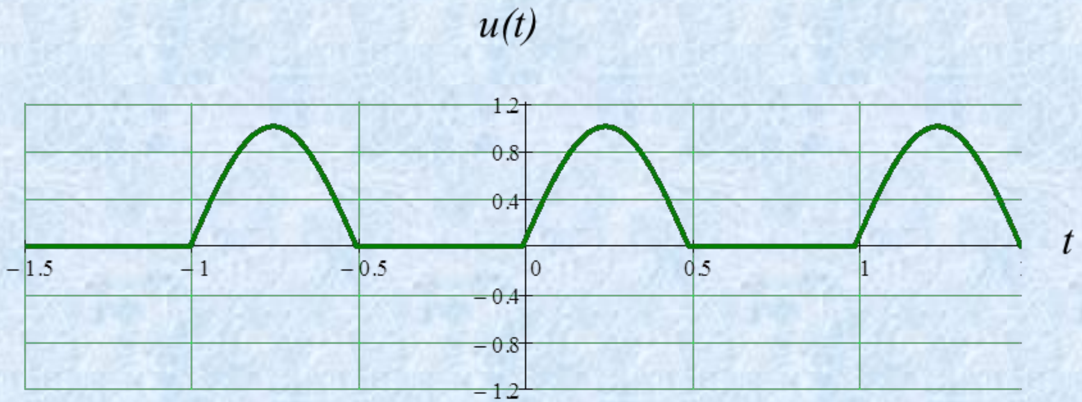
Спектр амплитуд



Спектр фаз

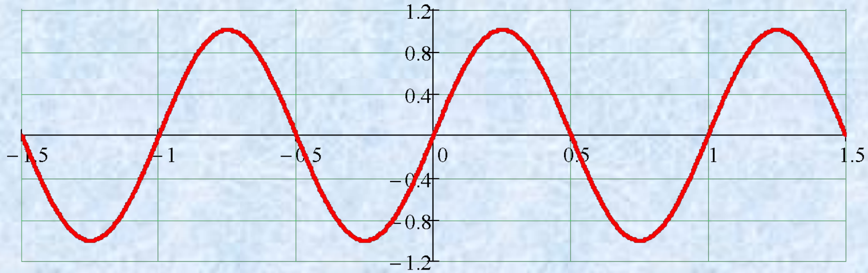
Примеры периодических колебания





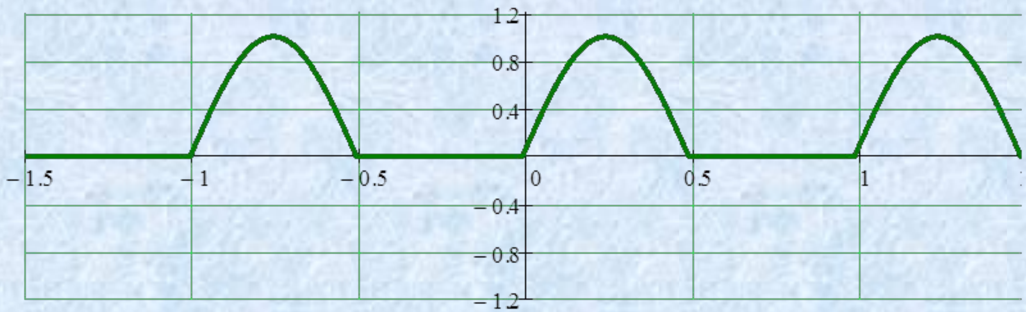
Примеры периодических колебания

$u_1(t)$



t

$u(t)$



t

$$u(t) = \begin{bmatrix} U \cdot \cos(\omega \cdot t + \varphi), \quad при \quad (\ ) \geq 0; \\ 0, \quad при \ u(t) < 0; \end{bmatrix}$$

$$U = 1; \quad \omega = \pm\, 2 \cdot \pi; \quad \varphi = -\frac{\pi}{2}; \quad T_0 = \frac{|\omega|}{2 \cdot \pi} = 1;$$

Жан Батист Жозеф Фурье

(21 марта 1768 — 16 мая 1830)

В 1807 Фурье представил во Французский Институт (*Institut de France*) доклад о синусоидальном представлении температурных распределений. Доклад содержал утверждение о том, что любое периодическое колебание может быть представлено суммой выбранных должным образом гармонических колебаний. Работа Фурье была отклонена, прежде всего, из-за возражения Лагранжа, и была издана приблизительно пятнадцатью годами позже.

В 1798 году Наполеон начал свой египетский поход, в который пригласил Фурье. Во время оккупации Египта Фурье работал во французской администрации, руководил археологическими раскопками, а также занимался формированием системы образования.

Спектры периодического колебания

$u(t)$

t

$$u(t)=\begin{bmatrix} U\cdot\cos(\omega\cdot t+\varphi), & \text{при } u(t)\geq 0; \\ 0, & \text{при } u(t)<0; \end{bmatrix}$$

$$U=1;\quad \omega=\pm\,2\cdot\pi;\quad \varphi=-\frac{\pi}{2};\quad T_0=\frac{|\omega|}{2\cdot\pi}=1;$$

Спектры периодического колебания

u(t)

t

$$u(t)=\begin{bmatrix} U\cdot\cos(\omega\cdot t+\varphi), & \quad (\ )\geq 0; \\ 0,\quad при\ u(t)<0; & \end{bmatrix}$$

$$U=1;\quad \omega=\pm\,2\cdot\pi;\quad \varphi=-\frac{\pi}{2};\ T_0=\frac{|\omega|}{2\cdot\pi}=1;$$

$$u(t)=\sum_{n}^{N}U_n\cdot\cos(n\cdot\omega_0\cdot t+\varphi_n);\quad \omega_0=2\cdot\pi\cdot T_0;\quad n=0,\ 1,\ 2,\ \ldots N\rightarrow\infty;$$

Спектры периодического колебания

u(t)

t

$$u(t)=\sum_{n}^{N}U_n\cdot\cos(n\cdot\omega_0\cdot t+\varphi_n);\quad \omega_0=2\cdot\pi\cdot T_0;\quad n=0,\ 1,\ 2,\ \dots N\to\infty;$$

$$\underline{C}_n=\frac{1}{T_0}\cdot\int_{-\frac{T_0}{2}}^{\frac{T_0}{2}}u(t)\cdot e^{-j\cdot n\cdot\omega_0\cdot t}\cdot dt;\qquad n=0,\ 1,\ 2,\ \dots N\to\infty;$$

Спектры периодического колебания

u(t)

t

$$u(t)=\sum_{n}^{N}U_n\cdot\cos(n\cdot\omega_0\cdot t+\varphi_n);\quad \omega_0=2\cdot\pi\cdot T_0;\quad n=0,\ 1,\ 2,\ \dots N\to\infty;$$

$$\underline{C}_n=\frac{1}{T_0}\cdot\int\limits_{-\frac{T_0}{2}}^{\frac{T_0}{2}}u(t)\cdot e^{-j\cdot n\cdot\omega_0\cdot t}\cdot dt;\qquad n=0,\ 1,\ 2,\ \dots N\to\infty;$$

$$U_n=\begin{cases}2\cdot\left|\underline{C}_n\right|, & \text{при } n\neq 0;\\ \left|\underline{C}_n\right|, & \text{при } n=0;\end{cases}$$

$$\varphi_n=\arg(\underline{C}_n);$$

Спектры периодического колебания

u(t)

t

Un

Спектр амплитуд

n

Спектры периодического колебания

$u(t)$

t

U_n

Спектр амплитуд

n

φ_n

Спектр фаз

n

Мощность периодического колебания

Мгновенная мощность периодического колебания

$$p(t)=\frac{u^2(t)}{R}\ \langle Ом\rangle;\ p(t)=u^2(t);\quad (\ )=\ ^2(\ );$$

Мгновенная мощность периодического колебания также периодическое колебание с тем же периодом – T_0

Мощность периодического колебания

u(t)

t

p(t)

t

Мощность периодического колебания

Средняя мощность

$$P_{cp} = \frac{1}{T_0} \int_{-\frac{T_0}{2}}^{\frac{T_0}{2}} p(t) \cdot dt = \frac{1}{T_0} \int_{-\frac{T_0}{2}}^{\frac{T_0}{2}} u^2(t) \cdot dt \;;$$

Мощность периодического колебания

Средняя мощность

$$P_0 = \frac{1}{T_0} \int_{-\frac{T_0}{2}}^{\frac{T_0}{2}} p(t) \cdot dt = \frac{1}{T_0} \int_{-\frac{T_0}{2}}^{\frac{T_0}{2}} u^2(t) \cdot dt \;;$$

u(t)

t

$Bm_{cp} = 0,25$;

Мощность периодического колебания

Спектр мощности гармоник периодического колебания

$$\begin{cases} P_n = \dfrac{U_n^2}{2}, & \text{при } n \neq 0; \\ P_n = U_n^2, & \text{при } n=0; \end{cases}$$

Мощность периодического колебания

Спектр мощности гармоник периодического колебания

$$P_n = \begin{cases} \dfrac{U_n^2}{2}, & \text{при } n \neq 0; \\ U_n^2, & \text{при } n = 0; \end{cases}$$

P_n

n

$P_0 = 0{,}101; \quad P_1 = 0{,}125; \quad P_2 = 0{,}0225; \quad P_3 = 0; \quad P_4 = 9 \cdot 10^{-4}; \quad ....$

Мощность периодического колебания

Спектр мощности гармоник периодического колебания

$$\begin{cases} P_n = \dfrac{U_n^2}{2}, & \text{при } n \neq 0; \\ P_n = U_n^2, & \text{при } n=0; \end{cases}$$

Неравенство Парсеваля

$$\boxed{P_{cp} \geq \sum_{n=0}^{n=N} P_n = U_0^2 + \sum_{n=1}^{n=N} \frac{U_n^2}{2};}$$

Мощность периодического колебания

Спектр мощности гармоник периодического колебания

$$\begin{cases} P_n = \dfrac{U_n^2}{2}, & \text{при } n \neq 0; \\ P_n = U_n^2, & \text{при } n = 0; \end{cases}$$

Неравенство Парсеваля

$$P_{cp} \leq \sum_{n=0}^{n=N} P_n = U_0^2 + \sum_{n=1}^{n=N} \frac{U_n^2}{2};$$

$$P_0 + P_1 + P_2 = 0,2488 \leq P_{cp} = 0,25;$$

Восстановление периодического колебания

$$u(t) \to \{U_n;\varphi_n\}_N \to \tilde{u}(t);$$

Восстановление периодического колебания

$$u(t) \to \{U_n; \varphi_n\}_N \to \tilde{u}(t);$$

$$\tilde{u}(t) = \sum_{n}^{N} U_n \cdot \cos(n \cdot \omega_0 \cdot t + \varphi_n); \quad \omega_0 = 2 \cdot \pi \cdot T_0; \quad n = 0,\ 1,\ 2,\ \dots N \to \infty;$$

Восстановление периодического колебания

$$u(t) \rightarrow \{U_n; \varphi_n\}_N \rightarrow \tilde{u}(t);$$

$$\tilde{u}(t) = \sum_{n}^{N} U_n \cdot \cos(n \cdot \omega_0 \cdot t + \varphi_n); \quad \omega_0 = 2 \cdot \pi \cdot T_0; \quad n = 0,\ 1,\ 2,\ \ldots\ N \rightarrow \infty;$$

Пример: N=2;

u(t)

t

$$\tilde{u}(t) = \sum_{n}^{2} U_n \cdot \cos(n \cdot \omega_0 \cdot t + \varphi_n);$$

Погрешность восстановления

u(t)

t

$$\Delta u(t) = \tilde{u}(t) - u(t);$$

Погрешность восстановления

u(t)

t

$$\Delta u(t) = \tilde{u}(t) - u(t);$$

Δu(t)

t

Погрешность восстановления

u(t)

t

$$\Delta u(t) = \tilde{u}(t) - u(t);$$

Δu(t)

t

$$d^2 = \frac{1}{T_0} \int_{-\frac{T_0}{2}}^{\frac{T_0}{2}} \left[u(t) - u(t) \right]^2 \cdot dt;$$

Среднеквадратичная погрешность

Погрешность восстановления

$$\Delta u(t) = \tilde{u}(t) - u(t);$$

$\Delta u(t)$

t

$$d^2 = \frac{1}{T_0}\int_{-\frac{T_0}{2}}^{\frac{T_0}{2}} \left[\tilde{u}(t) - u(t)\right]^2 \cdot dt = \frac{1}{T_0}\int_{-\frac{T_0}{2}}^{\frac{T_0}{2}} u^2(t) \cdot dt + \frac{1}{T_0}\int_{-\frac{T_0}{2}}^{\frac{T_0}{2}} \tilde{u}^2(t) \cdot dt - \frac{2}{T_0}\int_{-\frac{T_0}{2}}^{\frac{T_0}{2}} \tilde{u}(t) \cdot u(t) \cdot dt;$$

Погрешность восстановления

$$\Delta u(t) = \tilde{u}(t) - u(t);$$

$\Delta u(t)$

t

$$d^2 = \frac{1}{T_0}\int_{-\frac{T_0}{2}}^{\frac{T_0}{2}} \left[u(t) - u(t)\right]^2 \cdot dt = \frac{1}{T_0}\int_{-\frac{T_0}{2}}^{\frac{T_0}{2}} u^2(t)\cdot dt + \frac{1}{T_0}\int_{-\frac{T_0}{2}}^{\frac{T_0}{2}} \tilde{u}^2(t)\cdot dt - \frac{2}{T_0}\int_{-\frac{T_0}{2}}^{\frac{T_0}{2}} \tilde{u}(t)\cdot u(t)\cdot dt;$$

$$d^2 = P_{uср} - \tilde{P}_{uср} = P_{u\Delta ср};$$

Погрешность восстановления

$$\Delta u(t) = \tilde{u}(t) - u(t);$$

Δu(t)

t

$$d^2 = \frac{1}{T_0}\int_{-\frac{T_0}{2}}^{\frac{T_0}{2}} \left[u(t) - u(t)\right]^2 \cdot dt = \frac{1}{T_0}\int_{-\frac{T_0}{2}}^{\frac{T_0}{2}} u^2(t)\cdot dt + \frac{1}{T_0}\int_{-\frac{T_0}{2}}^{\frac{T_0}{2}} \tilde{u}^2(t)\cdot dt - \frac{2}{T_0}\int_{-\frac{T_0}{2}}^{\frac{T_0}{2}} \tilde{u}(t)\cdot u(t)\cdot dt;$$

$$d^2 = P_{и\,ср} - P_{\tilde{и}\,ср} = P_{и\Delta ср};$$

$$\varepsilon = \frac{d^2}{P_{и\,ср}} = \left(1 - \frac{P_{\tilde{и}\,ср}}{P_{и\,ср}}\right)\cdot 100\ \%;$$

Погрешность восстановления

$$\Delta u(t) = \tilde{u}(t) - u(t);$$

Δu(t)

t

$$d^2 = \frac{1}{T_0}\int_{-\frac{T_0}{2}}^{\frac{T_0}{2}} \left[\tilde{u}(t) - u(t)\right]^2 \cdot dt = \frac{1}{T_0}\int_{-\frac{T_0}{2}}^{\frac{T_0}{2}} u^2(t)\cdot dt + \frac{1}{T_0}\int_{-\frac{T_0}{2}}^{\frac{T_0}{2}} \tilde{u}^2(t)\cdot dt - \frac{2}{T_0}\int_{-\frac{T_0}{2}}^{\frac{T_0}{2}} \tilde{u}(t)\cdot u(t)\cdot dt;$$

$$d^2 = P_{u\,ср} - P_{\tilde{u}\,ср} = P_{\Delta u\,ср};$$

$$\varepsilon = \frac{d^2}{P_{u\,ср}} = \left(1 - \frac{P_{\tilde{u}\,ср}}{P_{u\,ср}}\right)\cdot 100\ \%;$$

$$\varepsilon = \left(1 - \frac{0,2488}{0,25}\right)\cdot 100 = 0,47\ \%;$$

Спасибо за внимание.