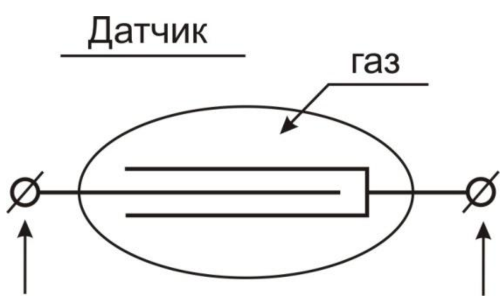
3. Статистические функции распределения

3.1. Понятия о статистическом законе распределения

3.1.1. Дискретные функции распределения

Счетчик Гейгера – прибор, который регистрирует пролетающие через него частицы с высокой энергией. Он состоит из датчика и усилителя электрического сигнала.



Высокое напряжение

Рис. 1

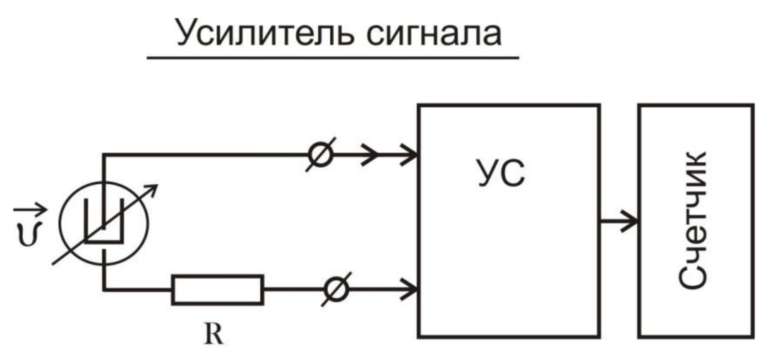


Рис. 2

В момент прохождения частицы с высокой энергией счетчик воспринимает сигнал с усилителя сигнала УС и пересчитывает число частиц. В течение заданного интервала времени Δt схема фиксирует количество пролетевших через счетчик частиц ΔN. Затем счетчик запускается снова на время Δt и идет запись полученных значений в таблицу

t	Δt	$2\Delta t$	$3\Delta t$	$4\Delta t$	$5\Delta t$	$\cdots$	$10\Delta t$
ΔN	3	5	7	10	9	$\cdots$	1
$\Delta N / \Delta t$	3	5	7	10	9	$\cdots$	1

$\Delta N / \Delta t$ - число частиц, появившихся за интервал времени Δt.

При этом время t изменяется в пределах от t до $t + 10\Delta t$.

Строим график $\Delta N / \Delta t = f(t)$ (см. рис. 3)

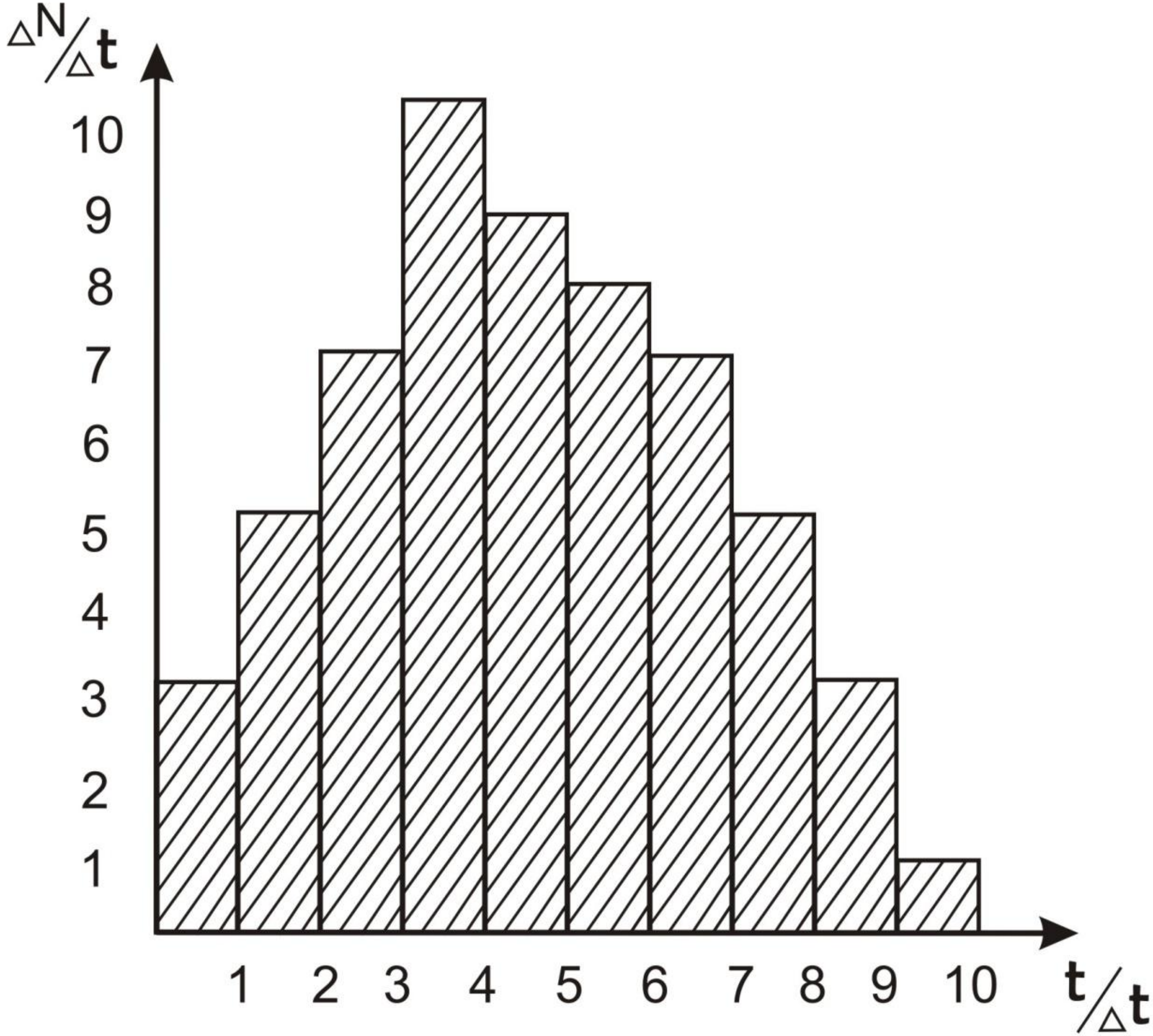


Рис. 3

График $\Delta N / \Delta t = f(t)$ - называется дискретной функцией распределения (математики называют его гистограммой). Она показывает: какое число быстрых частиц пролетело через счетчик в момент времени от t до $t + \Delta t$. Из графика видно, что если t=0, то от 0 до Δt их было 3 частицы, а от момента времени $3\Delta t$ до $4\Delta t$ их было 10 частиц.

Если сложить площадь всех столбиков на графике:

$$\sum_{i=1}^{k} \frac{\Delta N}{\Delta t} \cdot \Delta t = N$$ - полное число частиц, пролетевших через счетчик (1)

$N=3+5+7+10+9+8+7+5+3+1=58$ частиц.

Можно ввести нормированную на число частиц дискретную функцию распределения:

$$\varphi(t) = \frac{1}{N} \cdot f(t) = \frac{1}{N} \cdot \frac{\Delta N}{\Delta t} \qquad (2)$$

Если полное число частиц (1) поделить на N, то получим условие нормировки функции распределения

$$\frac{1}{N} \sum_{i=1}^{k} \frac{\Delta N}{\Delta t} \cdot \Delta t = 1 \qquad (3)$$

Функция (2) показывает какая доля частиц пролетает через счетчик в момент времени от t до $t+\Delta t$. В интервале от 0 до Δt их $3/58$, в интервале от $3\Delta t$ до $4\Delta t$ их $10/58$.

3.1.2. Непрерывные функции распределения.

Если в дискретной функции распределения устремить $\Delta t \to 0$, то $\Delta t \Rightarrow dt$, а $\Delta N \Rightarrow dN$ и тогда $\frac{dN}{dt}$ - будет непрерывной функцией распределения. Такой переход возможен только при наличии огромного числа регистрируемых частиц. В идеальном газе $N \sim 10^{26}$ и поэтому такой переход допустим.

Тогда, для большого N можно ввести вероятность того, что величина x, характеризующая какой- либо физический параметр, лежит в интервале значений от x до $x+dx$.

Она равна:

$$dW = f(x)\cdot dx\ , \qquad (4)$$

где $f(x)$ - нормированная на число частиц, непрерывная функция распределения по значениям величины x.

Условие нормировки:

$$W = \int f(x)\cdot dx = 1 \qquad (5)$$

по возможному интервалу значений, принимаемому переменной x.

Если x играет роль объема, то $f(x)$ - плотность вероятности; если x- координата, то $f(x)$ - вероятность, отнесённая к интервалу длины; если x - скорость, то $f(x)$ - вероятность, отнесенная к интервалу скорости и т. д.

Если в газе N молекул, а dN - доля частиц, для которых физическая величина x заключена в интервале от x до $x + dx$, то вероятность, выраженная через долю частиц, имеет вид:

$$dW = \frac{dN}{N} \tag{6}$$

Отсюда, количество молекул dN, для которых величина x, характеризующая их, заключена в интервале значений от x, до $x + dx$, равна:

$$dN = N \cdot dW = N \cdot f(x) \cdot dx \tag{7}$$

Вычисление средних значений по функции распределения (ФР)

Если число частиц велико, то это ансамбль частиц. Среднее значение физической величины по ансамблю:

$< x >= \dfrac{\int x \cdot f(x) \cdot dx}{\int f(x) \cdot dx}$ либо $< x >= \int x \cdot f(x) \cdot dx$, если выполнено уравнение нормировки (5).

$< x^2 >= \int x^2 \cdot f(x) \cdot dx$, если выполнено (5).

3.2. Функции распределения молекул по скоростям в газе.

Молекулы газа, находящегося в равновесии движутся с самыми различными скоростями, причем как модуль так и направление их скорости непрерывно изменяются из-за соударений. При нормальных условиях одна молекула сталкивается с другими 10^9 раз в секунду.

В газе различают две непрерывные функции распределения молекул (N – число молекул):

1) По компоненте скорости

$$f_1(\upsilon_x) = \frac{1}{N}\frac{dN}{d\upsilon_x} = \left(\frac{m}{2\pi kT}\right)^{1/2} e^{-\frac{m\upsilon_x^2}{2kT}} , \qquad (8)$$

где m – масса одной молекулы, T- абсолютная температура, k- постоянная Больцмана, υ_x - значение скорости молекул на направление оси x в пространстве. Ее график на рис.4.

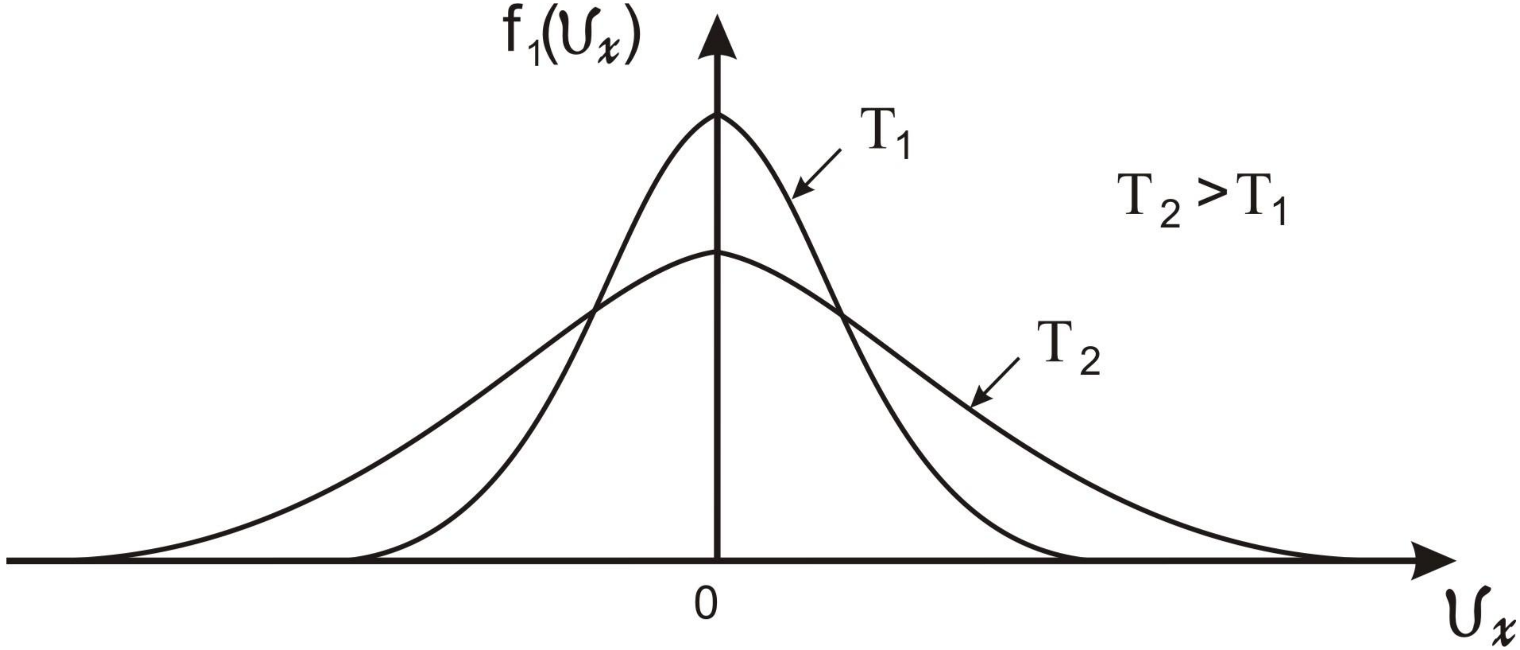


Рис. 4

ФР(8) показывает какова вероятность того, что проекция скорости частиц заключена в интервале от υ_x до $\upsilon_x + d\upsilon_x$.

2) Функция распределения по модулю скорости

$$f_2(\upsilon) = \frac{1}{N}\frac{dN}{d\upsilon} = 4\pi\left(\frac{m}{2\pi kT}\right)^{3/2} \cdot \upsilon^2 \cdot e^{-\frac{m\upsilon^2}{2kT}} . \qquad (9)$$

где N- число молекул газа, υ - модуль скорости частицы. Ее график представлен на рис.5

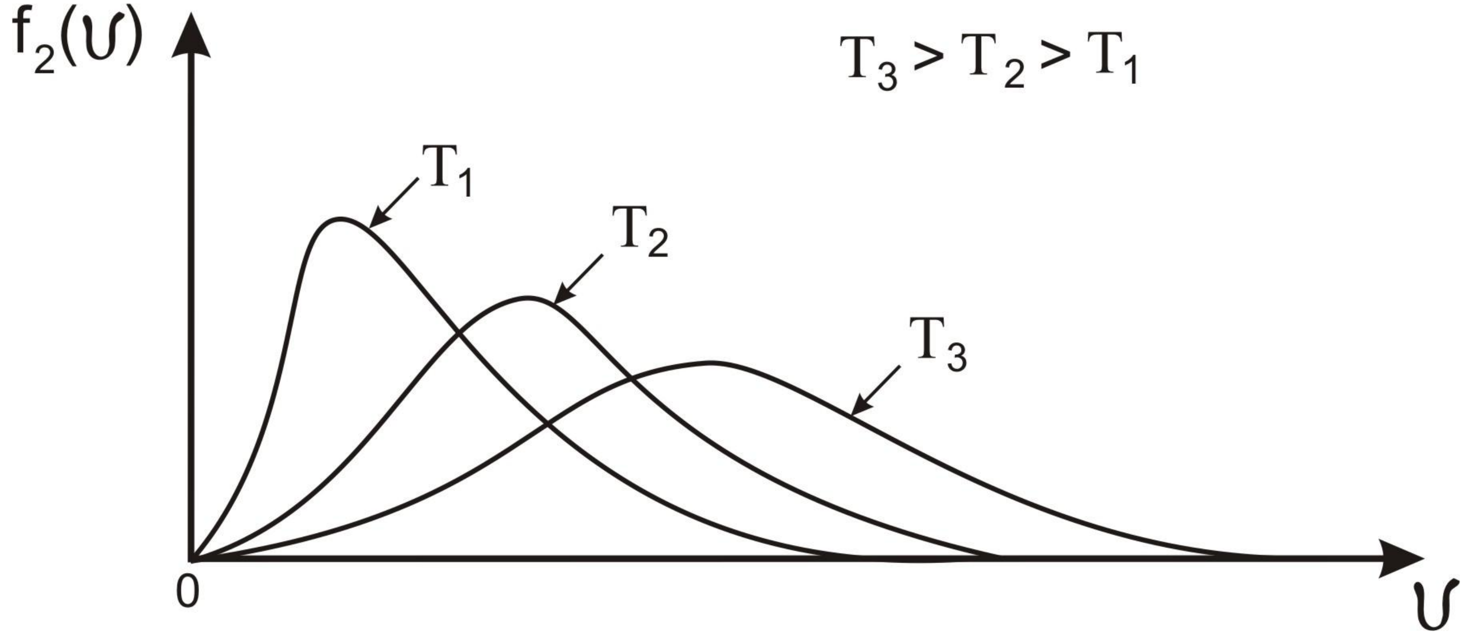


Рис. 5

Функция распределения (9) (распределение Максвелла) показывает какова вероятность того, что модуль скорости частиц заключен в интервале от υ до $\upsilon + d\upsilon$.

Различие законов связано с тем, что f_1 - указывает на равновесность распределения молекул по направлениям в пространстве: в пределах любым образом ориентированного, но постоянного по величине телесного угла $d\Omega$ в каждый момент времени лежат направления движения в среднем одинакового числа молекул dN, а второй утверждает, что возможные значения модуля скорости, заключенные от нуля до бесконечности, не равновероятны.

3.3. Следствия из закона распределения $f_2(\upsilon)$.

1. Модуль скорости, на который приходится максимум функции распределения, называют наиболее вероятной скоростью движения молекулы

$$\frac{df}{d\upsilon} = 0 \Rightarrow 2\upsilon e^{-\frac{m\upsilon^2}{2kT}} - \upsilon^2 e^{-\frac{m\upsilon^2}{2kT}} \cdot \frac{2m\upsilon}{2kT} = 0$$

откуда $\upsilon = \upsilon_в = \sqrt{\dfrac{2kT}{m}}$ - наиболее вероятная скорость.

2. Максимальное значение функции $f_2(v)$.

При $\upsilon = \upsilon_в : f_2(\upsilon_в) \sim \sqrt{\dfrac{m}{T}}$ - максимум убывает с ростом температуры.

3. Средний модуль скорости движения молекул

$$< \upsilon >= \int_0^\infty \upsilon \cdot f(\upsilon) \cdot d\upsilon = \sqrt{\frac{8kT}{\pi m}}$$

4. Средний квадрат скорости движения молекул

$$< \upsilon_{кв}^2 >= \int_0^\infty \upsilon^2 \cdot f(\upsilon) \cdot d\upsilon = \frac{3kT}{m}$$

4. ГАЗЫ В СИЛОВОМ ПОЛЕ

4.1 БАРОМЕТРИЧЕСКАЯ ФОРМУЛА

Рассмотрим идеальный газ, находящийся в однородном поле силы тяжести при постоянной температуре.

Выделим вертикальный столб газа с площадью поперечного сечения, равной единице. Тогда перепад давлений между нижним и верхним основаниями слоя будет равен весу этого слоя, т.е.

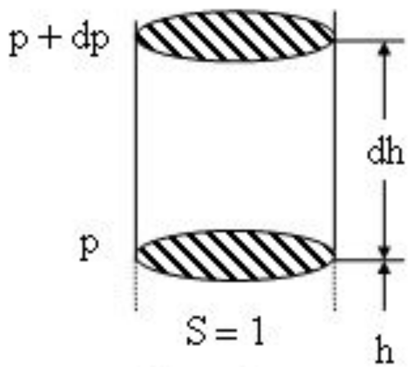


Рис. 1

$$p-(p+dp)=\rho g dh, \qquad (1)$$

где ρ - плотность газа на высоте h, g - ускорение свободного падения.

Выражая плотность $\rho = m/V = p\mu/RT$ из уравнения Менделеева-Клапейрона и подставляя её в (1), получим

$$-dp = p\mu g dh/RT \qquad (2).$$

Интегрирование приводит к соотношению

$$\ln p = -\mu g h/RT + \ln C \qquad (3)$$

где постоянная интегрирования выбрана в виде $\ln C$. После потенцирования будем иметь

$$p = Ce^{-\mu g h/RT}. \qquad (4)$$

Постоянную C определим из условия, что при $h = 0$, $p = p_0$ (p_0 - давление на высоте $h = 0$)

Окончательно для зависимости давления от высоты имеем формулу

$$p = p_o e^{-\mu g h/RT} \qquad (5)$$

которая называется ***барометрической.***

На рис. 2 изображены зависимости давления идеального газа от высоты для различных газов $\mu_1 < \mu_2 (T_1 = T_2)$

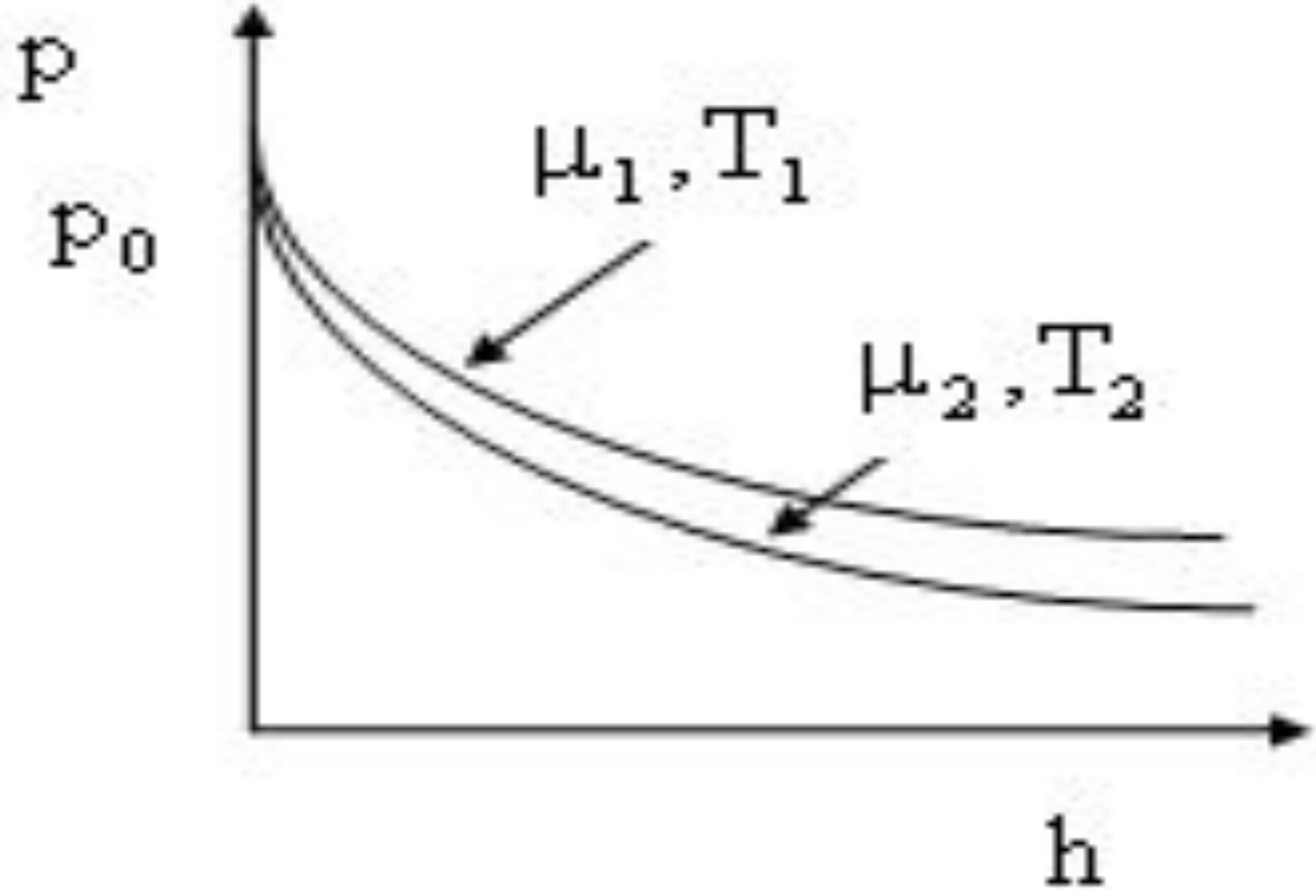


Рис 2

Барометрическую формулу можно представить в виде

$$p = p_0 e^{-\frac{mgh}{kT}}$$

m – масса одной молекулы. (6)

Из него видно, что барометрическая формула описывает зависимость давления однокомпонентного идеального газа, находящегося в состоянии равновесия с постоянной температурой в однородном поле силы тяжести.

Подставляя в неё справа и слева уравнение Менделеева-Клапейрона $p = nkT$,

приходим к распределению Больцмана

$$n = n_0 e^{-\frac{U(x)}{kT}}.$$

(7)

Оно показывает какая связь существует между концентрацией частиц и их потенциальной энергией.

Больцманом было доказано, что выражение (7) справедливо не только для поля силы тяжести, но и для систем с большим числом частиц, находящихся в любых неоднородных потенциальных силовых полях в состоянии теплового равновесия.