# Розділ 2

# Прийняття рішень в умовах визначеності

# Лекція4. Метод аналіза ієрархій

Зміст лекції:

1. **Приклад багатокритеріального експертного оцінювання альтернатив**
2. **Багатокритеріальне експертне оцінювання альтернатив Приклад розширеної ієрархії прийняття рішень.**
3. **Способи визначення вагових коефіцієнтів в методі аналіза ієрархій**
4. **Узгодженість матриць порівнянь**
5. **Рішення задач методом Аналіза ієрархій в Excel**
6. **Завдання на сам. роботу.**

Розглядається підхід до прийняття рішень в ситуаціях, коли, наприклад,

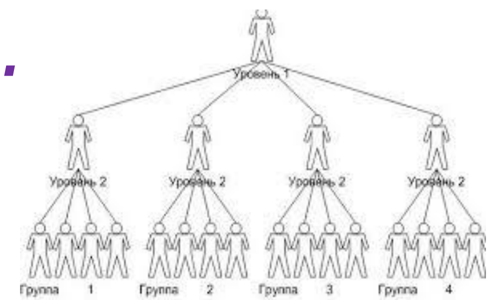
для ідей, почуттів, емоцій

*визначаються деякі* ***кількісні показники,***

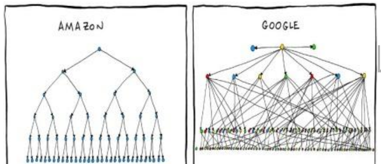
*що забезпечують* ***числову шкалу переваг для*** *можливих альтернативних рішень.*

Цей підхід відомий як

**метод аналізу ієрархій.**




*Перед тим як викласти деталі даного методу, розглянемо* ***приклад,*** *що демонструє спосіб, за допомогою якого оцінюються різні альтернативні рішення.*



# 1. Приклад багатокритеріального експертного оцін альтернатив

# Приклад багатокритеріального експертного оцінювання альтернатив

Приклад. Мартін Ганс - випускник-відмінник середньої школи, який отримав повну стипендію від трьох університетів: **A, B і C**.

Для того
щоб вибрати університет**,** *Альтернативи*

Мартін сформулював два основних
критерії:

**місцезнаходження університету**
та його **академічна репутація.**

# Приклад багатокритеріального експертного оцінювання альтернатив

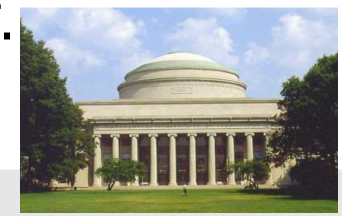
Приклад. Мартін Ганс - випускник-відмінник середньої школи, який отримав повну стипендію від трьох університетів: **A, B і C**. Для того щоб вибрати університет, Мартін сформулював два основних критерії: **місцезнаходження університету** та його **академічна репутація.**

Будучи відмінним учнем, він оцінює академічну репутацію університету в п'ять разів вище ніж його місцезнаходження. Це призводить до того, що **репутації університету** приписується вага приблизно **83%**,

а **місцезнохожденню- 17%.**

Далі Мартін використовує системний аналіз для оцінки університетів з точки зору їх місцезнаходження та репутації.

Проведений аналіз дає такі оцінки..

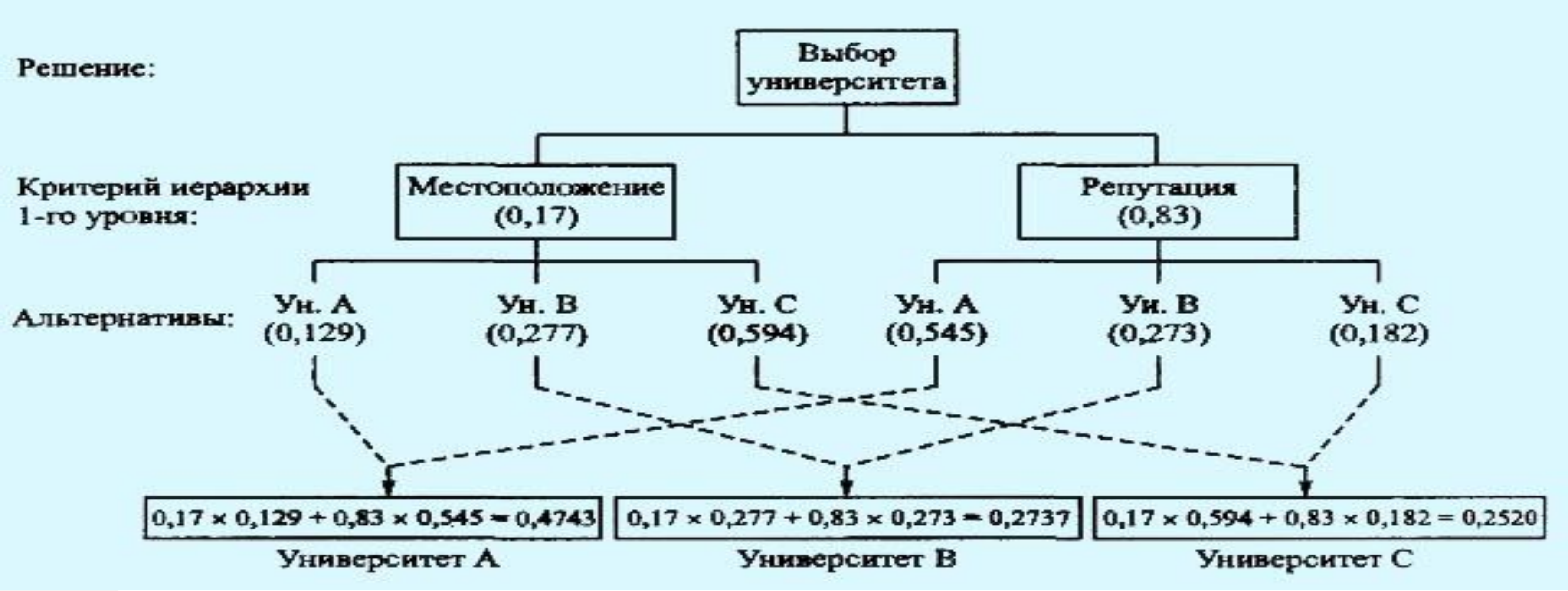


| *Університет* | | *Критерії* | |
|---|---|---|---|
| | *A* | *B* | *C* |
| *Місцехнаходження* | *12,9%* | *27,7%* | *59,4%* |
| *Репутація* | *54,5%* | *27,3%* | *18,2%* |

# Приклад багатокритеріального експертного оцінювання альтернатив

Задача має єдиний ієрархічний рівень з двома критеріями (місцезнаходження і репутація) і три альтернативних рішення (університети А, В і С).

***Ієрархія прийняття рішення***




Оцінка трьох університетів заснована на обчисленні комбінованого вагового коефіцієнта для кожного з них.
Університет А: 0,17 x 0,129 + 0,83 x 0,545 = **0,4743.**
Університет В: 0,17 x 0,277 + 0,83 x 0,273 = 0,2737.
Університет С: 0,17 x 0,594 + 0,83 x 0,182 = 0,2520.

На основі цих обчислень університет А отримує найвищу комбіновану вагу
Є оптимальним вибором Мартіна.

# Приклад багатокритеріального експертного оцінювання альтернатив

*Завдання на самост. Роботу. 1.*

*1.Скласти задачу вибору альтернативи (вибір*

- *покупки*
- *Теми наук. Роботи*
- *Наук керівника*
- *Місця роботи*
- *Місця відпочику*
- *Інше)*

*2. Задати дані*

*3. Вірішити  задачу вибору*

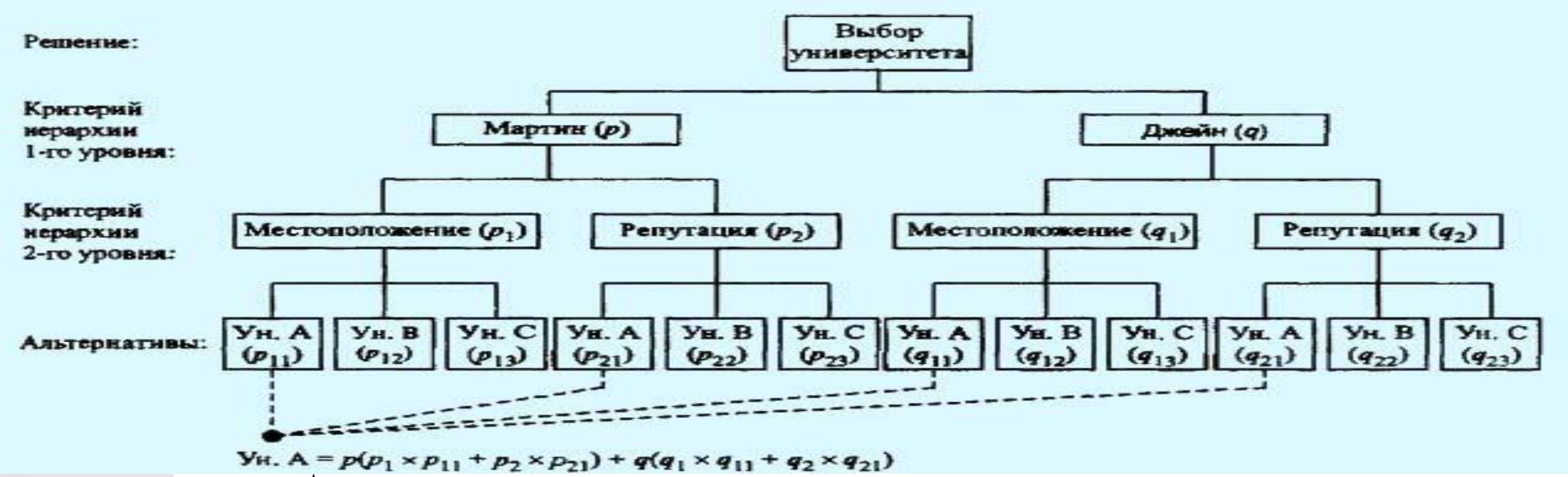
______________________________

- *Виконується в Конспекті*


# 2. Багатокритеріальне експертне оцінювання альтернатив Приклад розширеної ієрархії прийняття рішень.

## 2.Багатокритеріальне експертне оцінювання альтернатив. Приклад розширеної ієрархії прийняття рішень.

Загальна структура методу аналізу ієрархій може включати кілька ієрархічних рівнів . Припустимо, що сестра-близнюк Мартіна Джейн також отримала повну стипендію від трьох університетів. Однак їхні батьки ставлять умову, що діти повинні вчитися водному університеті, тоді вони зможуть користуватися одним автомобілем.Структура задачі вибору рішення включає два ієрархічних рівня зі своїми критеріями.

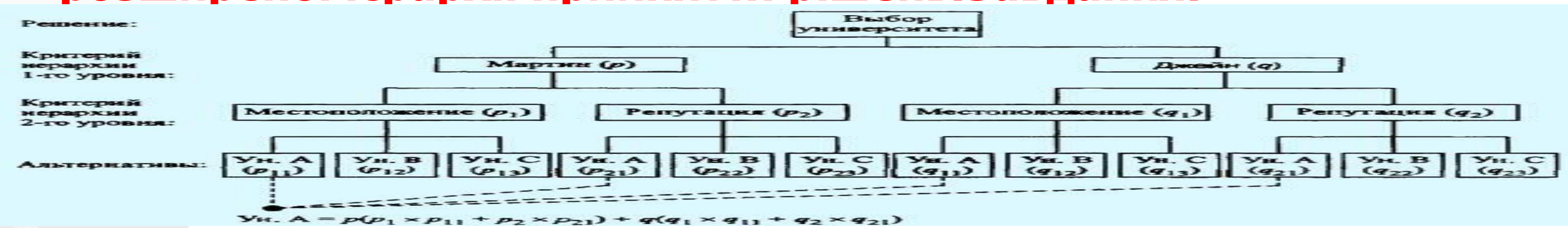



Величини p і q (імовірно рівні) на 1-му ієрархічному рівні - вагові коефіцієнти, які приписуються точці зору Мартіна і Джейн щодо процесу вибору відповідно.

2-й рівень використовує ваги (p 1, p 2) і (q1, q2) для відображення точок зору Мартіна і Джейн щодо критеріїв місцезнаходження та академічної репутації кожного університету. ($p + q = 1$, $p1 + p2 = 1$, $q1 + q2 = 1$, $p11 + p12 + p13 = 1$, $p21 + p22 + p23 = 1$, $q11 + q12 + q13 = 1$, $q21 + q22 + q23 = 1$)

3-й рівень **Підсумкові ваги** для ун-ту А, демонструють, як обчислюються показники.

## **2.** Багатокритеріальне експертне оцінювання альтернатив. Приклад розширеної ієрархії прийняття рішень.Завдання.




Завдання на сам. Роботу 2. Нехай для задачі вибору університету Мартіном і Джейн встановлені наступні значення вагових коефіцієнтів

***$p=0,5,\ q=0,5,$***

***$p_1=0,17,\ p_2=0,83,$***

***$p_{11}=0,129,\ p_{12}=0,277,\ p_{13}=0,594,$***

***$p_{21}=0,545,\ p_{22}=0,273,\ p_{23}=0,182,$***

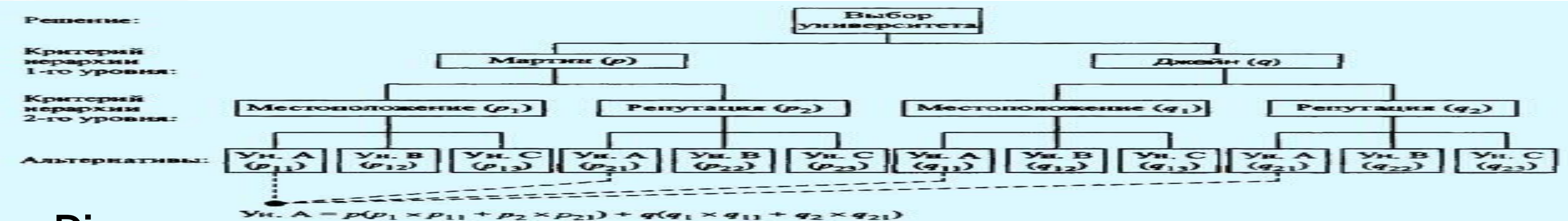
***$q_1=0,3,\ q_2=0,7,$***

***$q_{11}=0,2,\ q_{12}=0,3,\ q_{13}=0,5,$***

***$q_{21}=0,5,\ q_{22}=0,2,\ q_{23}=0,3,$***

***Задача- вибрати університет***

## **2.** Багатокритеріальне експертне оцінювання альтернатив. Приклад розширеної ієрархії прийняття рішень.




Рішення

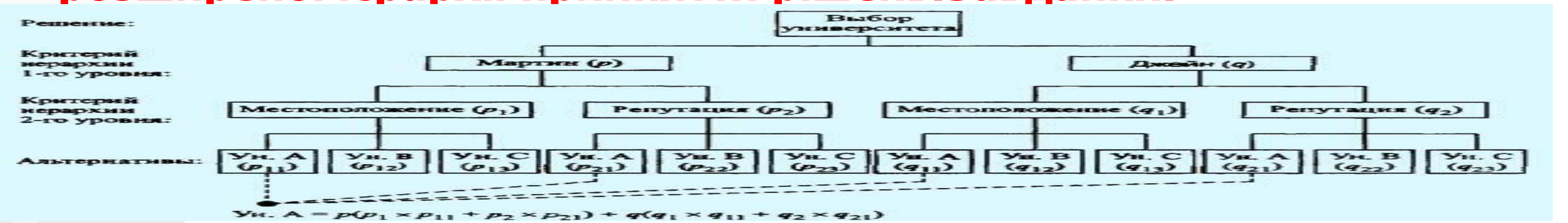
Університет A: $p(p_1*p_{11}+p_2*p_{21})+q(q_1*q_{11}+q_2*q_{21})$ = 0,5(0,17*0,129+0,83*0,545)+0,5(0,3*0,2+0,7*0,5) = **0,44214**

Університет B: $p(p_1*p_{12}+p_2*p_{22})+q(q_1*q_{12}+q_2*q_{22})$ = 0,5(0,17*0,277+0,83*0,273)+0,5(0,3*0,3+0,7*0,2) = 0,25184

Університет C: $p(p_1*p_{13}+p_2*p_{23})+q(q_1*q_{13}+q_2*q_{23})$ = 0,5(0,17*0,594+0,83*0,182)+0,5(0,3*0,5+0,7*0,3) = 0,30602

Університет A отримує найвищу комбіновану вагу і, отже, є оптимальним вибором.

## **2.** Багатокритеріальне експертне оцінювання альтернатив. **Приклад розширеної ієрархії прийняття рішень.Завдання.**




Завдання на сам. Роботу 2 Продовження

. $p=0,5$, $q=0,5$,

$p_1=0,17$, $p_2=0,83$,

$p_{11}=0,129$, $p_{12}=0,277$, $p_{13}=0,594$,

$p_{21}=0,545$, $p_{22}=0,273$, $p_{23}=0,182$,

$q_1=0,3$, $q_2=0,7$,

$q_{11}=0,2$, $q_{12}=0,3$, $q_{13}=0,5$,

$q_{21}=0,5$, $q_{22}=0,2$, $q_{23}=0,3$,

***Для кожного показника $p_1$, $p_2$,.....***
***Дати змістовний опис його Сутності.***

# Приклад багатокритеріального експертного оцінювання альтернатив

Завдання на самост. Роботу. 3

(аналог задачі 2,

але – з врахуванням вимог 2-х учасників)

1.Скласти задачу вибору альтернативи

(вибір

- покупки

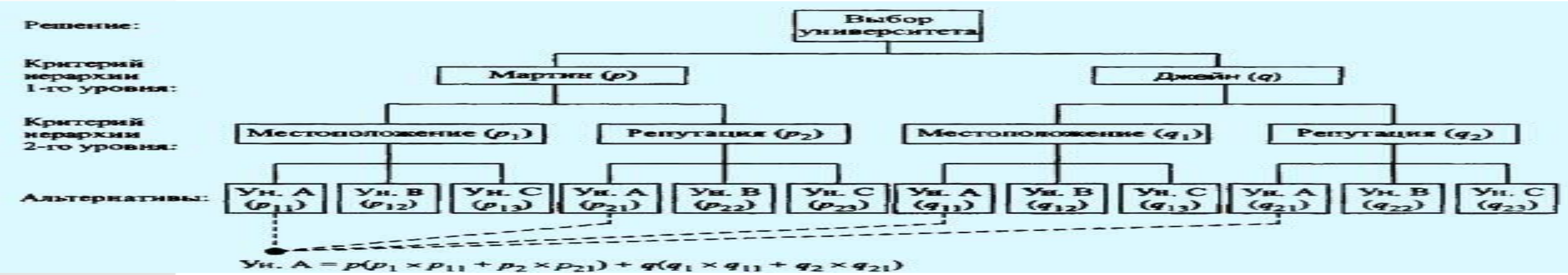
- Місця відпочику
- Інше)

2. Задати дані
3. Вірішити задачу вибору

---

- Виконується в Конспекті

## 2.Багатокритеріальне експертне оцінювання альтернатив.




# ?

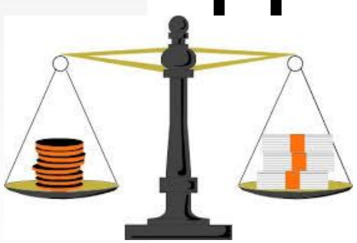
# Які Складності і проблеми підходу?

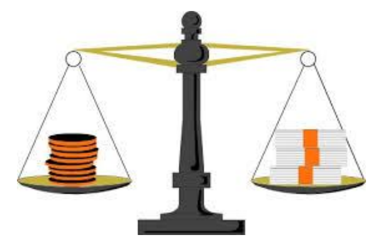
## 2. Багатокритеріальне експертне оцінювання альтернатив.

Складність методу аналізу ієрархій-

**у визначенні відносних вагових коефіцієнтів**

для оцінки альтернатив





# 3.Способи визначення вагових коефіцієнтів

# 3.Способи визначення вагових коефіцієнтів

Якщо задано **n критеріїв** на заданому рівні ієрархії,

Створюється матриця **А розмірності n**,

( називається ***матрицею парних порівнянь***)

*відображає судження ОПР , щодо важливості різних критеріїв*.

Парне порівняння виконується таким чином, що

**критерій в рядку i (i = 1, 2, ..., n)**

оцінюється щодо кожного

з критеріїв,

**представлених n стовпцями.**







Позначимо через aij елемент матриці А, що знаходиться на перетині і-го

# 3.Способи визначення вагових коефіцієнтів

Позначимо через $a_{ij}$ елемент матриці А, що знаходиться на перетині i-го рядка і j-го стовпця.

Відповідно до методу аналізу ієрархій для опису оцінок використовуються цілі числа **від 1 до 9.**

При цьому:

- $a_{ij} = 1$ *означає, що і-й і j-й критерії* **однаково важливі,**
- $a_{ij} = 5$ *відображає думку, що і-й критерій* **значно важливіше**, ніж j-й,
- $a_{ij} = 9$ *вказує, що і-й критерій* **надзвичайно важливіше** j-го.

# 3.Способи визначення вагових коефіцієнтів

Інші проміжні значення між 1 і 9 інтерпретуються аналогічно.

Узгодженість таких позначень забезпечується наступною умовою:

якщо $a_{ij}$ **= k**, то *автоматично* $a_{ji}$ **= 1 / k**.

Крім того,

**всі діагональні елементи** $a_{ij}$ матриці **A** повинні бути **рівні 1**, так як вони виражають оцінку критеріїв щодо самих себе.

# 3.Способи визначення вагових коефіцієнтів Приклад.

Покажемо, як визначається матриця порівняння А для задачі вибору Мартіна із 1-го прикладу лекції .

## Головний ієрархічний рівень

(критерії академічної репутації університету та місцезнаходження)

З точки зору Мартіна, академічна репутація університету значно важливіше його місцезнаходження.

Отже, він приписує елементу (2, 1) матриці А значення 5, тобто $a_{21} = 5$.

Це автоматично передбачає, що $a_{12} = 1/5$.

Позначивши через R і L критерії репутації університету та його місцезнаходження, можна записати матрицю порівняння наступним чином.

$$A = \begin{array}{c} \\ L \\ R \end{array} \begin{array}{c} \begin{array}{cc} L & R \end{array} \\ \begin{pmatrix} 1 & \frac{1}{5} \\ 5 & 1 \end{pmatrix} \end{array}.$$

# 3.Способи визначення вагових коефіцієнтів Приклад.

$$A = \begin{array}{cc} & \begin{array}{cc} L & R \end{array} \\ \begin{array}{c} L \\ R \end{array} & \begin{pmatrix} 1 & \frac{1}{5} \\ 5 & 1 \end{pmatrix} \end{array}.$$

Відносні ваги критеріїв R і L можуть бути визначені шляхом ділення елементів кожного стовпця на суму елементів цього ж стовпця.

Отже, для нормалізації матриці A ділимо елементи першого стовпця на величину 1 + 5 = 6,

елементи другого - на величину 1 + 1/5 = 1,2.

Шукані відносні ваги $\mathbf{w}_R$ и $\mathbf{w}_L$ критеріїв обчислюються тепер у вигляді середніх значень елементів відповідних рядків нормализованої матриці A. Отже,

$$N = \begin{array}{cc} & \begin{array}{cc} L & R \end{array} \\ \begin{array}{c} L \\ R \end{array} & \begin{pmatrix} 0.17 & 0.17 \\ 0.83 & 0.83 \end{pmatrix} \end{array}$$

Средние значения элементов строк

$$w_R = (0,83 + 0,83)/2 = 0,83,$$

$$w_L = (0,17 + 0,17)/2 = 0,17.$$

# 3.Способи визначення вагових коефіцієнтів Приклад.

Средние значения элементов строк

$$N = \begin{array}{c|cc} & L & R \\ \hline L & 0.17 & 0,17 \\ R & 0.83 & 0,83 \end{array}$$

$$w_R = (0,83 + 0,83)/2 = 0,83.$$
$$w_L = (0,17 + 0,17)/2 = 0,17.$$

Результат обчислень

- $\mathbf{w_R}$ = 0,83 та
- $\mathbf{w_L}$ = 0,17.

Стовпці матриці N однакові, що має місце лише у випадку, коли ОПР проявляє ідеальну узгодженість у визначенні елементів матриці А.

# 3.Способи визначення вагових коефіцієнтів

Відносні ваги альтернативних рішень, відповідних університетам A, B і C, обчислюються в межах кожного критерію R і L з використанням двох матриць порівняння.

$$
\mathbf{A}_L = \begin{array}{c} \\ A \\ B \\ C \end{array} \begin{array}{c} \begin{array}{ccc} A & B & C \end{array} \\ \begin{pmatrix} 1 & \frac{1}{2} & \frac{1}{5} \\ 2 & 1 & \frac{1}{2} \\ 5 & 2 & 1 \end{pmatrix} \end{array}.
$$

Суммы элементов столбцов $=[8, \ 3.5, \ 1.7]$.

$$
\mathbf{A}_R = \begin{array}{c} \\ A \\ B \\ C \end{array} \begin{array}{c} \begin{array}{ccc} A & B & C \end{array} \\ \begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 \\ \frac{1}{2} & 1 & \frac{3}{2} \\ \frac{1}{3} & \frac{2}{3} & 1 \end{pmatrix} \end{array}.
$$

Суммы элементов столбцов $=[1.83, \ 3.67, \ 5.5]$.

*Елементи матриць $A_R$ і $A_L$ визначені на основі суджень Мартіна, що стосуються "ступеня реалізованості критерію" у кожному з 3 університетів.*

# 3.Способи визначення вагових коефіцієнтів

При діленні елементів кожного стовпця матриць $\mathbf{A_R}$ і $\mathbf{A_L}$ на суму елементів цих же стовпців отримуємо нормалізовані матриці.

$$\begin{array}{cc} & \begin{array}{ccc} A & B & C \end{array} \\ \mathbf{A}_L = \begin{array}{c} A \\ B \\ C \end{array} & \begin{pmatrix} 1 & \frac{1}{2} & \frac{1}{5} \\ 2 & 1 & \frac{1}{2} \\ 5 & 2 & 1 \end{pmatrix}, \end{array}$$

Суммы элементов столбцов $= [8,\ 3.5,\ 1.7]$.

$$\begin{array}{cc} & \begin{array}{ccc} A & B & C \end{array} \\ \mathbf{A}_R = \begin{array}{c} A \\ B \\ C \end{array} & \begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 \\ \frac{1}{2} & 1 & \frac{3}{2} \\ \frac{1}{3} & \frac{2}{3} & 1 \end{pmatrix}, \end{array}$$

Суммы элементов столбцов $= [1.83,\ 3.67,\ 5.5]$.

$$\begin{array}{cc} & \begin{array}{ccc} A & B & C \end{array} \\ \mathbf{N}_L = \begin{array}{c} A \\ B \\ C \end{array} & \begin{pmatrix} 0,125 & 0,143 & 0,118 \\ 0,250 & 0,286 & 0,294 \\ 0,625 & 0,571 & 0,588 \end{pmatrix}. \end{array}$$

Средние значения элементов строк

$w_{LA} = (0,125 + 0,143 + 0,118)/3 = 0,129,$

$w_{LB} = (0,250 + 0,286 + 0,294)/3 = 0,277,$

$w_{LC} = (0,625 + 0,571 + 0,588)/3 = 0,594.$

$$\begin{array}{cc} & \begin{array}{ccc} A & B & C \end{array} \\ \mathbf{N}_R = \begin{array}{c} A \\ B \\ C \end{array} & \begin{pmatrix} 0,545 & 0,545 & 0,545 \\ 0,273 & 0,273 & 0,273 \\ 0,182 & 0,182 & 0,182 \end{pmatrix}. \end{array}$$

Средние значения элементов строк

$w_{RA} = (0,545 + 0,545 + 0,545)/3 = 0,545,$

$w_{RB} = (0,273 + 0,273 + 0,273)/3 = 0,273,$

$w_{RC} = (0,182 + 0,182 + 0,182)/3 = 0,182.$

Величини ($\mathbf{w_{RA}}$, $\mathbf{w_{RB}}$, $\mathbf{w_{RC}}$) = (0,545, 0,273, 0,182) дають **ваги для університетів A, B і C з точки зору академічної репутації**

Аналогічно величини ($\mathbf{w_{LA}}$, $\mathbf{w_{LB}}$, $\mathbf{w_{LC}}$) = (0,129, 0,277, 0,594) є відносними **вагами, що стосуються місцезнаходження університетів.**

# 4.Узгодженість матриць порівнянь

# 4.Узгодженість матриць порівнянь

У попередньому прикладі відзначали, що всі стовпці нормалізованих матриць **N** і $\mathbf{N_R}$ ідентичні, а стовпці матриці $\mathbf{N_L}$ такими не є.

Однакові стовпці вказують на те, що результуючі відносні ваги зберігають одне і те ж значення незалежно від того, як виконується порівняння.

В цьому випадку говорять, що

***вихідні матриці порівняння***
***$A$ і $A_R$, є узгодженими.***

Отже, матриця $\mathbf{A_L}$ не є такою.

# 4.Узгодженість матриць порівнянь





Узгодженість означає, що рішення буде узгоджене з визначенням парних порівнянь критеріїв або альтернатив.

З математичної точки зору узгодженість матриці А означає,

що $\mathbf{a_{ij}a_{jk} = a_{ik}}$ для всіх **i, j** та **k**

Наприклад, в матриці $\mathbf{A_R}$ із прикладу(див. вище)

$\mathbf{a_{13}} = 3$ та $\mathbf{a_{12}a_{23}} = 3$

# 4.Узгодженість матриць порівнянь

Властивість узгодженості ***вимагає лінійної залежності*** стовпців (і рядків) матриці А.

Зокрема, стовпці будь-якої матриці порівнянь розмірністю 2х2 є залежними

така матриця завжди **є узгодженою**.

Не всі матриці порівнянь є узгодженими.

*Приймаючи до уваги, що такі матриці будуються на основі* ***людських суджень****,*
*можна очікувати деяку* ***ступінь неузгодженості.***

# 4.Узгодженість матриць порівнянь

Щоб з'ясувати, чи є рівень узгодженості "допустимим", необхідно визначити відповідну кількісну міру для матриці порівнянь А.

У прикладі ми бачили, що ідеально узгоджена матриця А породжує нормализовану матрицю N, в якій всі стовпці однакові

$$\mathbf{A} = \begin{array}{c c} & \begin{array}{cc} L & R \end{array} \\ \begin{array}{c} L \\ R \end{array} & \begin{pmatrix} 1 & \frac{1}{5} \\ 5 & 1 \end{pmatrix} \end{array}.$$

$$\mathbf{N} = \begin{array}{c c} & \begin{array}{cc} L & R \end{array} \\ \begin{array}{c} L \\ R \end{array} & \begin{pmatrix} 0.17 & 0.17 \\ 0.83 & 0.83 \end{pmatrix} \end{array}$$

$$\mathbf{N} = \begin{pmatrix} w_1 & w_1 & \cdots & w_1 \\ w_2 & w_2 & \cdots & w_2 \\ \vdots & \vdots & \vdots & \vdots \\ w_n & w_n & \cdots & w_n \end{pmatrix}.$$

# 4.Узгодженість матриць порівнянь

Звідси випливає, що матриця порівнянь A може бути отримана з матриці N **шляхом ділення елементів i-го стовпчика на $w_i$** (це процес, зворотний до знаходження матриці N з A). Отже, отримуємо наступне..

$$\mathbf{N} = \begin{pmatrix} w_1 & w_1 & \cdots & w_1 \\ w_2 & w_2 & \cdots & w_2 \\ \vdots & \vdots & \vdots & \vdots \\ w_n & w_n & \cdots & w_n \end{pmatrix}.$$

$$\mathbf{A} = \begin{pmatrix} 1 & \frac{w_1}{w_2} & \cdots & \frac{w_1}{w_n} \\ \frac{w_2}{w_1} & 1 & \cdots & \frac{w_2}{w_n} \\ \vdots & \vdots & \vdots & \vdots \\ \frac{w_n}{w_1} & \frac{w_n}{w_2} & \cdots & 1 \end{pmatrix}.$$

# 4.Узгодженість матриць порівнянь

Використовуючи наведене визначення матриці А, маємо.

$$\begin{pmatrix} 1 & \frac{w_1}{w_2} & \cdots & \frac{w_1}{w_n} \\ \frac{w_2}{w_1} & 1 & \cdots & \frac{w_2}{w_n} \\ \vdots & \vdots & \vdots & \vdots \\ \frac{w_n}{w_1} & \frac{w_n}{w_2} & \cdots & 1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} w_1 \\ w_2 \\ \vdots \\ w_n \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} nw_1 \\ nw_2 \\ \vdots \\ nw_n \end{pmatrix} = n \begin{pmatrix} w_1 \\ w_2 \\ \vdots \\ w_n \end{pmatrix}.$$

# 4.Узгодженість матриць порівнянь

У компактній формі умова узгодженості матриці A формулюється таким чином. Матриця A буде узгодженої тоді і тільки тоді, коли.

$$\begin{pmatrix} 1 & \frac{w_1}{w_2} & \cdots & \frac{w_1}{w_n} \\ \frac{w_2}{w_1} & 1 & \cdots & \frac{w_2}{w_n} \\ \vdots & \vdots & \vdots & \vdots \\ \frac{w_n}{w_1} & \frac{w_n}{w_2} & \cdots & 1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} w_1 \\ w_2 \\ \vdots \\ w_n \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} nw_1 \\ nw_2 \\ \vdots \\ nw_n \end{pmatrix} = n \begin{pmatrix} w_1 \\ w_2 \\ \vdots \\ w_n \end{pmatrix}.$$

$$Aw=nw$$

де **w** — вектор-стовбець відносних вагів $\mathbf{w_i}$, $\mathbf{i = 1, 2, ..., n}$.

Коли матриця A не є узгодженою, відносна вага $\mathbf{w_i}$ апроксимується середнім значенням **n** елементів **i**-го рядка нормализованної матриці N (див. Приклад вище).

# 4.Узгодженість матриць порівнянь

Коли матриця А не є узгодженою, відносна вага $\mathbf{w_i}$ апроксимується **середнім значенням n елементів і-го рядка** нормализованої матриці N (див. Приклад вище).

**не співпадають**

- 

*Не узгоджена матр*

$$
\begin{array}{cc}
 & \begin{array}{ccc} A & B & C \end{array} \\
N_L = \begin{array}{c} A \\ B \\ C \end{array} & \begin{pmatrix} 0,125 & 0,143 & 0,118 \\ 0,250 & 0,286 & 0,294 \\ 0,625 & 0,571 & 0,588 \end{pmatrix},
\end{array}
$$

Средние значения элементов строк

$$w_{LA} = (0,125 + 0,143 + 0,118)/3 = 0,129,$$
$$w_{LB} = (0,250 + 0,286 + 0,294)/3 = 0,277,$$
$$w_{LC} = (0,625 + 0,571 + 0,588)/3 = 0,594.$$

- *Узгоджена матр*

$$
\begin{array}{cc}
 & \begin{array}{ccc} A & B & C \end{array} \\
N_R = \begin{array}{c} A \\ B \\ C \end{array} & \begin{pmatrix} 0,545 & 0,545 & 0,545 \\ 0,273 & 0,273 & 0,273 \\ 0,182 & 0,182 & 0,182 \end{pmatrix}.
\end{array}
$$

Средние значения элементов строк

$$w_{RA} = (0,545 + 0,545 + 0,545)/3 = 0,545,$$
$$w_{RB} = (0,273 + 0,273 + 0,273)/3 = 0,273,$$
$$w_{RC} = (0,182 + 0,182 + 0,182)/3 = 0,182.$$

**співпадають**

# 4.Узгодженість матриць порівнянь

Позначивши через $\bar{\mathbf{w}}$ обчислену оцінку (середнє значення),

$$
\begin{array}{cc}
 & \begin{array}{ccc} A & B & C \end{array} \\
N_L = \begin{array}{c} A \\ B \\ C \end{array} & \begin{pmatrix} 0{,}125 & 0{,}143 & 0{,}118 \\ 0{,}250 & 0{,}286 & 0{,}294 \\ 0{,}625 & 0{,}571 & 0{,}588 \end{pmatrix},
\end{array}
\quad
\begin{array}{l}
\text{Средние значения элементов строк} \\
w_{LA} = (0{,}125 + 0{,}143 + 0{,}118)/3 = 0{,}129, \\
w_{LB} = (0{,}250 + 0{,}286 + 0{,}294)/3 = 0{,}277, \\
w_{LC} = (0{,}625 + 0{,}571 + 0{,}588)/3 = 0{,}594.
\end{array}
$$

$$
\begin{array}{cc}
 & \begin{array}{ccc} A & B & C \end{array} \\
N_R = \begin{array}{c} A \\ B \\ C \end{array} & \begin{pmatrix} 0{,}545 & 0{,}545 & 0{,}545 \\ 0{,}273 & 0{,}273 & 0{,}273 \\ 0{,}182 & 0{,}182 & 0{,}182 \end{pmatrix}.
\end{array}
\quad
\begin{array}{l}
\text{Средние значения элементов строк} \\
w_{RA} = (0{,}545 + 0{,}545 + 0{,}545)/3 = 0{,}545, \\
w_{RB} = (0{,}273 + 0{,}273 + 0{,}273)/3 = 0{,}273, \\
w_{RC} = (0{,}182 + 0{,}182 + 0{,}182)/3 = 0{,}182.
\end{array}
$$

можна показати, що $\mathbf{A}\bar{\mathbf{w}} = n_{max}\bar{\mathbf{w}}$, , де $\mathbf{n_{max}} \geq \mathbf{n}$

В цьому випадку, чим ближче $\mathbf{n_{max}}$ до $\mathbf{n}$,

**тим більш узгодженою є матриця порівняння А**

# 4.Узгодженість матриць порівнянь

В результаті згідно з методом аналізу ієрархій обчислюється коефіцієнт узгодженості у вигляді

.

$$CR = \frac{CI}{RI},$$

Де

$$CI = \frac{n_{max} - n}{n - 1}$$

- коефіцієнт узгодженості матриці А

.

$$RI = \frac{1{,}98(n-2)}{n}$$

-стохастичний коефіцієнт узгодженості матриці А

*Стохастичний коефіцієнт узгодженості RI визначається емпіричним шляхом як середнє значення коефіцієнта CI для великої вибірки генерованих випадковим чином матриць порівняння А.*

# 4.Узгодженість матриць порівнянь

Коефіцієнт узгодженості CR використовується для перевірки узгодженості матриці порівняння A наступним чином.

Якщо **CR <0,1,**

рівень неузгодженості **є прийнятним**.

Інакше рівень неузгодженості матриці порівняння A **є високим,** ОПР , рекомендується **перевірити елементи парного порівняння** $\mathbf{a_{ij}}$ матриці A в цілях отримання більш узгодженої матриці.

# 4.Узгодженість матриць порівнянь

Значення **n**$_{max}$ обчислюється на основі матричного рівняння $\mathbf{A}\bar{\mathbf{w}} = n_{max}\bar{\mathbf{w}}$. При цьому неважко помітити, що **і**-е рівняння цієї системи має вигляд:

$$\sum_{j=1}^{n} a_{ij}\bar{w}_j = n_{max}\bar{w}_i, \quad i = 1, 2, \ldots, n.$$

Оскільки $\sum_{i=1}^{n} \bar{w}_i = 1$, легко перевірити, що

$$\sum_{i=1}^{n}\left(\sum_{j=1}^{n} a_{ij}\bar{w}_j\right) = n_{max}\sum_{i=1}^{n}\bar{w}_i = n_{max}.$$

$$\Downarrow$$

Величину **n**$_{max}$ можна визначити шляхом обчислення вектор-стовпця **Aw** з наступним сумуванням його елементів.

# 4.Узгодженість матриць порівнянь

В прикладі матриця $\mathbf{A}_L$ є неузгодженою, так як стовпці матриці $\mathbf{N}_L$ неоднакові. Потрібно дослідити узгодженість матриці $\mathbf{A}_L$ . Обчислимо значення $\mathbf{n}_{max}$. З даних прикладу

$$\bar{w}_1 = 0{,}129,\ \bar{w}_2 = 0{,}277,\ \bar{w}_3 = 0{,}594.$$

Виходячи з цього

$$\mathbf{A}_L \bar{\mathbf{w}} = \begin{pmatrix} 1 & \frac{1}{2} & \frac{1}{5} \\ 2 & 1 & \frac{1}{2} \\ 3 & 2 & 1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 0{,}129 \\ 0{,}277 \\ 0{,}594 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0{,}3863 \\ 0{,}8320 \\ 1{,}7930 \end{pmatrix}.$$

$n_{max}$ *= 0,3863 + 0,8320 + 1,7930 =* ***3,0113***

---

- $\mathbf{N_L}$ ⇒

$$\begin{array}{cc} & \begin{array}{ccc} A & B & C \end{array} \\ \begin{array}{c} A \\ \mathrm{N}_L = B \\ C \end{array} & \begin{pmatrix} 0{,}125 & 0{,}143 & 0{,}118 \\ 0{,}250 & 0{,}286 & 0{,}294 \\ 0{,}625 & 0{,}571 & 0{,}588 \end{pmatrix}, \end{array}$$

Средние значения элементов строк

$$w_{LA} = (0{,}125 + 0{,}143 + 0{,}118)/3 = 0{,}129,$$
$$w_{LB} = (0{,}250 + 0{,}286 + 0{,}294)/3 = 0{,}277,$$
$$w_{LC} = (0{,}625 + 0{,}571 + 0{,}588)/3 = 0{,}594.$$

# 4.Узгодженість матриць порівнянь

$$n_{max} = 0{,}3863 + 0{,}8320 + 1{,}7930 = 3{,}0113$$

Таким чином , для **n** = 3 маємо

$$CI = \frac{n_{max} - n}{n-1} = \frac{3{,}0113-3}{3-1} = 0{,}00565,$$

$$RI = \frac{1{,}98(n-2)}{n} = \frac{1{,}98 \times 1}{3} = 0{,}66,$$

$$CR = \frac{CI}{RI} = \frac{0{,}00565}{0{,}66} = 0{,}00856.$$

- Оскільки **CR** < 0,1, рівень узгодженості матриці $\mathbf{A_L}$ є припустимим

- $\mathbf{N_L}$

$$\begin{array}{cc} & \begin{array}{ccc} A & B & C \end{array} \\ N_L = \begin{array}{c} A \\ B \\ C \end{array} & \begin{pmatrix} 0{,}125 & 0{,}143 & 0{,}118 \\ 0{,}250 & 0{,}286 & 0{,}294 \\ 0{,}625 & 0{,}571 & 0{,}588 \end{pmatrix}, \end{array}$$

Средние значения элементов строк

$$w_{LA} = (0{,}125 + 0{,}143 + 0{,}118)/3 = 0{,}129,$$
$$w_{LB} = (0{,}250 + 0{,}286 + 0{,}294)/3 = 0{,}277,$$
$$w_{LC} = (0{,}625 + 0{,}571 + 0{,}588)/3 = 0{,}594.$$

A B C Средние значения элементов строк

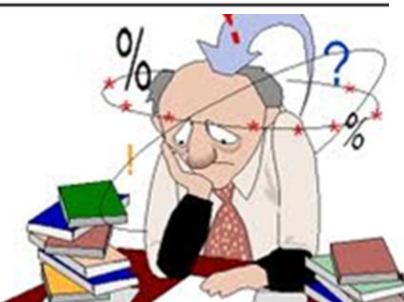

# 5. Рішення задач методом Аналіза ієрархій в Excel


# 5. Рішення задач методом Аналіза ієрархій в Excel

# 5.Рішення задач методом Аналіза ієрархій в Excel

| | A | B | C | D | E | F | G | H | I | J | K | L | M | N | O | P | Q | R |
|---|---|---|---|---|---|---|---|---|---|---|---|---|---|---|---|---|---|---|
| 1 | Ввод: матрица сравнения | | | | | | | | | | Краткий отчет решения | | | | | | | |
| 2 | Наименование матрицы | | | | | | | | | | | A | | | | | | |
| 3 | Размерность: | 3 | << Максимум 8 | | | | | | | | R | 0,833 | | | | | | |
| 4 | Матрица | UA | UB | UC | | | | | | | L | 0,167 | | | | | | |
| 5 | UA | 1 | 0,5 | 0,2 | | | | | | | | AR | | AL | | | | |
| 6 | UB | 2 | 1 | 0,5 | | | | | | | UA | 0,129 | UA | 0,546 | | | | |
| 7 | UC | 5 | 2 | 1 | | | | | | | UB | 0,277 | UB | 0,273 | | | | |
| 8 | | | | | | | | | | | UC | 0,595 | UC | 0,182 | | | | |
| 9 | | | | | | | | | | | | | | | | | | |
| 10 | | | | | | | | | | | | | | | | | | |
| 11 | | | | | | | | | | | | | | | | | | |
| 12 | | | | | | | | | | | | | | | | | | |
| 14 | Сумма эл. столбцов | 8 | 3,5 | 1,7 | 0 | 0 | 0 | 0 | 0 | | | | | | | | | |
| 15 | Вывод: нормализованная матрица | | | | | | | | | | | | | | | | | |
| 16 | | Nmax= | 3,00746 | CR= | 0,00565 | | | | | | | | | | | | | |
| 17 | | UA | UB | UC | | | | | | Вес | | | | | | | | |
| 18 | UA | 0,125 | 0,143 | 0,118 | | | | | | 0,129 | | | | | | | | |
| 19 | UB | 0,250 | 0,286 | 0,294 | | | | | | 0,277 | Заключительное ранжирование | | | | | | | |
| 20 | UC | 0,625 | 0,571 | 0,588 | | | | | | 0,595 | | | | 0,476017461 | | | | |
| 21 | | | | | | | | | | | | | | 0,273402055 | | | | |
| 22 | | | | | | | | | | | | | | 0,250580484 | | | | |
| 23 | | | | | | | | | | | | | | | | | | |
| 24 | | | | | | | | | | | | | | | | | | |
| 25 | | | | | | | | | | | | | | | | | | |

**Завдання- розробити і описати…**



# 5. Завдання на сам. роботу

***Задача 1.*** Отдел кадров фирмы сузил поиск будущего сотрудника до трех кандидатур: Стив **(S)**, Джейн **(J)** и Маиса **(M)**. Конечный отбор основан на трех критериях: собеседование **(C)**, опыт работы **(O)** и рекомендации **(P)**. Отдел кадров использует матрицу **A** (приведенную ниже) для сравнения трех критериев. После проведенного собеседования с тремя претендентами, сбора данных, относящихся к опыту их работы и рекомендациям, построены матрицы $\mathbf{A_c}$, $\mathbf{A_o}$ и $\mathbf{A_p}$. Какого из трех кандидатов следует принять на работу? Оцените согласованность данных.

$$A = \begin{array}{cc} & \begin{array}{ccc} C & O & P \end{array} \\ \begin{array}{c} C \\ O \\ P \end{array} & \begin{pmatrix} 1 & 2 & 1/4 \\ 1/2 & 1 & 1/5 \\ 4 & 5 & 1 \end{pmatrix} \end{array} \qquad A_C = \begin{array}{cc} & \begin{array}{ccc} S & J & M \end{array} \\ \begin{array}{c} S \\ J \\ M \end{array} & \begin{pmatrix} 1 & 3 & 4 \\ 1/3 & 1 & 1/5 \\ 1/4 & 5 & 1 \end{pmatrix} \end{array}$$

$$A_0 = \begin{array}{cc} & \begin{array}{ccc} S & J & M \end{array} \\ \begin{array}{c} S \\ J \\ M \end{array} & \begin{pmatrix} 1 & 1/3 & 2 \\ 3 & 1 & 1/2 \\ 1/2 & 2 & 1 \end{pmatrix} \end{array} \qquad A_C = \begin{array}{cc} & \begin{array}{ccc} S & J & M \end{array} \\ \begin{array}{c} S \\ J \\ M \end{array} & \begin{pmatrix} 1 & 1/2 & 1 \\ 2 & 1 & 1/2 \\ 1 & 2 & 1 \end{pmatrix} \end{array}$$

***Задача 2.*** Автор книги по исследованию операций определил три критерия для выбора издательства, которое будет печатать его книгу: процент авторского гонорара **(R)**, уровень маркетинга **(M)** и размер аванса **(A)**. Издательства **H** и **P** проявили интерес к изданию книги. Используя приведенные ниже матрицы сравнения, необходимо дать оценку двум издательствам и оценить согласованность решения.

$$A = \begin{array}{c} \\ R \\ M \\ A \end{array} \begin{array}{c} \begin{array}{ccc} R & M & A \end{array} \\ \begin{pmatrix} 1 & 1 & 1/4 \\ 1 & 1 & 1/5 \\ 4 & 5 & 1 \end{pmatrix} \end{array} \qquad A_R = \begin{array}{c} \\ H \\ P \end{array} \begin{array}{c} \begin{array}{cc} H & P \end{array} \\ \begin{pmatrix} 1 & 2 \\ 1/2 & 1 \end{pmatrix} \end{array}$$

$$A_M = \begin{array}{c} \\ H \\ P \end{array} \begin{array}{c} \begin{array}{cc} H & P \end{array} \\ \begin{pmatrix} 1 & 1/2 \\ 2 & 1 \end{pmatrix} \end{array} \qquad A_A = \begin{array}{c} \\ H \\ P \end{array} \begin{array}{c} \begin{array}{cc} H & P \end{array} \\ \begin{pmatrix} 1 & 1 \\ 1 & 1 \end{pmatrix} \end{array}$$