

# *Энтропия*

***Круговые процессы  
Цикл Карно***

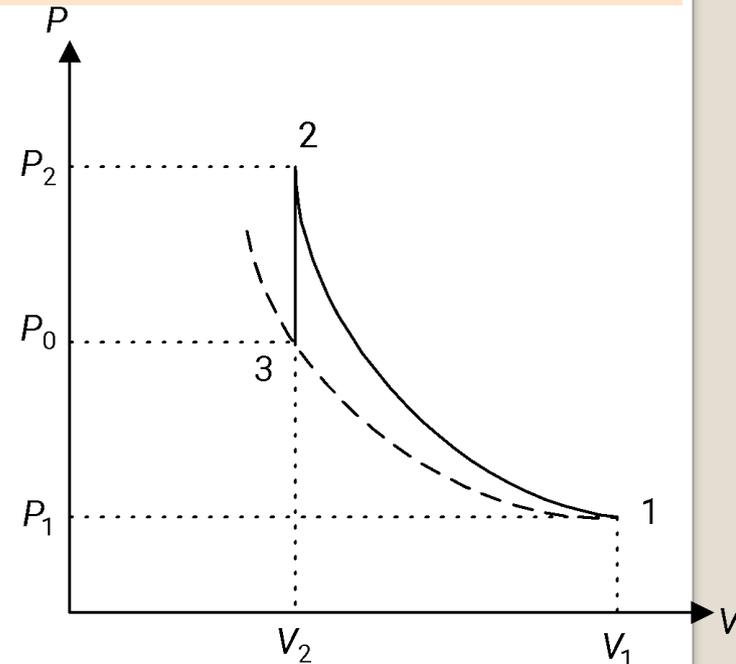
**1.** Двухатомный газ занимает объем  $V_1 = 0,5$  л при давлении  $P_1 = 50$  кПа. Газ сжимается адиабатически до некоторого объема  $V_2$  и давления  $P_2$  и затем при постоянном объеме  $V_2$  охлаждается до первоначальной температуры. При этом его давление становится равным  $P_0 = 100$  кПа. 1) Начертить график этого процесса; 2) Найти объем  $V_2$  и давление  $P_2$ .

Дано

$$V_1 = 0,5 \cdot 10^{-3} \text{ м}^3$$
$$P_1 = 50 \cdot 10^3 \text{ Па.}$$

$$V_2 - ?$$
$$P_2 - ?$$

*По графику: переход 1-2 – адиабатический процесс, а переход 2-3 – изохорический. Точки 1 и 3, соответствующие начальному и конечному состоянию лежат на изотерме (пунктирная линия), так как  $T_1 = T_3$ .*



$$P_1 V_1^\gamma = P_2 V_2^\gamma$$

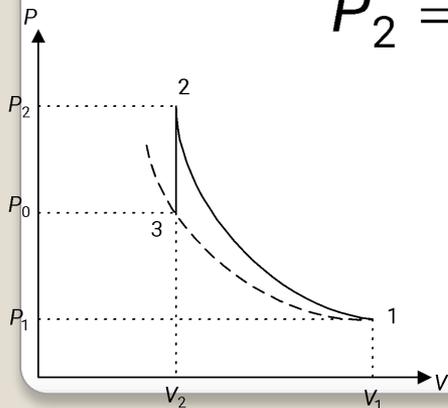
**1.** Двухатомный газ занимает объем  $V_1 = 0,5$  л при давлении  $P_1 = 50$  кПа. Газ сжимается адиабатически до некоторого объема  $V_2$  и давления  $P_2$  и затем при постоянном объеме  $V_2$  охлаждается до первоначальной температуры. При этом его давление становится равным  $P_0 = 100$  кПа. 1) Начертить график этого процесса; 2) Найти объем  $V_2$  и давление  $P_2$ .

$$P_1 V_1^\gamma = P_2 V_2^\gamma \quad P_1 V_1 = P_0 V_2 \quad V_2 = \frac{P_1 V_1}{P_0} \quad P_2 = P_1 \left( \frac{V_1}{V_2} \right)^\gamma$$

$$P_2 = P_1 \left( \frac{P_0}{P_1} \right)^\gamma \quad \gamma = \frac{C_P}{C_V} = \frac{i+2}{2} \quad \gamma = 1,4$$

$$P_2 = 50 \cdot 10^3 \left( \frac{100 \cdot 10^3}{50 \cdot 10^3} \right)^{1,4} = 131,95 \cdot 10^3 \approx 132 \cdot 10^3 \text{ (Па)}$$

$$V_2 = \frac{50 \cdot 10^3 \cdot 0,5 \cdot 10^{-3}}{100 \cdot 10^3} = 0,25 \cdot 10^{-3} \text{ (м}^3\text{)}$$



**Ответ:**  $V_2 = 0,25 \cdot 10^{-3} \text{ м}^3$ ;  $P_2 = 132 \text{ кПа}$ .

**2.(5.195)** Идеальная тепловая машина, работающая по циклу Карно, получает за каждый цикл от нагревателя  $Q_1=2512$  Дж. Температура нагревателя  $T_1=400$  К, температура холодильника  $T_2=300$  К. Найти работу, совершаемую машиной за один цикл, и количество теплоты, отдаваемое холодильнику за один цикл.

**Ответ:**  $A=630$  Дж;  $Q_2=1880$  Дж.

Дано

$$\begin{aligned} Q_1 &= 2512 \text{ Дж} \\ T_1 &= 400 \text{ К} \\ T_2 &= 300 \text{ К} \end{aligned}$$

$$A=? \quad Q_2=?$$

**Решение**

$$\eta = \frac{T_1 - T_2}{T_1} = \frac{Q_1 - Q_2}{Q_1}$$

$$A = Q_1 - Q_2$$

$$A = Q_1 \left(1 - \frac{T_2}{T_1}\right)$$

$$1 - \frac{T_2}{T_1} = \frac{A}{Q_1}$$

$$1 - \frac{T_2}{T_1} = 1 - \frac{Q_2}{Q_1}$$

$$Q_2 = Q_1 \frac{T_2}{T_1}$$

$$Q_2 = 2512 \cdot \frac{300}{400} = 1884 \text{ (Дж)}$$

$$A = 2512 \left(1 - \frac{300}{400}\right) = 628 \text{ (Дж)}$$

**3.** Идеальная тепловая машина работает по циклу Карно. Определить КПД цикла, если известно, что за один цикл была произведена работа  $A=2,94$  кДж и холодильнику было передано количество теплоты  $Q_2=13,4$  кДж.

Дано

$$A=2,94 \cdot 10^3 \text{ Дж}$$

$$Q_2=13,4 \cdot 10^3 \text{ Дж}$$

$$\eta=?$$

**Решение**

$$\eta = \frac{T_1 - T_2}{T_1} = \frac{Q_1 - Q_2}{Q_1} = \frac{A}{Q_1}$$

$$A = Q_1 - Q_2 \quad Q_1 = A + Q_2$$

$$\eta = \frac{A}{Q_1} = \frac{A}{A + Q_2}$$

$$\eta = \frac{2,94 \cdot 10^3}{2,94 \cdot 10^3 + 13,4 \cdot 10^3} \approx 0,18$$

**Ответ:**  $\eta=18\%$ .

**4.(5.198)** Идеальная тепловая машина работает по циклу Карно. При этом 80 % теплоты, получаемой от нагревателя, передается холодильнику. Количество теплоты, получаемое от нагревателя  $Q_1 = 6,28$  кДж. Найти: 1) КПД цикла; 2) работу  $A$ , совершенную за один цикл.

**Ответ:**  $\eta = 20$  %;  $A = 1,26$  кДж.

Дано

$$\begin{aligned} Q_2 &= 0,8 \cdot Q_1 \\ Q_1 &= 6,28 \cdot 10^3 \text{ Дж} \end{aligned}$$

$A = ?$

**Решение**

$$\eta = \frac{Q_1 - Q_2}{Q_1} \quad A = Q_1 - Q_2$$

$$A = Q_1 - 0,8Q_1 = 0,2Q_1$$

$$A = 0,2 \cdot 6,28 \cdot 10^3 = 1,256 \cdot 10^3 \approx 1,26 \text{ (кДж)}$$

$$\eta = \frac{Q_1 - 0,8Q_1}{Q_1} = 0,2$$

**5.(5.216)** Найти изменение энтропии при превращении массы  $m=10$  г льда, взятого при  $t_1=-20$  С, в пар при  $t_3=100$ °С.

**Ответ:** Дж/К.

## Решение

Дано

$$t_1 = -20^{\circ}\text{C}$$

$$t_2 = 0^{\circ}\text{C}$$

$$t_3 = 100^{\circ}\text{C}$$

$$t_2 = 0^{\circ}\text{C}$$

$$C_1 = 2,1 \cdot 10^3 \frac{\text{Дж}}{\text{кг} \cdot \text{К}}$$

$$C_2 = 4,19 \cdot 10^3 \frac{\text{Дж}}{\text{кг} \cdot \text{К}}$$

$$\lambda = 3,35 \cdot 10^5 \frac{\text{Дж}}{\text{кг}}$$

$$r = 2,26 \cdot 10^6 \frac{\text{Дж}}{\text{кг}}$$

$$\Delta S = ?$$

$$\Delta S = \int_1^2 \frac{\delta Q}{T}$$

$$\Delta S = \Delta S_1 + \Delta S_2 + \Delta S_3 + \Delta S_4$$

$$\delta Q_1 = C_1 m dT$$

$$\Delta S_1 = \int_{T_1}^{T_2} \frac{C_1 m dT}{T} = C_1 m \ln \frac{T_2}{T_1}$$

$$Q_2 = m\lambda$$

$$\Delta S_2 = \frac{Q_2}{T_2} = \frac{m\lambda}{T_2}$$

$$\delta Q_3 = C_2 m dT \quad \Delta S_3 = \int_{T_2}^{T_3} \frac{C_2 m dT}{T} = C_2 m \ln \frac{T_3}{T_2}$$

$$Q_4 = mr \quad \Delta S_4 = \frac{Q_4}{T_3} = \frac{mr}{T_3}$$

$$\Delta S = m \left( C_1 \ln \frac{T_2}{T_1} + \frac{\lambda}{T_2} + C_2 \ln \frac{T_3}{T_2} + \frac{r}{T_3} \right)$$

$$\begin{aligned} \Delta S &= 0,01 \left( 2,1 \cdot 10^3 \ln \frac{273}{253} + \frac{3,35 \cdot 10^5}{273} + 4,19 \cdot 10^3 \ln \frac{373}{273} + \frac{2,26 \cdot 10^6}{373} \right) = \\ &= 88 \left( \frac{\text{Дж}}{\text{К}} \right) \end{aligned}$$

**6.(5.221)** Найти изменение  $\Delta S$  энтропии при переходе массы  $m=6$  г водорода от объема  $V_1=20$  л под давлением  $P_1=150$  кПа к объему  $V_2=60$  л под давлением  $P_2=100$  кПа.

**Ответ:**  $\Delta S=71,0$  Дж/К.

### Дано

$$m=6 \text{ г}$$

$$V_1=20 \text{ л}$$

$$P_1=150 \text{ кПа}$$

$$V_2=60 \text{ л}$$

$$P_2=100 \text{ кПа}$$

$$\mu = 2 \cdot 10^{-3} \text{ кг/моль}$$

$$\Delta S=?$$

### Решение

$$\Delta S = \int_1^2 \frac{\delta Q}{T} \quad \delta Q = \delta A + dU = p dV + \frac{m}{\mu} C_V dT$$

$$\Delta S = \int_{V_1}^{V_2} \frac{p dV}{T} + \int_{T_1}^{T_2} \frac{m}{\mu} C_V \frac{dT}{T}$$

$$\frac{m}{\mu} RT = PV$$

$$P = \frac{m}{\mu} \frac{RT}{V}$$

$$\Delta S = \int_{V_1}^{V_2} \frac{\frac{m}{\mu} \frac{RT}{V} dV}{T} + \int_{T_1}^{T_2} \frac{m}{\mu} C_V \frac{dT}{T}$$

$$\ln a \cdot b = \ln a + \ln b$$

$$\Delta S = \frac{m}{\mu} R \ln \frac{V_2}{V_1} + \frac{m}{\mu} C_V \ln \frac{T_2}{T_1}$$

$$\frac{P_1 V_1}{T_1} = \frac{P_2 V_2}{T_2}$$

$$\frac{T_2}{T_1} = \frac{P_2 V_2}{P_1 V_1}$$

$$\Delta S = \frac{m}{\mu} R \ln \frac{V_2}{V_1} + \frac{m}{\mu} C_V \ln \frac{P_2}{P_1} + \frac{m}{\mu} C_V \ln \frac{V_2}{V_1} = \frac{m}{\mu} C_V \ln \frac{P_2}{P_1} + \frac{m}{\mu} (C_V + R) \ln \frac{V_2}{V_1}$$

$$\Delta S = \frac{m}{\mu} \left[ C_V \ln \frac{P_2}{P_1} + C_p \ln \frac{V_2}{V_1} \right]$$

$$\Delta S = \frac{m}{\mu} \cdot \frac{R}{2} \left[ i \ln \frac{P_2}{P_1} + (i + 2) \ln \frac{V_2}{V_1} \right]$$

$$\Delta S = \frac{6 \cdot 10^{-3}}{2 \cdot 10^{-3}} \cdot 8,31 \cdot \frac{1}{2} \left[ 5 \ln \frac{100 \cdot 10^3}{150 \cdot 10^3} + 7 \ln \frac{60 \cdot 10^{-3}}{20 \cdot 10^{-3}} \right] \approx 71,0 \text{ (Дж/К)}$$

7. Объем  $V_1 = 1 \text{ м}^3$  некоторого идеального газа, находящегося при температуре  $t = 0^\circ\text{C}$  и давлении  $P_1 = 98 \text{ кПа}$ , изотермически расширяется от объема  $V_1$  до объема  $V_2 = 2V_1$ . Найти изменение  $\Delta S$  энтропии при этом процессе.

### Решение

Дано  
 $V_1 = 1 \text{ м}^3$   
 $t = 0^\circ\text{C}$   
 $P_1 = 98 \text{ кПа}$

$\Delta S = ?$

$$\Delta U = 0 \quad \delta Q = \delta A = p dV$$

$$\Delta S = \int_1^2 \frac{\delta Q}{T} = \int_{V_1}^{V_2} \frac{p dV}{T} \quad \frac{P}{T} = \frac{m R}{\mu V}$$

$$\Delta S = \int_{V_1}^{V_2} \frac{m}{\mu} R \frac{dV}{V} = \frac{m}{\mu} R \ln \frac{V_2}{V_1}$$

7. Объем  $V_1 = 1 \text{ м}^3$  некоторого идеального газа, находящегося при температуре  $t = 0^\circ\text{C}$  и давлении  $P_1 = 98 \text{ кПа}$ , изотермически расширяется от объема  $V_1$  до объема  $V_2 = 2V_1$ . Найти изменение  $\Delta S$  энтропии при этом процессе.

$$\Delta S = \int_{V_1}^{V_2} \frac{m}{\mu} R \frac{dV}{V} = \frac{m}{\mu} R \ln \frac{V_2}{V_1} \quad \frac{m}{\mu} R = \frac{P_1 V_1}{T}$$

$$\Delta S = \frac{P_1 V_1}{T} \ln \frac{V_2}{V_1}$$

$$\Delta S = \frac{98 \cdot 10^3 \cdot 1}{273} \ln \frac{2V_1}{V_1} \approx 249 \left( \frac{\text{Дж}}{\text{К}} \right)$$

$$\Delta S \approx 249 \left( \frac{\text{Дж}}{\text{К}} \right)$$

**8.(5.231)** Изменение энтропии на участке между двумя адиабатами в цикле Карно  $\Delta S=4,19$  кДж/К. Разность температур между двумя изотермами  $\Delta T=100$  К. Какое количество теплоты  $Q$  превращается в работу в этом цикле?

Дано

$$\Delta S=4,19 \text{ кДж/К}$$

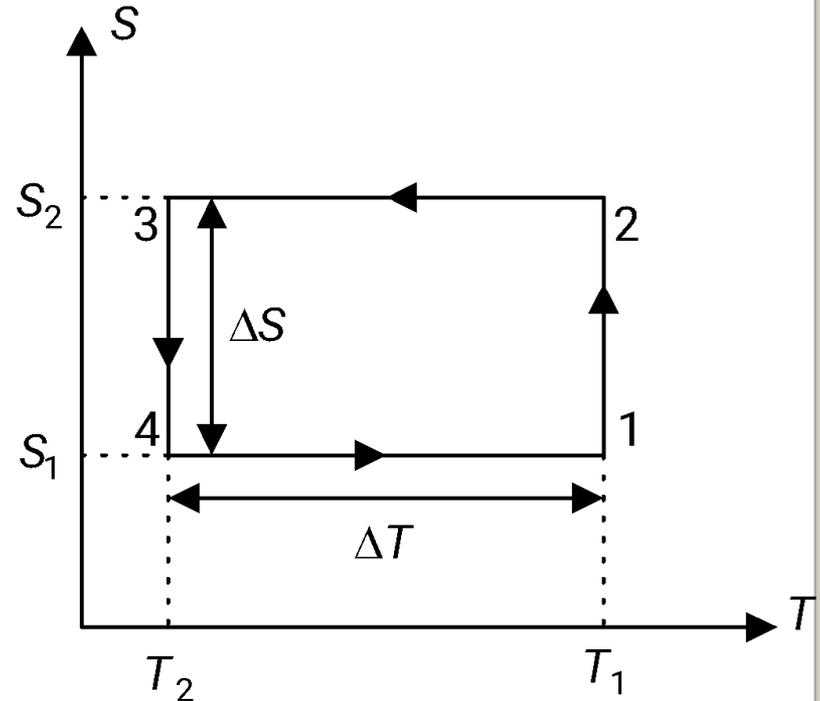
$$\Delta T=100$$

$Q=?$

Процессы (1-2) и (3-4) – изотермические, а (2-3) и (4-1) – адиабатические. При адиабатических процессах изменение энтропии не происходит, а при изотермических:

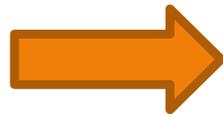
$$\Delta S_{12} = \frac{Q_1}{T_1}$$

$$\Delta S_{34} = \frac{Q_2}{T_2}$$



$$A = Q_1 - Q_2 = \Delta S_{12} \cdot T_1 - \Delta S_{34} \cdot T_2$$

Изменение энтропии за  
весь цикла Карно  
равно нулю



$$|\Delta S_{12}| = |\Delta S_{34}| = \Delta S$$

$$A = \Delta S(T_1 - T_2) = \Delta S \Delta T$$

$$A = 4,19 \cdot 10^3 \cdot 100 = 419 \cdot 10^3 (\text{Дж})$$

$$A = 419 \cdot 10^3 (\text{Дж})$$

9. Найти изменение  $\Delta S$  энтропии при переходе кислорода ( $O_2$ ) из состояния А в состояние В, если переход совершается: а) по участку АСВ; б) по участку АДВ (рис.2.2).  $V_1=3$  л;  $P_1=820$  кПа;  $t_1=27^0C$ ;  $V_2=4,5$  л;  $P_2=600$  кПа.

Дано

$V_1=3$  л;  
 $P_1=820$  кПа;  
 $t_1=27^0C$ ;  
 $V_2=4,5$  л;  
 $P_2=600$  кПа

$\Delta S=?$

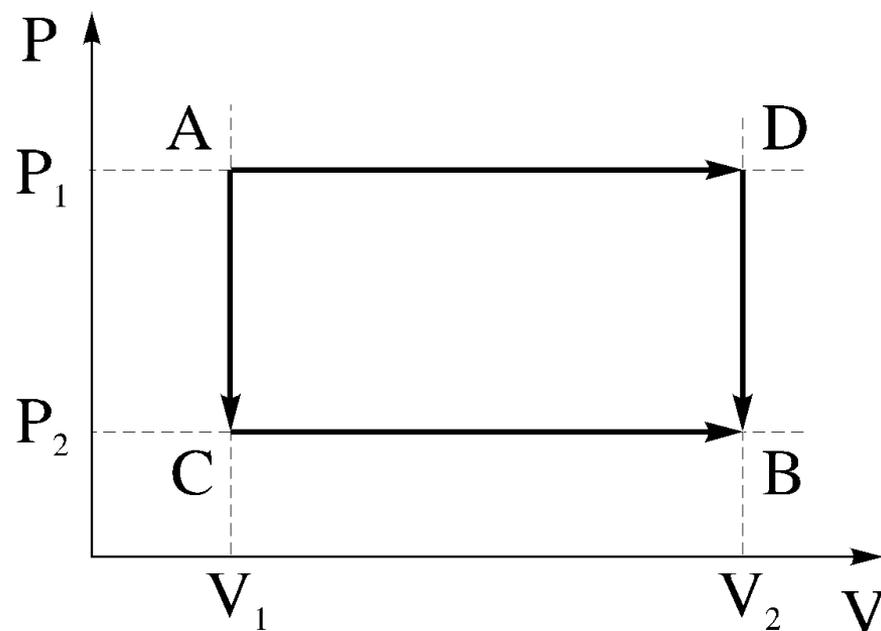


Рис.2.2

Энтропия функция состояния системы. В процессах АСВ и АДВ начальные и конечные состояния идеального газа одинаковы, и изменение энтропии (при переходе от параметров  $P_1, V_1$  и параметрами  $P_2, V_2$ ) будет одинаковым.

$$\Delta S = S_2 - S_1 = \int_1^2 \frac{\delta Q}{T} = \int_1^2 \frac{dU + \delta A}{T}$$

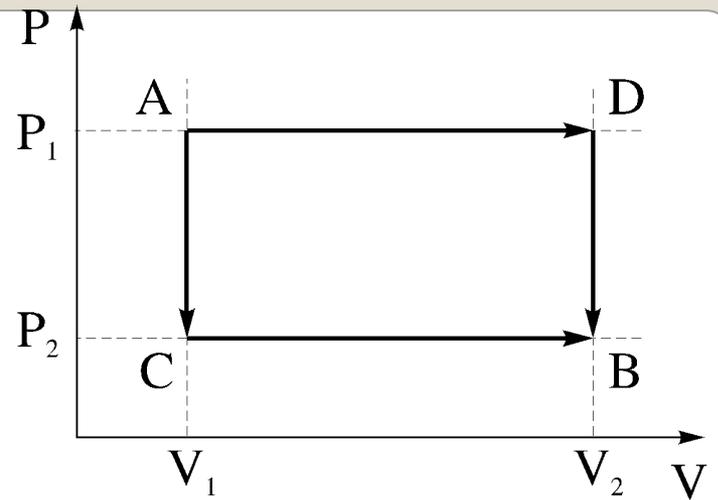


Рис.2.2

$$\delta A_{12} = p dV = \frac{m}{\mu} RT \cdot \frac{dV}{V}$$

$$dU = \frac{m}{\mu} C_V dT$$

$$\Delta S = S_2 - S_1 = \int_{T_1}^{T_2} \frac{m}{\mu T} C_V dT + \int_{V_1}^{V_2} \frac{m}{\mu T} RT \cdot \frac{dV}{V}$$

$$\Delta S = S_2 - S_1 = \frac{m}{\mu} \left( C_V \ln \frac{T_2}{T_1} + R \ln \frac{V_2}{V_1} \right)$$

$$\Delta S = S_2 - S_1 = \frac{m}{\mu} \left( \frac{i}{2} R \ln \frac{T_2}{T_1} + R \ln \frac{V_2}{V_1} \right)$$

$$\frac{P_1 V_1}{T_1} = \frac{P_2 V_2}{T_2} \quad \frac{T_2}{T_1} = \frac{P_2 V_2}{P_1 V_1}$$

$$\Delta S = \frac{m R}{\mu} \left[ i \ln \frac{P_2}{P_1} + (i + 2) \ln \frac{V_2}{V_1} \right] \quad \frac{m}{\mu} R = \frac{P_1 V_1}{T_1}$$

$$\Delta S = \frac{P_1 V_1}{2 T_1} \left[ i \ln \frac{P_2}{P_1} + (i + 2) \ln \frac{V_2}{V_1} \right]$$

$$\Delta S = \frac{820 \cdot 10^3 \cdot 3 \cdot 10^{-3}}{2 \cdot 300} \left[ 5 \ln \frac{600 \cdot 10^3}{820 \cdot 10^3} + 7 \ln \frac{4,5 \cdot 10^{-3}}{3 \cdot 10^{-3}} \right] = 5,23 \text{ (Дж)}$$