Методы оптимизации

4.Методы решения задач линейного программирования

4.1. ВВЕДЕНИЕ

Линейное программирование (ЛП) — это метод математического моделирования, разработанный для оптимизации использования ограниченных ресурсов. ЛП успешно применяется в военной области, экономике, транспорте и т.д. Широкое использование этого метода также подкрепляется высокоэффективными компьютерными алгоритмами, реализующими данный метод. На алгоритмах линейного программирования (учитывая их компьютерную эффективность) базируются оптимизационные алгоритмы для других, более сложных типов моделей и задач, включая целочисленное, нелинейное и стохастическое программирование.

Большинство задач решаемые методами исследования операций могут быть сформулированы так:

Найти:

$$max\ f(x_1, ..., x_n)$$

при m ограничениях

$$G_1(x_1, ..., x_n) \leq B_1,$$

$$\dots\dots\dots\dots\dots\dots$$

$$\dots\dots\dots\dots\dots\dots$$

$$G_m(x_1, ..., x_n) \leq B_m.$$

где f - ЦФ (например: стоимость, доход);

$x_1, ..., x_m$ - варьируемые параметры.

Вычисления в методе ЛП, как и во многих задачах ИО, как правило, очень трудоемкие и поэтому требуют применения вычислительной техники

4.2.ОГРАНИЧЕНИЯ В МОДЕЛИ ЛИНЕЙНОГО ПРОГРАММИРОВАНИЯ

В этом разделе на простом примере с двумя переменными показаны основные элементы модели ЛП. Далее этот пример будет обобщен в общую задачу линейного программирования.

Пример 2.1

Компания производит краску для внутренних и наружных работ из сырья двух типов: ***M1*** и ***M2***. Следующая таблица представляет основные данные для задачи.

	Расход сырья (в тоннах) на тонну краски		Максимально возможный
	для наружных работ	для внутренних работ	ежедневный расход сырья
Сырье *M1*	6	4	24
Сырье *M2*	1	2	6
Доход на тонну краски	5	4	

Отдел маркетинга компании ограничил ежедневное производство краски для внутренних работ до 2 т (из-за отсутствия надлежащего спроса), а также поставил условие, чтобы ежедневное производство краски для внутренних работ не превышало более чем на тонну аналогичный показатель производства краски для внешних работ. Компания хочет определить оптимальное (наилучшее) соотношение между видами выпускаемой продукции для максимизации общего ежедневного дохода.

Задача (модель) линейного программирования, как и любая задача исследования операций, включает три основных элемента.

1. Переменные, которые следует определить.
2. Целевая функция, подлежащая оптимизации.
3. Ограничения, которым должны удовлетворять переменные.

Определение переменных — первый шаг в создании модели. После определения переменных построение ограничений и целевой функции обычно не вызывает трудностей.

В нашем примере необходимо определить ежедневные объемы производства краски для внутренних и наружных работ. Обозначим эти объемы как переменные модели:

x_1 — ежедневный объем производства краски для наружных работ;

x_2 — ежедневный объем производства краски для внутренних работ.

Используя эти переменные, далее строим целевую функцию. Логично предположить, что целевая функция, как суммарный ежедневный доход, должна возрастать при увеличении ежедневных объемов производства красок. Обозначим эту функцию через z и положим, что

$$z = 5x_1 + 4x_2.$$

В соответствии с целями компании получаем задачу:
Максимизировать $z = 5x_1 + 4x_2$.

Итак, остался не определенным последний элемент модели — условия (ограничения), которые должны учитывать ограниченные возможности ежедневного потребления сырья и ограниченность спроса на готовую продукцию. Другими словами, ограничения на сырье можно записать следующим образом:

$$\begin{bmatrix} \text{Используемый объем} \\ \text{сырья для производства} \\ \text{обоих видов краски} \end{bmatrix} \le \begin{bmatrix} \text{Максимально возможный} \\ \text{ежедневный расход сырья} \end{bmatrix}$$

Из таблицы с данными имеем следующее.

Используемый объем сырья $M1 = 6x_1 + 4x_2$ (т) Используемый объем сырья $M2 = 1x_1 + 2x_2$ (т)

Так как ежедневный расход сырья **$M1$** и **$M2$** ограничен соответственно 24 и 6 тоннами, получаем следующие ограничения.

$6x_1 + 4x_2 \le 24$ (сырье $M1$); $1x_1 + 2x_2 \le 6$ (сырье $M2$)

Существует еще два ограничения по спросу на готовую продукцию: (1) максимальный ежедневный объем производства краски для внутренних работ не должен превышать 2т и (2) ежедневный объем производства краски для внутренних работ не должен превышать ежедневный объем производства краски для наружных работ более чем на одну тонну. Первое ограничение простое и записывается как $x_2 \le 2$. Второе можно сформулировать так: разность между ежедневными объемами производства красок для внутренних и наружных работ не должна превышать одной тонны, т.е. $x_2 - x_1 \le 1$.

Еще одно неявное ограничение состоит в том, что переменные x_1 и x_2 должны быть неотрицательными. Таким образом, к сформулированным выше ограничениям необходимо добавить условие неотрицательности переменных: $x_1 \ge 0, x_2 \ge 0$. (В главе 3 мы увидим, что это условие весьма важно для разработки алгоритмов решения задачи ЛП.)

Максимизировать $z = 5x_1 + 4x_2$ при выполнении ограничений

$$6x_1 + 4x_2 \le 24,$$
$$1x_1 + 2x_2 \le 6,$$
$$-x_1 + x_2 \le 1,$$
$$x_2 \le 2,$$
$$x_1 \ge 0,\ x_2 \ge 0.$$

Любое решение, удовлетворяющее ограничениям модели, является допустимым. Например, решение $x_1 = 3$ и $x_2 = 1$ будет допустимым, так как не нарушает ни одного ограничения, включая условие неотрицательности. Чтобы удостовериться в этом, подставьте значения $x_1 = 3$ и $x_2 = 1$ в левые части неравенств системы ограничений и убедитесь, что ни одно неравенство не нарушается. Значение целевой функции при этом решении будет равно $z = 5 \times 3 + 4 \times 1 = 19$ (тысяч долларов).

Итак, задача сформулирована, теперь встает вопрос о нахождении оптимального допустимого решения, доставляющего максимум целевой функции. После некоторых раздумий приходим к выводу, что задача имеет много (фактически, бесконечно много) допустимых решений. По этой причине невозможна подстановка значений переменных для поиска оптимума, т.е. нельзя применить простой перебор всех допустимых решений. Следовательно, необходима эффективная процедура отбора допустимых решений для поиска оптимального. В разделе 2.3 показан графический метод нахождения оптимального допустимого решения, а в главе 3 описано его алгебраическое обобщение.

В предыдущем примере целевая функция и все ограничения были линейными. Свойство линейности функций предполагает следующее.

1. Значения левых частей неравенств ограничений и значение целевой функции прямо пропорциональны значениям переменных.

2. Аддитивность переменных означает, что общий вклад всех переменных в значения целевой функции и левых частей неравенств ограничений является прямой суммой вкладов каждой отдельной переменной.

4.3. ГРАФИЧЕСКОЕ РЕШЕНИЕ ЗАДАЧИ ЛИНЕЙНОГО ПРОГРАММИРОВАНИЯ

В этом разделе будет показано, как в задаче ЛП с двумя переменными можно получить решение графическим способом. Хотя такая задача редко встречается на практике (типовая задача ЛП обычно содержит тысячи переменных), идеи, вытекающие из графического способа нахождения оптимального решения, будут положены в основу построения общего метода решения задачи ЛП (называемого симплекс-методом).

Графический способ решения задачи ЛП состоит из двух этапов.

1. Построение пространства допустимых решений, удовлетворяющих всем ограничениям модели.

2. Нахождение оптимального решения среди всех точек пространства допустимых решений.

4.3.3. ДОПОЛНИТЕЛЬНЫЕ ПЕРЕМЕННЫЕ

Мы использовали неравенства типа "меньше или равно" (знак неравенства ≤) и "больше или равно" (знак неравенства ≥). В этих примерах также предполагалась неотрицательность всех переменных. В данном разделе мы введем два типа дополнительных неотрицательных переменных (назовем их остаточными и избыточными), которые связаны с неравенствами типа "≤" и "≥" соответственно. Введем также понятие свободной переменной, которая может принимать как положительные, так и отрицательные значения (и, конечно, значение 0).

Отметим, что в русской математической литературе для этих типов переменных не используются какие-либо специальные названия - они известны просто как дополнительные переменные (хотя иногда их также называют балансными). В неравенствах они различаются тем, что перед остаточной переменной всегда стоит знак "плюс", а перед избыточной - "минус".

Остаточная переменная. Неравенства типа "≤" обычно можно интерпретировать как ограничения на использование некоторых ресурсов (представленных в левой части неравенств переменными модели). В такой интерпретации остаточная переменная показывает количество неиспользованных ресурсов. В примере 2.1 неравенство $6x_1 + 4x_2 \le 24$ связано с использованием сырья ***M1***. Это неравенство эквивалентно равенству $6x_1 + 4x_2 + s_1 = 24$, где $s_1 \ge 0$. Здесь остаточная переменная s_1 $(= 24 - 6x_1 - 4x_2)$ равна неиспользуемому количеству сырья ***M1***.

Избыточная переменная. Неравенство типа "≥" показывает, что "что-то" должно быть не меньше определенной величины. Избыточная переменная определяет превышение значения левой части неравенства над этой величиной. Например, в модели "диеты" неравенство $x_1 + x_2 \ge 800$ показывает, что суточное производство пищевой добавки не должно быть меньше 800 фунтов. Математически это неравенство эквивалентно равенству $x_1 + x_2 - s_1 = 800$, где $s_1 \ge 0$. Положительное значение избыточной переменной s_1 показывает превышение суточного производства добавки над минимальным значением в 800 фунтов.

Свободная переменная. В приведенных выше примерах условие неотрицательности переменных является естественным. Но, конечно, возможны ситуации, когда переменные могут принимать любые действительные значения. Такая ситуация показана в следующем примере.

Пример 2.3-3

Ресторан быстрого обслуживания торгует порционными мясными пирогами и чизбургерами. На порцию мясного пирога идет четверть фунта мяса, а на чизбургер — только 0.2 фунта. В начале рабочего дня в ресторане имеется 200 фунтов мяса, можно еще прикупить мясо в течение дня, но уже с наценкой в 25 центов. Мясо, оставшееся в конце рабочего дня, жертвуется благотворительной организации "Горячий суп". Ресторан имеет доход 20 центов от одной порции мясного пирога и 15 центов — от одного чизбургера. Как и многие другие, этот ресторан не может продать в день более 900 бутербродов. Какова должна быть доля каждого из бутербродов (т.е. сколько порций мясного пирога и сколько чизбургеров) в ежедневном производстве ресторана, чтобы максимизировать его доход?

Сначала рассмотрим ограничения. Обозначим через x_1 и x_2 соответственно количество порций мясного пирога и чизбургеров, производимых рестораном. Для их производства ресторан может ограничиться 200 фунтами мяса или может прикупить еще. В первом случае получаем ограничение в виде неравенства $0.25x_1 + 0.2x_2 \le 200$, а во втором — $0.25x_1 + 0.2x_2 \ge 200$. Естественно, выбор одного из этих неравенств будет существенно влиять на возможное оптимальное решение. Так как мы не знаем, какое из них необходимо, логично заменить их одним равенством $0.25x_1 + 0.2x_2 + x_3 = 200$, где x_3 — свободная переменная. Фактически свободная переменная x_3 в данной ситуации одновременно играет роли как остаточной, так и избыточной переменных.

Далее построим целевую функцию. Ресторан хочет максимизировать свой доход. Очевидно, что для максимизации дохода желательно как можно больше продавать своей продукции, но для этого необходимы дополнительные закупки мяса.

В этом случае переменная x_3 должна быть отрицательной, т.е. должна играть роль избыточной переменной.

Для того чтобы раскрыть "двойственную" природу переменной x_3, используем стандартный математический прием, а именно представим ее в следующем виде: $x_3 = x_3^+ - x_3^-$, где $x_3^+, x_3^- \ge 0$

Если $x_3^+ > 0$ и $x_3^- = 0$, тогда переменная x_3 играет роль остаточной. Если, напротив, $x_3^- > 0$ и $x_3^+ = 0$, тогда переменная x_3 выступает в роли избыточной. (В главе 3 будет показана ситуация, когда оптимальное решение задачи линейного программирования достигается при положительных значениях как x_3^+, так и x_3^-.) Итак, теперь ограничение можно записать в виде равенства

$$0.25x_1 + 0.2x_2 + x_3^+ - x_3^- = 200.$$

Целевая функция получает следующее выражение.

Максимизировать $z = 0.20x_1 + 0.15x_2 - 0.25x_3^-$