Факультет фундаментальной подготовки

Кафедра теоретических основ связи и радиотехники (ТОС и Р)
располагается на 6-м этаже
В аудиториях №607, №609, №611, 613.

Дисциплины

Общая теория связи
Радиотехнические цепи и сигналы

Преподаватель:

Доцент кафедры ТОС и Р
Гурский Сергей Михайлович

Практическое занятие № 3

Расчёт корреляционных функций и свёртки дискретных сигналов.

Учебные цели:

1. **Получить практический навык в практическом расчёте автокорреляционных (АКФ) и взимнокорреляционных (ВКФ) функций дискретных сигналов.**
2. **Получить практический навык в практическом расчёте автокорреляционных (АКФ) функций дискретных сигналов по формуле.**
3. **Практически рассчитать линейную и круговую свёртку линейного сигнала с использованием Mathcad.**

Литература:

Стр. 48..50; 53..54; 63..70

Используя MathCAD рассчитать и построить АКФ :

1) **Интегрированием по определению АКФ.**
2) **ОПФ от энергетического спектра.**

Нечетные номера: треугольный и косинусоидальный .
Четные номера : Прямоугольный и SINC-образный .

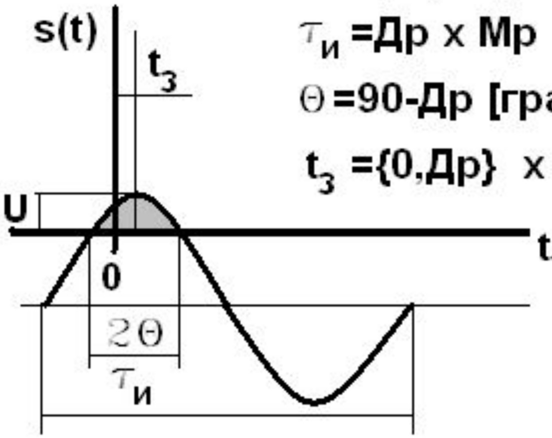
Домашнее задание:

U=Mp [мВ]

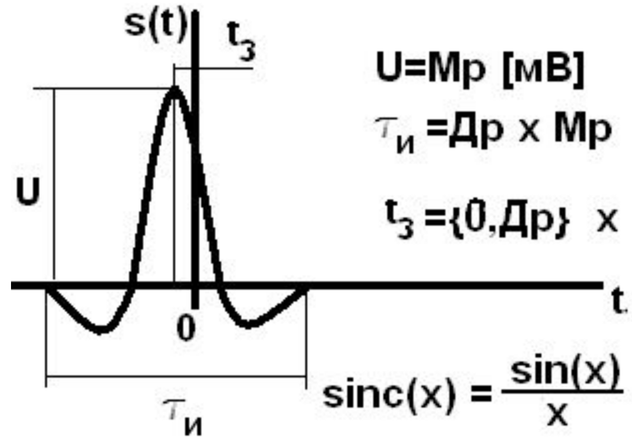
$\tau_и$ =Др x Mp [мкс]

Θ =90-Др [градусов]

$t_з$ ={0,Др} x {$\tau_и$} [мкс]



T --> 360[градусов]

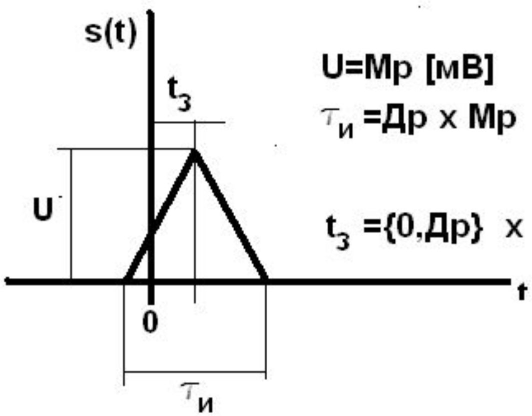


U=Mp [мВ]

$\tau_и$ =Др x Mp [мкс]

$t_з$ ={0,Др} x {$\tau_и$} [мкс]

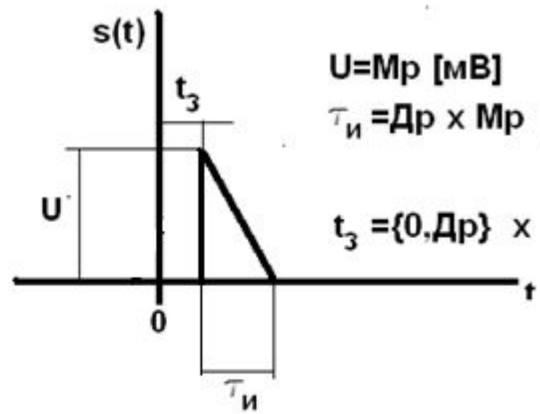
$$\mathrm{sinc}(x) = \frac{\sin(x)}{x}$$



U=Mp [мВ]

$\tau_и$ =Др x Mp [мкс]

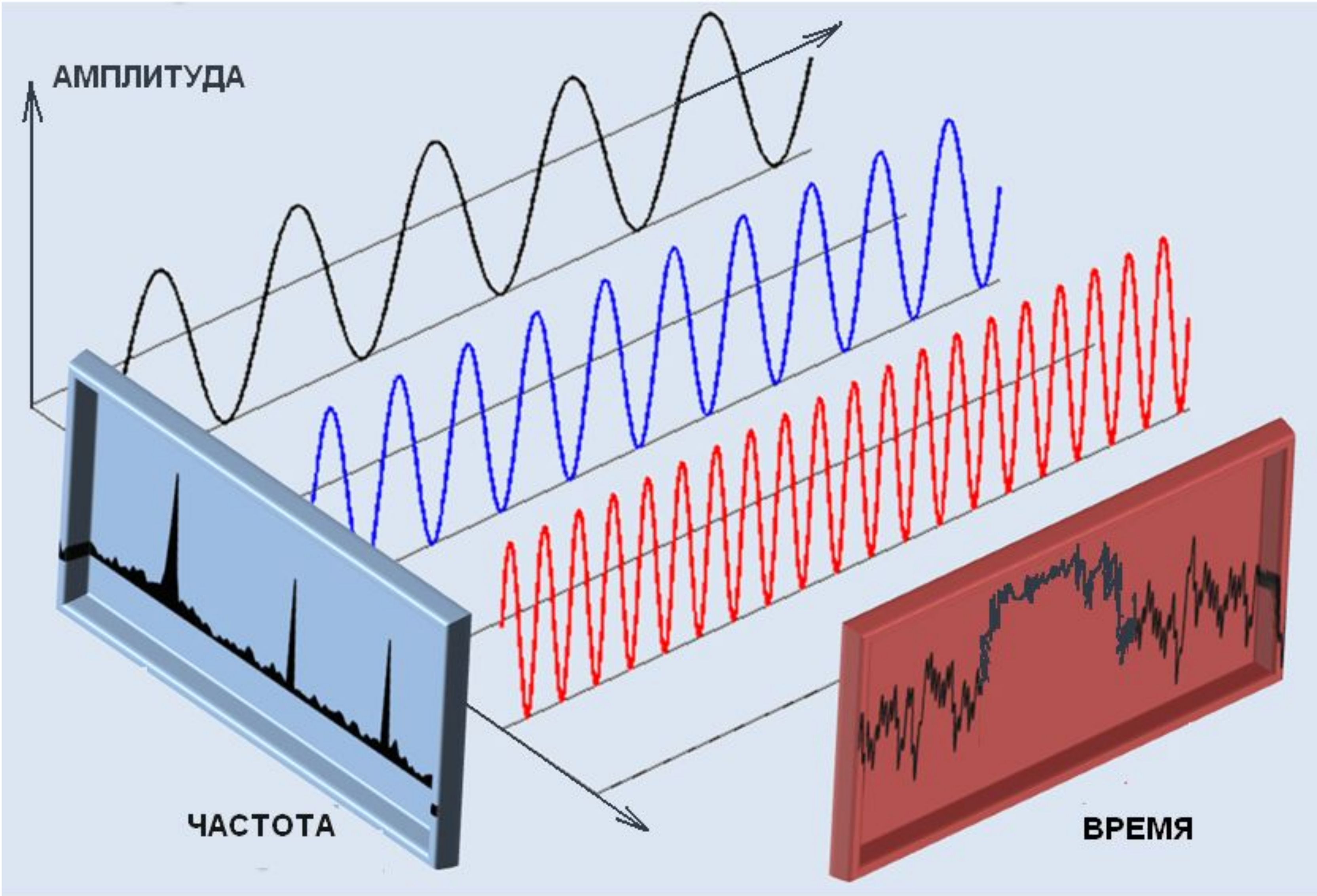
$t_з$ ={0,Др} x {$\tau_и$} [мкс]



U=Mp [мВ]

$\tau_и$ =Др x Mp [мкс]

$t_з$ ={0,Др} x {$\tau_и$} [мкс]


АМПЛИТУДА
ЧАСТОТА
ВРЕМЯ

Вопрос№2. Корреляционные модели детерминированных сигналов

Корреляция – количественная характеристика степени подобия (похожести) двух сигналов.

Корреляционная функция.

Корреляционная функция – зависимость корреляции двух в общем случае комплексных сигналов от временного сдвига τ между ними.

Для сигналов с ограниченной энергией.

$$B_{u,v}(\tau)=\int_{-\infty}^{\infty}u(t)v^{*}(t+\tau)dt.$$

Для сигналов с конечной средней мощностью.

$$B_{u,v}(\tau)=\lim_{T\to\infty}\frac{1}{T}\int_{-T/2}^{T/2}u(t)v^{*}(t+\tau)dt.$$

Для периодических сигналов .

$$B_{u,v}(\tau)=\frac{1}{T}\int_{-T/2}^{T/2}u(t)v^{*}(t+\tau)dt.$$

Автокорреляционная функция вещественного сигнала (АКФ).

Это корреляционная функция двух одинаковых сигналов - самого сигнала **s(t)** и его копии, задержанной во времени **s(t-τ),** рассматриваемая как функция времени задержки **τ**.

$$R_s(\tau) = \int_{-\infty}^{\infty} s(t)s(t+\tau)dt = \int_{-\infty}^{\infty} s(t-\tau)s(t)dt.$$

Свойства АКФ вещественного сигнала R(τ).

- **АКФ** определяет ***взаимную энергию*** сигнала и его копии, задержанной во времени и измеряется в Джоулях.
- **АКФ** ***действительная*** и ***четная функция*** сдвига во времени **τ** : **R(τ)=R(- τ)** . График АКФ симметричен .
- **АКФ** достигает максимума при **τ=0** и максимальное значение АКФ равно ***ЭНЕРГИИ*** сигнала **Es.** Поэтому **R(0)=Es>R(τ)**

Связь АКФ сигнала R(τ) с его энергетическим спектром W(ω).

АКФ $\boldsymbol{R(\tau)}$ и энергетический спектр сигнала $\dot{S}(\omega)\dot{S}^*(\omega) = |\dot{S}(\omega)|^2 = W(\omega)$ ***ОДНОЗНАЧНО*** связаны парой преобразований Фурье.

$$R(\tau) = \frac{1}{2\pi}\int_{-\infty}^{\infty} W(\omega) e^{j\omega\tau} d\omega$$

$$W(\omega) = \int_{-\infty}^{\infty} R(\tau) e^{-j\omega\tau} d\tau$$

Однозначно восстановить сигнал $s(t)$ по его АКФ $R(\tau)$ невозможно, так как энергетический спектр $W(\omega)$, а значит и АКФ не содержат информацию о фазовом спектре сигнала.

АКФ периодического вещественного сигнала s(t+kT).

Это действительная периодическая корреляционная функция , измеряемая единицами средней мощности за период повторения (ВАТТЫ), четная по аргументу τ , максимумы повторяются через период повторения **T.**

$$R_s(\tau)=\frac{1}{T}\int_{-\frac{T}{2}}^{\frac{T}{2}}s(t)s(t+\tau)dt=\int_{-\frac{T}{2}}^{\frac{T}{2}}s(t-\tau)s(t)dt.$$

АКФ периодического сигнала связана с его линейчатым спектром через ряд Фурье:

$$R_s(\tau)=\sum_{k=-\infty}^{\infty}\left|C_k\right|^2e^{j\frac{2\cdot\pi}{T}k\tau}=\frac{a_0}{2}+\sum_{k=-\infty}^{\infty}A_k{}^2\cdot\cos\left(\frac{2\cdot\pi}{T}\cdot k\cdot\tau-\varphi_k\right).$$

Примеры:

Вопрос 3. Свертка сигналов

Сигнал на выходе линейной системы

ННУ **ИМПУЛЬСНАЯ ХАРАКТЕРИСТИКА**

$\delta(t)$ → **ЛС (фильтр)** → $g(t)$

$s(t)$ → $y(t)=s(t) \otimes g(t)$ **СВЕРТКА**

Частотная характеристика линейной системы

$$S_y(j\omega) = S_s(j\omega) \cdot K(j\omega)$$

$$K(j\omega) = \int_{-\infty}^{+\infty} g(t) e^{-j\omega t} dt = \left|K(j\omega)\right| \cdot e^{j \cdot arg[K(j\omega)]}$$

$$\left|K(j\omega)\right| = \sqrt{Re^2[K(j\omega)] + Im^2[K(j\omega)]}$$

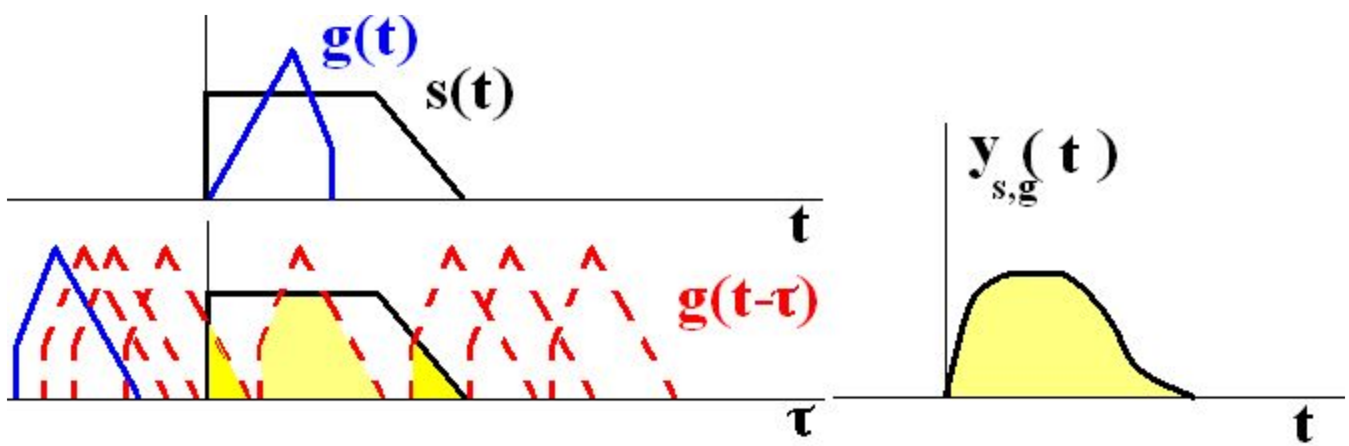
$$arg[K(j\omega)] = \psi(\omega) = arctg \frac{Im[K(j\omega)]}{Re[K(j\omega)]}$$

Свертка двух сигналов во временной и частотной области

Под сверткой понимается математическая операция , которая выполняется в соответствии со следующим алгоритмом:

1. **Второй сигнал отображается зеркально симметрично.**
2. **Второй сигнал задерживается по времени от – ∞ до +∞ .**
3. **Для каждого времени задержки находится произведение с первым сигналом.**
4. **Результаты произведений , полученные при каждом времени задержки суммируются.**

$$y_{s,g}(t)=\int_{-\infty}^{+\infty}s(\tau)g(t-\tau)d\tau=s(t)\otimes g(t).$$



Свойства свертки

коммутативность

$$s(t)\otimes g(t)=g(t)\otimes s(t).$$

$$y_{s,g}(t)=\int_{-\infty}^{+\infty} s(\tau)g(t-\tau)d\tau=y_{g,s}(t)=\int_{-\infty}^{+\infty} g(\tau)s(t-\tau)d\tau.$$

дистрибутивность

$$s(t)\otimes\left[g(t)+u(t)\right]=s(t)\otimes g(t)+s(t)\otimes u(t).$$

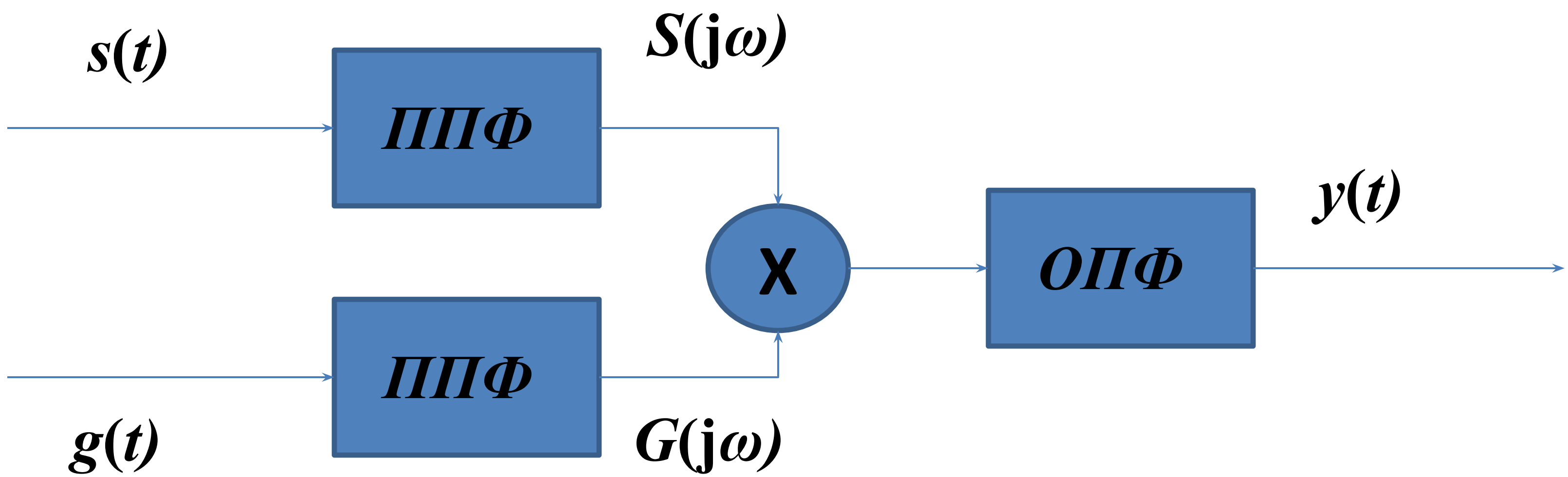
ассоциативность

$$s(t)\otimes\left[g(t)\otimes u(t)\right]=\left[s(t)\otimes g(t)\right]\otimes u(t).$$

Выполнение свертки в частотной области

Согласно свойства преобразования Фурье свертке во временной области соответствует перемножение спектров двух сигналов в частотной области.

$$y_{s,g}(t)=s(t)\otimes g(t) \quad \Leftrightarrow \quad Y_{s,g}(j\omega)=S(j\omega)\cdot G(j\omega).$$



Если второй сигнал является зеркальной комплексно-сопряженной копией первого сигнала , то результатом свертки таких сигналов является АКФ сигнала.

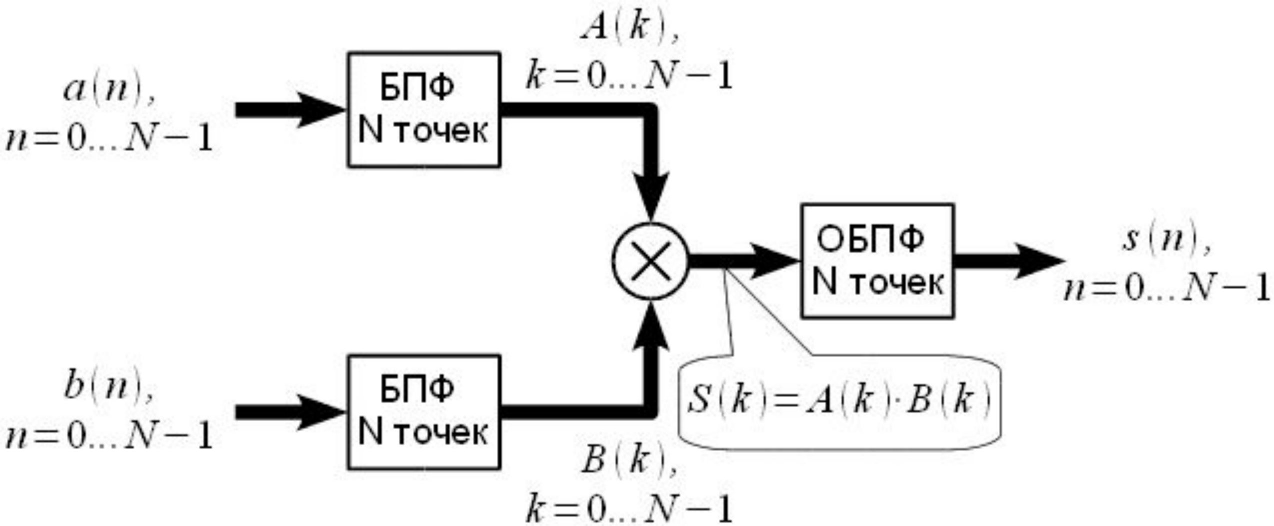
Дискретное преобразование Фурье

$$S(k)=\sum_{n=0}^{N-1} s(n)\cdot W_N^{n\cdot k},\ k=0..N-1,$$

$$W_N^{n\cdot k}=\exp\left(-j\cdot\frac{2\cdot\pi}{N}\cdot n\cdot k\right). \qquad W_N^{n\cdot k}=W_N^{(n-m+m)\cdot k}=W_N^{(n-m)\cdot k}\cdot W_N^{m\cdot k}$$

Аналогично можно поступить и при расчете линейной свертки через циклическую. Рассмотрим пример. Пусть $N=4000$, а $M=3000$. Прямое вычисление линейной свертки потребует $N\cdot M=12000000$ (12 миллионов) операций умножения и сложения. Дополним каждую из последовательностей до 8192 отсчетов нулями и применим алгоритм БПФ с прореживание по времени, тогда на вычисление одного БПФ потребуется $N\cdot\log_2(N)=8192\cdot 13\approx 107000$ операций комплексного умножения или 428000 операций действительного умножения. Таких блоков БПФ будет всего 3 штуки, плюс надо учесть 8192 комплексных умножений спектров, итого $3\cdot 428000+8192\cdot 4\approx 1610000$, что почти в 7.5 раз ниже чем если бы мы считали линейную свертку в лоб

Циклическая свертка может быть выполнена через ДПФ (БПФ) гораздо быстрее



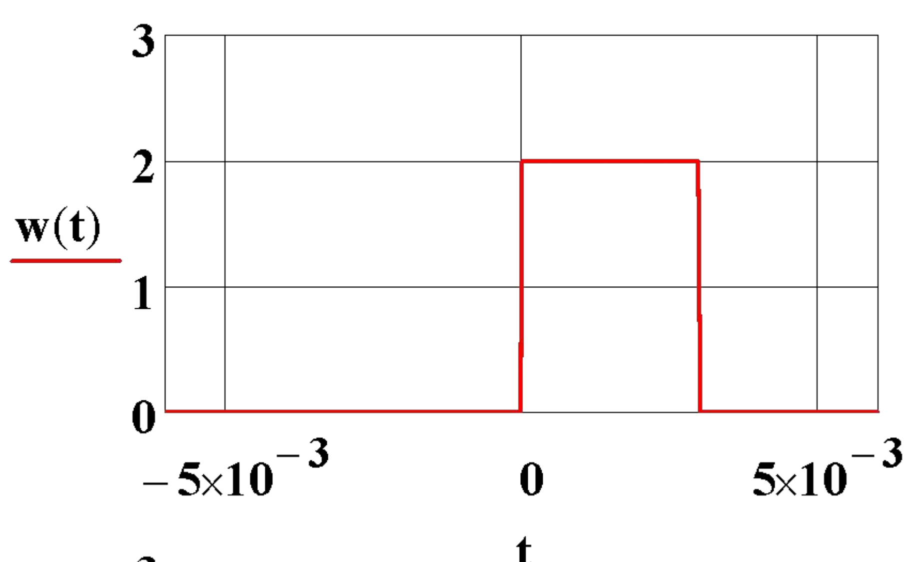
Ðàñ÷åò àâòîêîððåëÿöèîííîé ôóíêöèè ñèãíàëà

$$ti := 3\cdot 10^{-3}$$ äëèòåëüíîñòü ñèãíàëà $$j := \sqrt{-1}$$

$$U := 2$$ àìïëèòóäà ñèãíàëà

Ìîäåëü ñèãíàëà (îäèíî÷íûé ïðÿìîóãîëüíûé èìïóëüñ

$$w(t) := \begin{cases} 0 & \text{if } t < 0 \\ U & \text{if } 0 \le t \le ti \\ 0 & \text{if } t > ti \end{cases}$$



$$t := -3.1 \cdot 10^{-3}, -3 \cdot 10^{-3} \,..\, 3.1 \cdot 10^{-3}$$

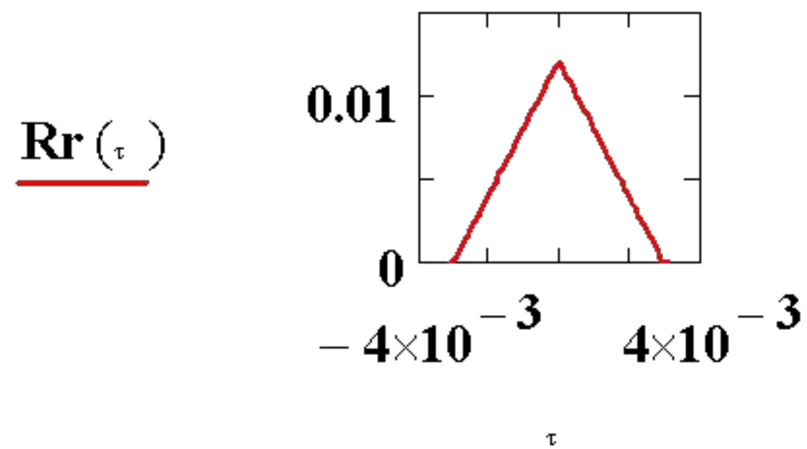
t

Äèàïàçîí âðåìåíè è âðåìåíè çàäåðæêè ñèãíàëà

$$\tau := -3.1 \cdot 10^{-3}, -3 \cdot 10^{-3} \,..\, 3.1 \cdot 10^{-3}$$

Ðàñ÷åò ÀÊÔ è åå ãðàôèê ïî îïðåäåëåíèþ

$$Rr(\tau) := \int_{-10 \cdot 10^{-3}}^{10 \cdot 10^{-3}} w(t)\, w(t-\tau)\, dt$$



Ðàñ÷åò ÀÊÔ ñ èñïîëüçîâàíèåì ÏÏÔ îò ýíåðãåòè÷åñêîãî ñïåêòðà

$$\omega := -10^4, -0.99\cdot 10^4 .. 10^4$$

Äèàïàçîí ïî êðóãîâîé ÷àñòîòå

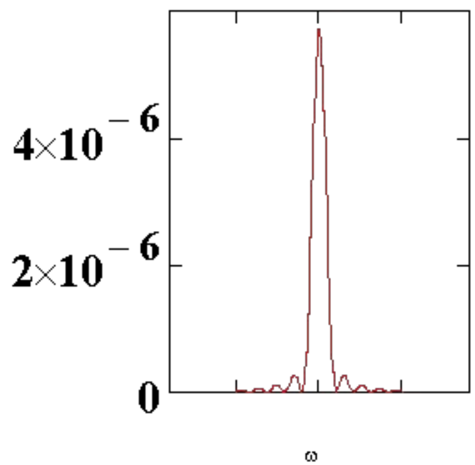
$$Ss(\omega) := \int_{-ti}^{ti} w(t)\cdot e^{-j\cdot\omega\cdot t}\,dt$$

Ðàñ÷åò ñïåêòðàëüíîé ïëîòíîñòè ñèãíàëà (ÏÏÔ)

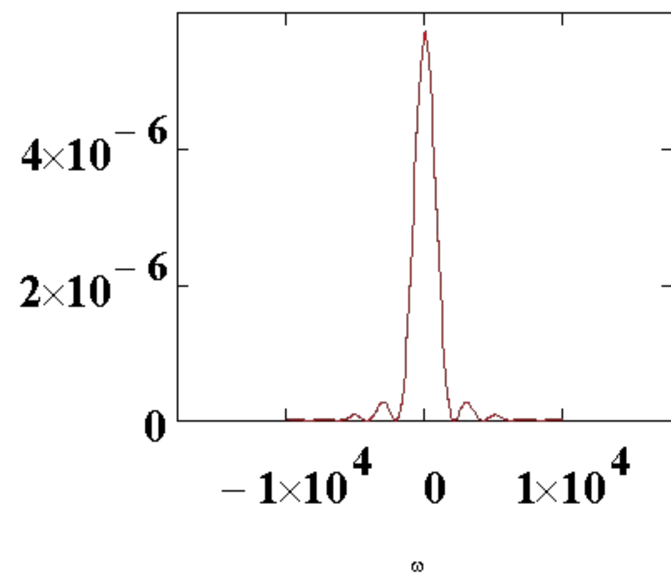
$$Ws(\omega) := \frac{1}{2\cdot\pi} Ss(\omega)\cdot\overline{Ss(\omega)}$$

Ðàñ÷åò ýíåðãåòè÷åñêîãî ñïåêòðà ñèãíàëà (êâàäðàò ìîäóëÿ ñïåêòðàëüíîé ïëîòíîñòè)

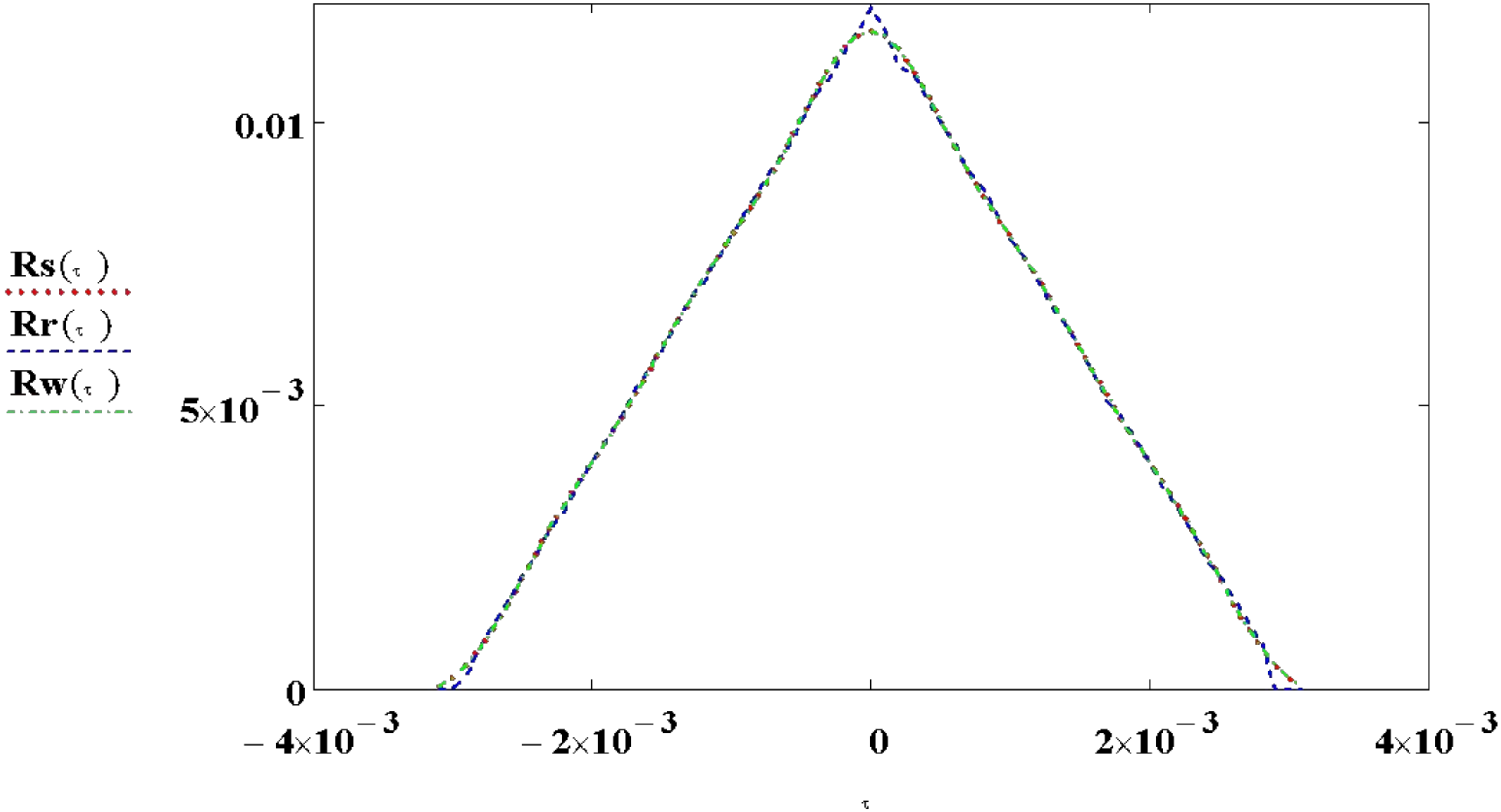
$$(|Ss(\omega)|)^2\cdot\frac{1}{2\pi}$$



$$Ws(\omega)$$



$$Rw(\tau) := \left[\int_{\frac{-18}{ti}}^{\frac{18}{ti}} (Ws(\omega)) \cdot e^{j\cdot\omega\cdot\tau}\, d\omega\right] \qquad Rs(\tau) := \frac{1}{2\cdot\pi}\cdot\left[\int_{\frac{-18}{ti}}^{\frac{18}{ti}} (|Ss(\omega)|)^2 \cdot e^{j\cdot\omega\cdot\tau}\, d\omega\right]$$



Сигналы (коды) Баркера

Сигналы Баркера. Сигналы (коды) Баркера примечательны тем, что их корреляционные функции имеют высокий главный максимум при $\tau = 0$ и низкий уровень при $\tau \neq 0$.

Таблица 3.1. **Коды Баркера**

N	Код Баркера												
3	1	1	–1										
4	1	1	1	–1									
4	1	1	–1	1									
5	1	1	1	–1	1								
7	1	1	1	–1	–1	1	–1						
11	1	1	1	–1	–1	–1	1	–1	–1	1	–1		
13	1	1	1	1	1	–1	–1	1	1	–1	1	–1	1

Для иллюстрации на рис. 3.21 изображены сигналы Баркера при $N = 5$ и $N = 11$.

Сигналы Баркера при $N_1 = 5$ и $N_2 = 11$

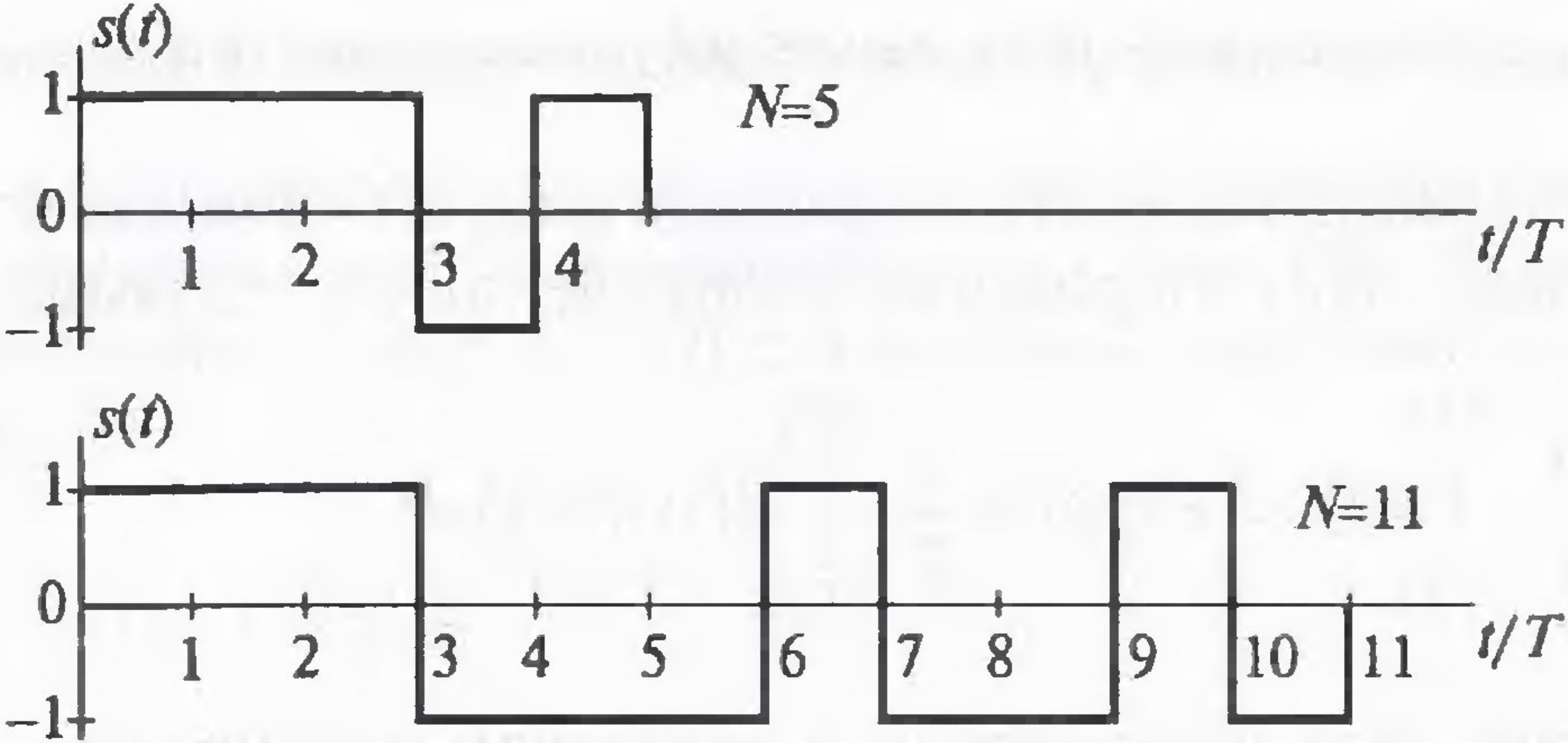


Рис. 3.21. Сигналы Баркера при двух значениях N

Расчёт КФ сигналов Баркера

При вычислении корреляционной функции сигнала Баркера по формуле (3.87) следует учесть, что подынтегральная функция на каждом интервале — константа и, следовательно, КФ линейно зависит от τ. Поэтому достаточно найти значения КФ в узловых точках:

$$B(m)=\begin{cases} N, & m=0; \\ \pm 1 \text{ или } 0, & m\neq 0, \end{cases}$$

где $m = \tau/T$. При этом $m = 0, 1, 2, \ldots, N$.

АКФ действительного сигнала

Корреляционная функция непериодического сигнала

Корреляционную (автокорреляционную) функцию действительного сигнала $s(t)$ с конечной энергией определяют по формуле:

$$B(\tau) = \int_{-\infty}^{\infty} s(t)s(t+\tau)dt = \int_{-\infty}^{\infty} s(t)s(t-\tau)dt. \tag{3.87}$$

При этом $B(\tau)$ выражается в единицах энергии. Корреляционная функция $B(\tau)$ характеризует меру сходства сигнала $s(t)$ с его копией $s(t \pm \tau)$, смещенной на интервал $\pm\,\tau$. Переменная τ играет роль параметра; $B(\tau)$ — это функция сдвига τ между сигналом и его смещенной копией.

Для построения графика КФ достаточно узловые точки соединить прямыми линиями. На рис. 3.22 изображены КФ двух сигналов Баркера.

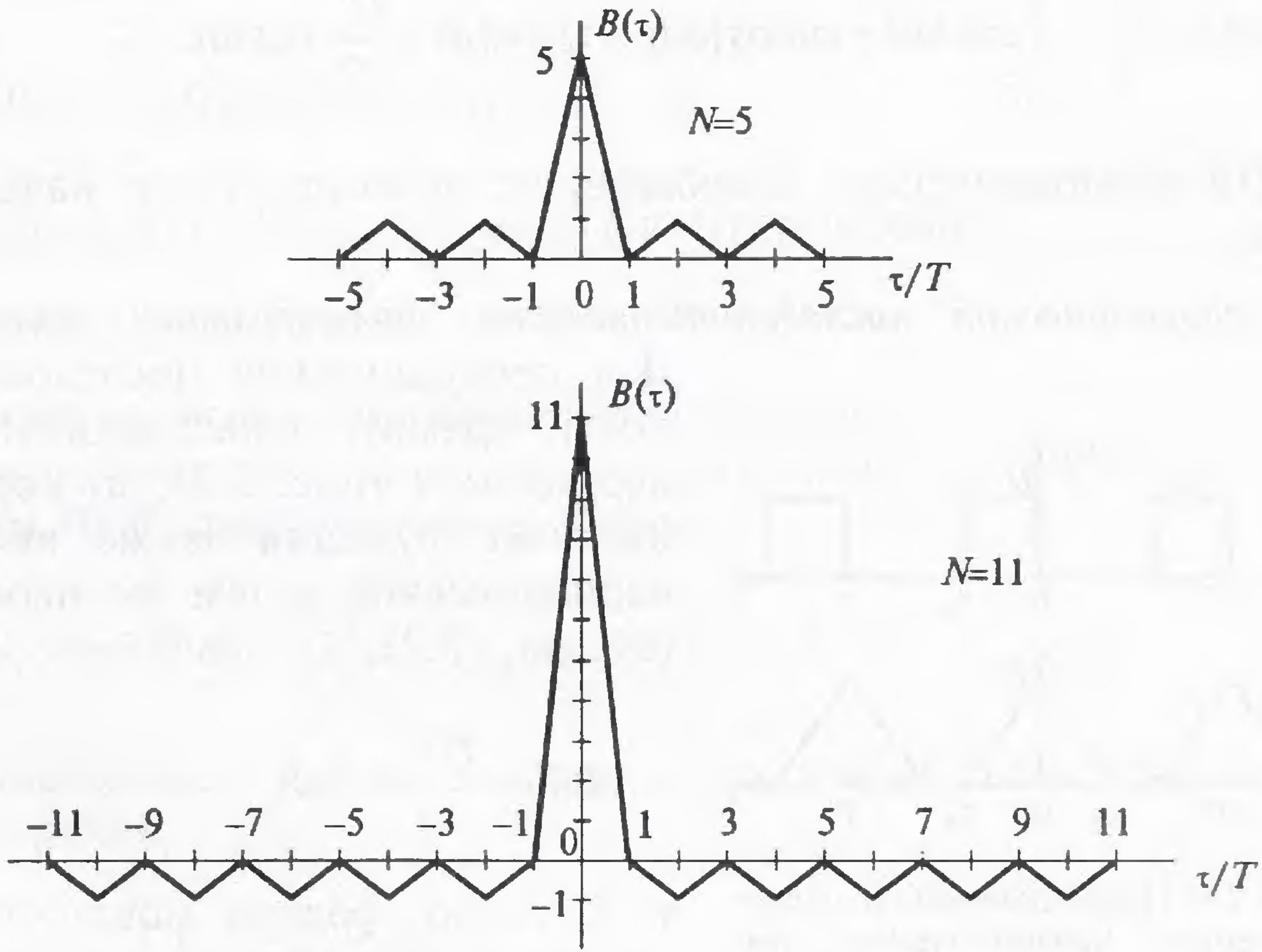


Рис. 3.22. Корреляционные функции сигналов Баркера при двух значениях N

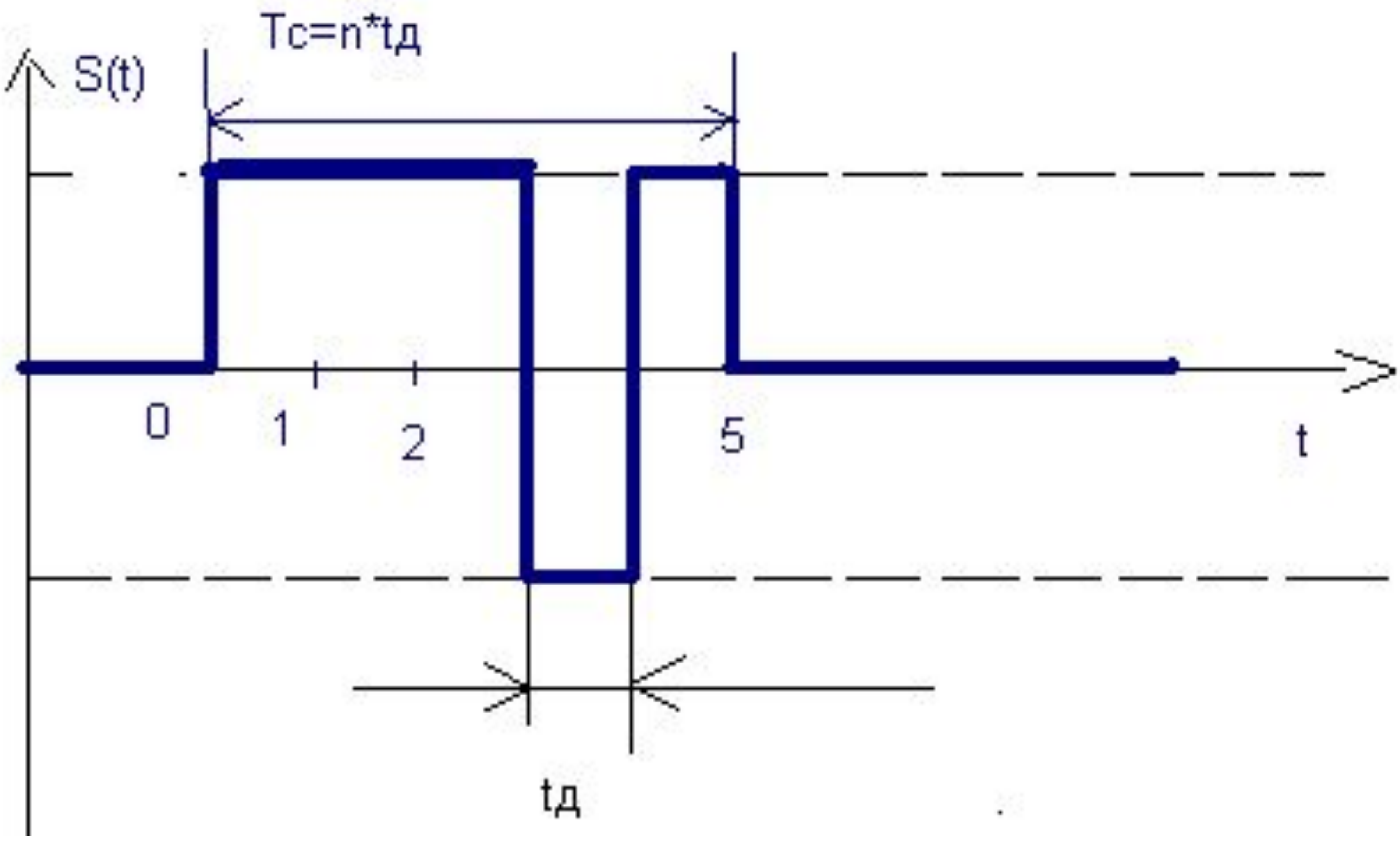
Графический расчёт АКФ сигнала с 5-и значным кодом Баркера

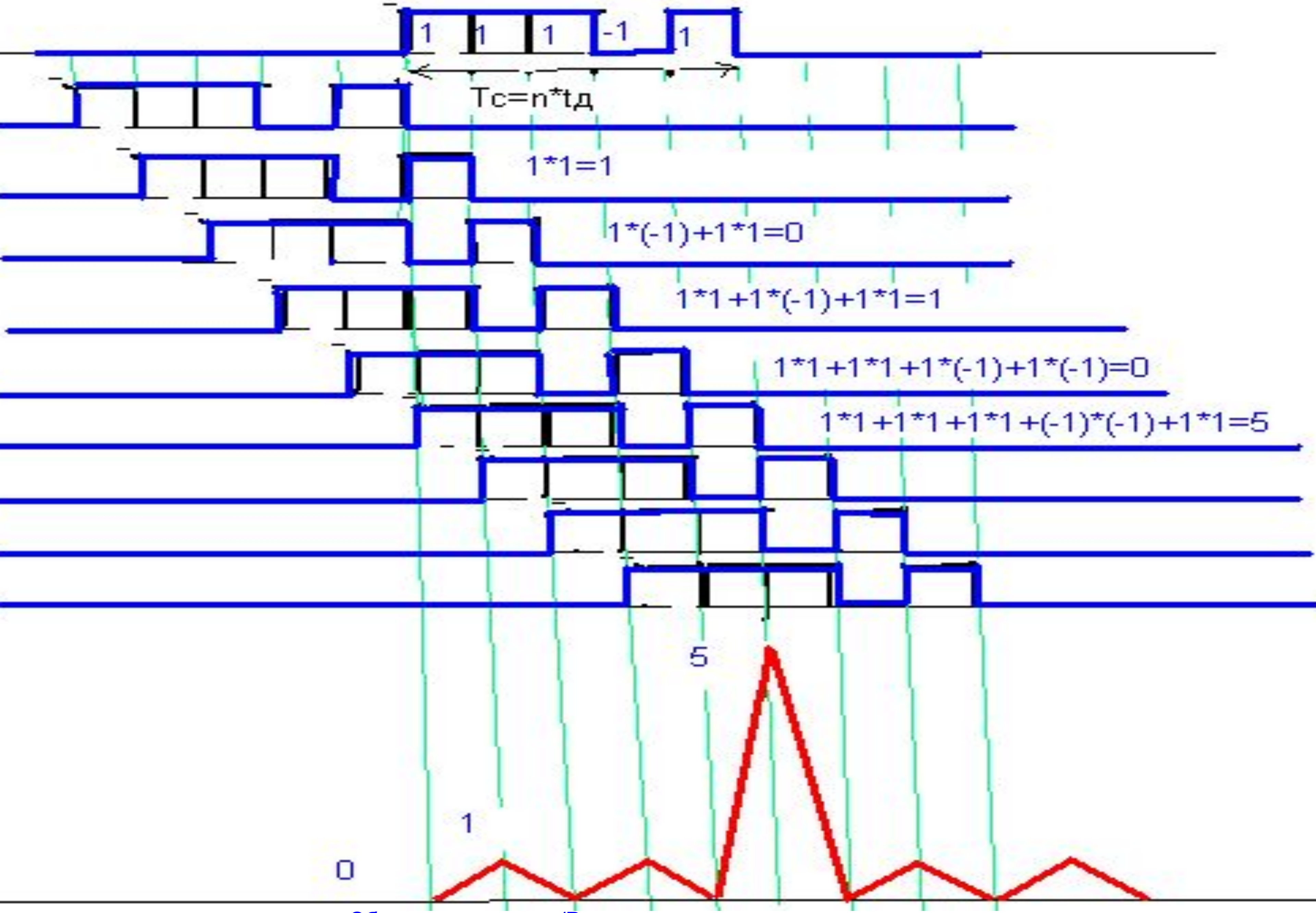
- Формула дискретной свёртки

$$R_n = \frac{N \times \Delta t}{N+1-n} \times \sum_{k=0}^{N-1} S_k \times S_{k-n}$$

- 1 клеточка – длительность одного дискрета или в Wi-Fi – длительность одного чипа
- Дома: чётные номера строят АКФ для 11-значного, нечётные - для 13-значного кода Баркера

5-и значный код Баркера




1
1
1
-1
1
Tc=n*tд
1*1=1
1*(-1)+1*1=0
1*1+1*(-1)+1*1=1
1*1+1*1+1*(-1)+1*(-1)=0
1*1+1*1+1*1+(-1)*(-1)+1*1=5
5
1
0

$$R_n = \frac{N \times \Delta t}{N+1-n} \times \sum_{k=0}^{N-1} S_k \times S_{k-n}$$

Расчет АКФ сигнала с использованием формулы

	0	1	2	3	4						
	1	1	1	-1	1						
n=0											
	1	1	1	1	1	1	-1	-1	1	1	
		1		1		1		1		1	
n=1											
	1	0	1	1	1	1					
		0		1		1		-1		-1	
n=2											
	1	0	1	0	1	1	-1	1	1	1	
		0		0		1		-1		1	
n=3											

Расчитать АКФ сигнала с использованием формулы

- На Mathcad для 11
- 13 значных кодов Баркера

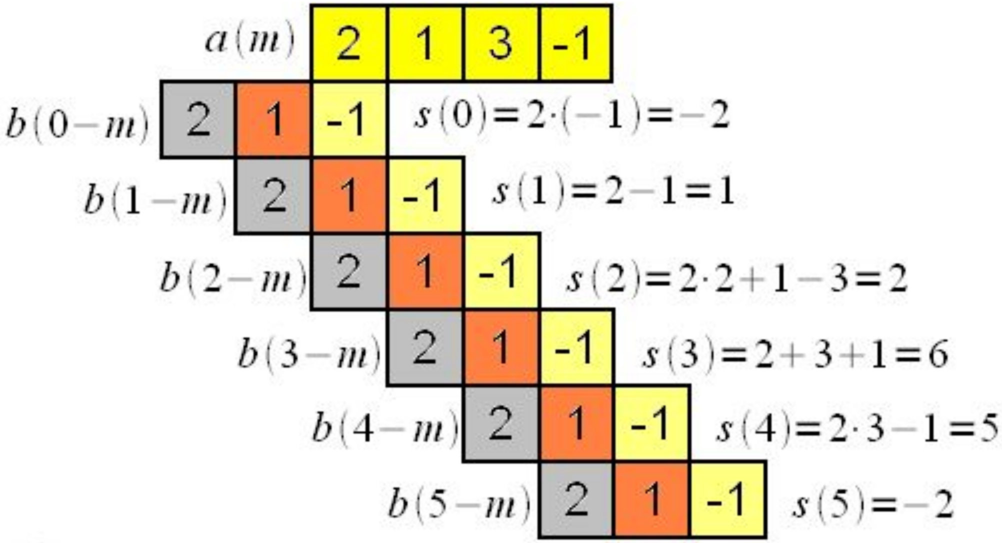
Линейная Дискретная свёртка (свёртка дискретных сигналов)
Длина первого N отсчетов, длина второго M отсчетов

$$s(n)=a*b=\sum_{m=0}^{n} a(m)\cdot b(n-m), \quad n=0..N+M-2.$$

Круговая (циклическая)Дискретная свертка
Обе последовательности имеют одинаковую длину N отсчетов
Чтобы выровнять длину последовательностей их дополняют нулями до длины M+N-1.

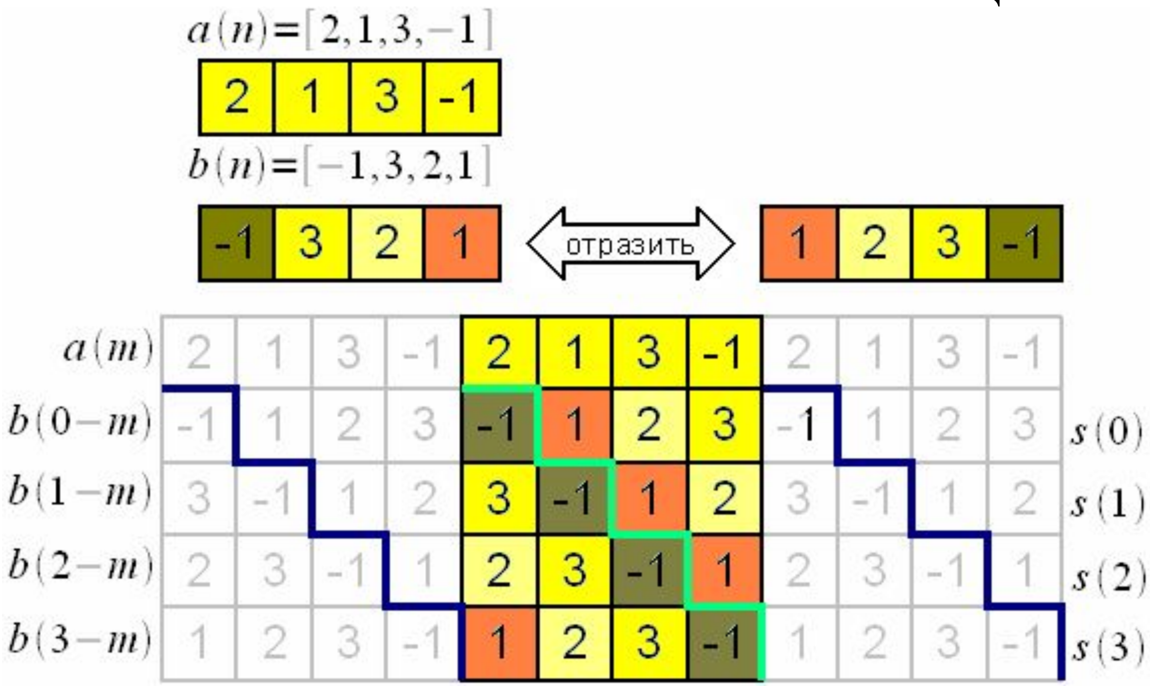
$$s(n)=\sum_{m=0}^{N-1} a(m)\cdot b(n-m), \quad n=0..N-1.$$

$$b(-m)=b(N-m)$$



Линейная свертка

Циклическая свертка



Линейная свертка = дополнить сигналы нулями и сделать циклическую свертку

$a(n) = [2,\ 1,\ 3,\ -1,\ 0,\ 0]$

2	1	3	-1	0	0

$b(n) = [-1,\ 1,\ 2,\ 0,\ 0,\ 0]$

-1	1	2	0	0	0

отразить

0	0	0	2	1	-1

$a(m)$	2	1	3	-1	0	0	
$b(0-m)$	-1	0	0	0	2	1	$s(0)=-2$
$b(1-m)$	1	-1	0	0	0	2	$s(1)=1$
$b(2-m)$	2	1	-1	0	0	0	$s(2)=2$
$b(3-m)$	0	2	1	-1	0	0	$s(3)=6$
$b(4-m)$	0	0	2	1	-1	0	$s(4)=5$
$b(5-m)$	0	0	0	2	1	-1	$s(5)=-2$

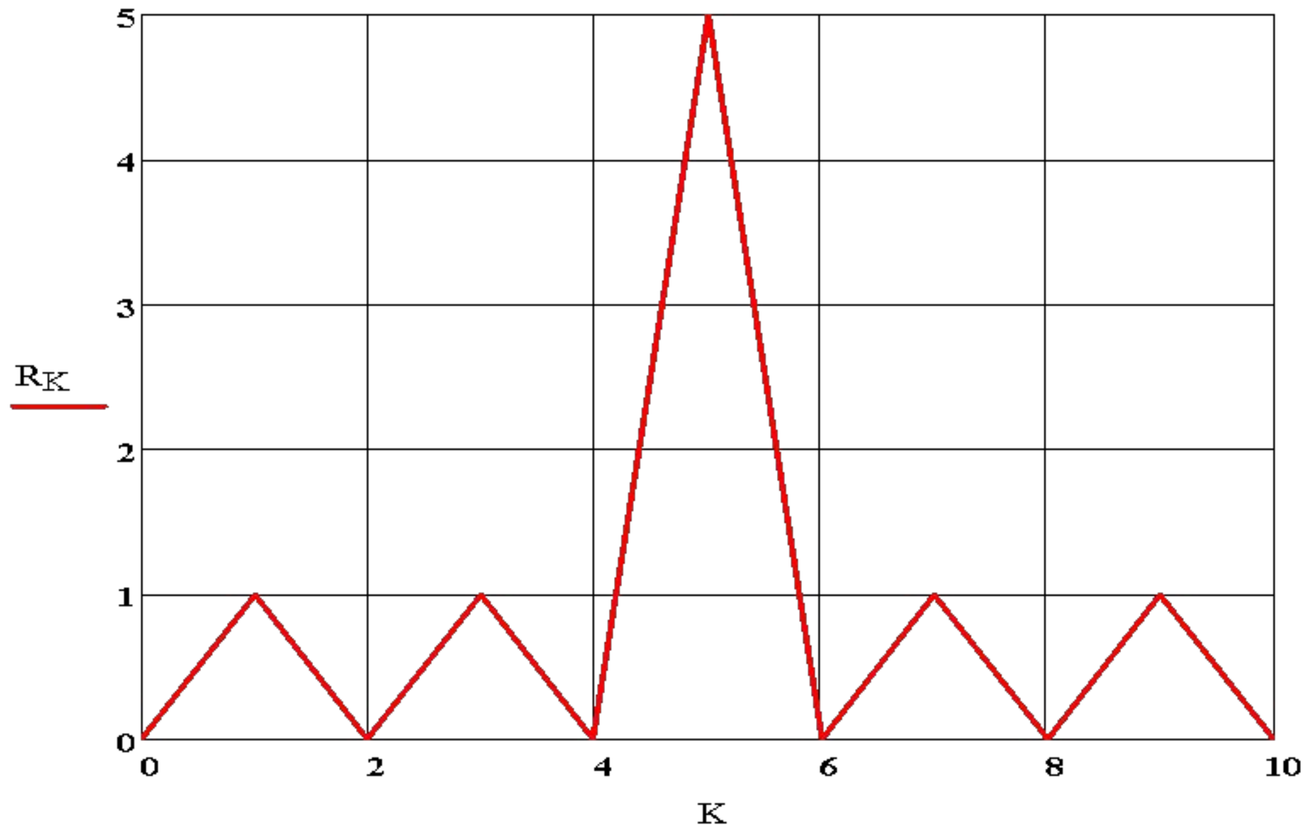
Ðàñ÷¸ò ëèíåéíîé ñâ¸ðòêè äèñêðåòíîãî ñèãíàëà ñ èñïîëüçîâàíèåì Mathcad

$S := (0\ \ 0\ \ 0\ \ 0\ \ 0\ \ 1\ \ 1\ \ 1\ \ -1\ \ 1\ \ 0\ \ 0\ \ 0\ \ 0\ \ 0)^T$ èñõîäíûé äèñêðåòíûé ñèãíàë, ïðåäñòàâëåííû òðàíñïîíèðîâàííîé ìàòðèöåé-ñòîëáöîì

$S1 := (1\ \ 1\ \ 1\ \ -1\ \ 1\ \ 0\ \ 0\ \ 0\ \ 0\ \ 0\ \ 0\ \ 0\ \ 0\ \ 0\ \ 0)^T$ çåðêàëüíûé èñõîäíîìó äèñêðåòíûé ñèãíàë, ïðåäñòàâëåííûé òðàíñïîíèðîâàííîé ìàòðèöåé-ñòîëáöîì

$K := 0..10$ $\qquad N := 0..4$

$$R_K := \sum_N \left[\left(S_{K+N}\right) \cdot S1_N\right]$$ ëèíåéíàÿ ñâ¸ðòêà äèñêðåòíîãî ñèãíàëà



«Горячие» клавиши Mathcad

∞ → ctrl + Shift + Z

e → e

π → ctrl + Shift + p

i → 1 + i

% → %, 0,01.

$:=$ → :

$\square \cdot \square , \square$ → ;

Приложение А

"Горячие" клавиши для ввода встроенных операторов

В этом приложении описана процедура ввода с клавиатуры ряда встроенных операторов. Приводятся только те операторы, для ввода которых требуется нажатие клавиш с отличными от обозначений операторов символами. Напоминаем, что альтернативным вариантом ввода является применение палитр математических символов.

В приведенном ниже списке операторов, вводимых с клавиатуры, используются следующие обозначения:

- A и B – массивы векторов или матриц;
- u и v – векторы с действительными или комплексными элементами;
- M – квадратная матрица;
- z и w – действительные или комплексные числа;
- x и y – действительные числа;
- m и n – целые числа;
- i – диапазон переменных;
- t – любое имя переменной;
- f – функция;
- X и Y – переменные или выражения любого типа.

Оператор	Обозначение	Клавиши	Описание
Круглые скобки	(X)	'	Изменение приоритета операций
Нижний индекс	A_n	[	Задание индексированной переменной
Верхний индекс	$A^{\langle n \rangle}$	[Ctrl]6	Выбор n-го столбца из массива A
Факториал	n!	!	Вычисляет факториал для целого неотрицательного числа n
Транспонировать	A^T	[Ctrl]l	Транспонирование матрицы A
Возведение в степень	z^w	^	Возведение числа z в степень w
Возведение в степень	M^n	^	Возведение в n-ю степень квадратной матрицы M (при n = –1 получение обратной матрицы)
Отрицание	–X	–	Умножение X на –1
Сумма вектора	$\sum v$	[Ctrl]4;	Вычисляет сумму элементов вектора v (возвращается скалярное значение)
Квадратный корень	$\sqrt{z}$	\	Вычисляет квадратный корень
Корень n-й степени	$\sqrt[n]{z}$	[Ctrl]\	Вычисляет корень n-й степени из числа z
Детерминант матрицы	$\lvert M \rvert$	|	УВозвращает определитель квадратной матрицы M
Деление	X/z	/	Деление выражения X на скаляр Z, не равный нулю (если X является массивом, то на z делится каждый элемент массива)
Умножение	X·Y	*	Вычисляет произведение X на Y, если X и Y являются скалярами. Умножает каждый элемент Y на X, если Y является массивом, а X – скаляром. Вычисляет точечное произведение, если

			X и Y – векторы одинакового размера. Выполняет умножение матриц, если X и Y являются подобными матрицами
Суммирование для конечного ряда	$\sum_{i=m}^{n} X$	[Ctrl][Shift]4	Вычисляет сумму членов X для i = m, m+1, ..., n, причем X может быть любым выражением
Произведение для конечного ряда	$\prod_{i=m}^{n} X$	[Ctrl][Shift]3	Вычисляет произведения членов X для i = m, m+1, ..., n, где X может быть любым выражением
Суммирование для бесконечного ряда	$\sum_{i} X$	$	Вычисляет сумму членов X бесконечного ряда
Произведение для бесконечного ряда	$\prod_{i} X$	#	Вычисляет произведение членов X бесконечного ряда
Предел функции в заданной точке	$\lim_{x \to a} f(x)$	[Ctrl]L	Вычисляет предел функции f (x) при x, стремящемся к a (выполняется только в режиме символьных вычислений)
Определенный интеграл	$\int_a^b f(t)\, dt$	&	Вычисляет определенный интеграл от подынтегральной функции f(t) с пределами интегрирования a –

			нижним и b – верхним
Неопределенный интеграл	$\int f(t)\, dt$	[Ctrl]I	Вычисляет в символьном виде неопределенный интеграл от подынтегральной функции f(t)
Производная заданной функции по переменной t	$\frac{d}{dt}f(t)$	?	Вычисляет первую производную функции f(t) по переменной t
n-я производная заданной функции по переменной t	$\frac{d^n}{dt^n}f(t)$	[Ctrl]?	Вычисляет n-ю производную функции f(t) по переменной t
Сложение	X+Y	+	Выполняет скалярное, векторное или матричное сложение X и Y
Вычитание	X–Y	–	Выполняет скалярное, векторное или матричное вычитание Y из X
Больше, чем	$x > y$	>	Возвращает 1, если x>y, иначе возвращает 0
Меньше, чем	$x < y$	<	Возвращает 1, если x<y, иначе возвращает 0
Больше или равно, чем	$x \geq y$	[Ctrl]0	Возвращает 1, если $x \geq y$, иначе возвращает 0
Меньше или равно, чем	$x \leq y$	[Ctrl]9	Возвращает 1, если $x \leq y$, иначе возвращает 0
Не равно	$z \neq w$	[Ctrl]3	Возвращает 1, если $z \neq w$, иначе