

# ***Закон Кулона.***

*Напряженность  
электростатического  
поля*

1.(9.13) Два точечных заряда  $q_1=7,5$  нКл и  $q_2=-14,7$  нКл расположены на расстоянии  $r=5$  см друг от друга. Найти напряженность  $E$  электрического поля в точке, находящейся на расстоянии  $a=3$  см от положительного заряда и  $b=4$  см от отрицательного заряда.

**Дано**

$q_1=7,5$  нКл  
 $q_2=-14,7$  нКл  
 $r=5$  см  
 $a=3$  см  
 $b=4$  см

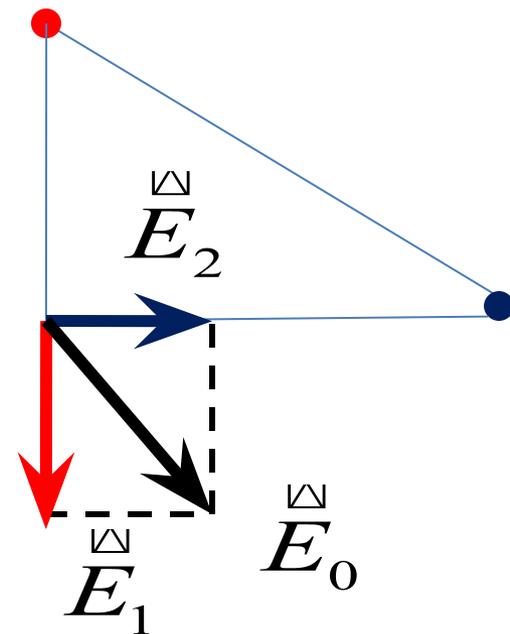
$E=?$

$$\vec{E}_0 = \vec{E}_1 + \vec{E}_2,$$

$$|\vec{E}_0| = \sqrt{|\vec{E}_1|^2 + |\vec{E}_2|^2}$$

$$E_0 = \sqrt{E_1^2 + E_2^2}$$

$$E_1 = \frac{kq_1}{a^2} \quad E_2 = \frac{kq_2}{b^2}$$



$$E_0 = \frac{1}{4\pi\epsilon_0} \sqrt{\frac{q_1^2}{a^4} + \frac{q_2^2}{b^4}}$$

$$E_0 = \frac{1}{4 \cdot 3,14 \cdot 8,85 \cdot 10^{-12}} \sqrt{\frac{(7,5 \cdot 10^{-9})^2}{(3 \cdot 10^{-2})^4} + \frac{(14,7 \cdot 10^{-9})^2}{(4 \cdot 10^{-2})^4}} = 112 \cdot 10^3 \quad /$$

2.(9.15) Два металлических шарика одинакового радиуса и массы подвешены в одной точке на нитях одинаковой длины так, что их поверхности соприкасаются. Какой заряд  $Q$  нужно сообщить шарикам, чтобы сила натяжения нитей стала равной  $T=98$  мН? Расстояние от центра шарика до точки подвеса равно  $l=10$  см, масса каждого шарика  $m=5$  г.

Дано

$T=98$  мН  
 $l=10$  см,  $m=5$   
 г.

$Q=?$

$$mg + T + F_k = 0,$$

$$T \cos \alpha - mg = 0$$

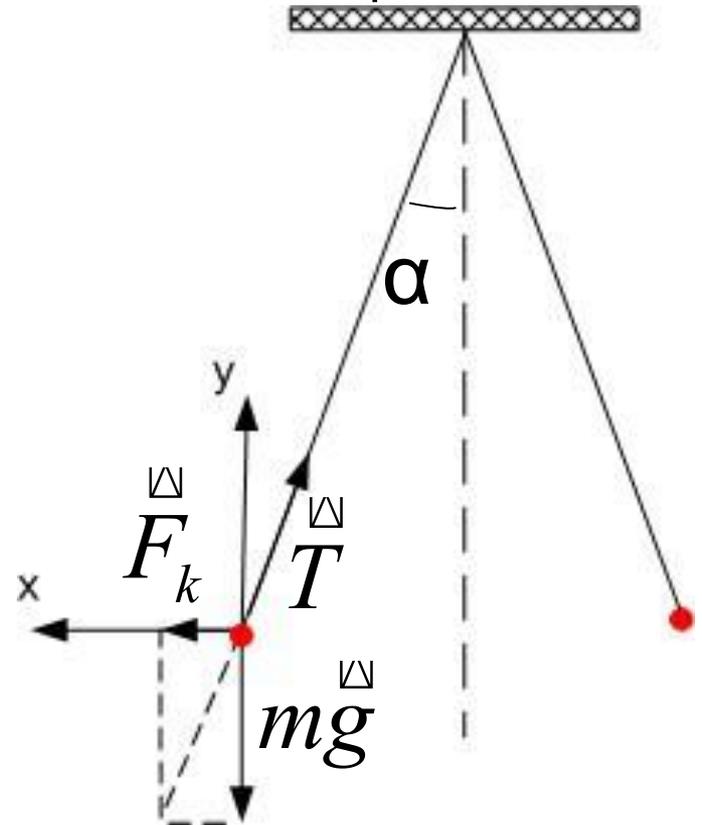
$$-T \sin \alpha + F_k = 0$$

$$T \sin \alpha = F_k$$

$$\cos \alpha = \frac{T}{mg}$$

$$|F_k| = k \frac{(Q/2)^2}{r^2},$$

$$r = 2l \sin \alpha$$



$$Q = \sqrt{\frac{16T\ell^2 \sin^3 \alpha}{k}} = \sqrt{4\pi\epsilon_0 16T\ell^2 \sin^3 \alpha}$$

$$\sin \alpha = \sqrt{1 - \left(\frac{mq}{T}\right)^2} \quad Q = 8\ell \sqrt{\pi T \epsilon_0 \left[1 - \left(\frac{mg}{T}\right)^2\right]^{3/2}}$$

$$Q = 8 \cdot 0,1 \sqrt{3,14 \cdot 8,85 \cdot 10^{-12} \cdot 98 \cdot 10^{-3} \left[1 - \left(\frac{5 \cdot 10^{-3} \cdot 9,8}{9,8 \cdot 10^{-3}}\right)^2\right]^{3/2}}$$

**Ответ:**  $Q = 1,1$  мкКл.

**3.(9.19)** К вертикально расположенной бесконечной однородно заряженной плоскости прикреплена нить, на другом конце которой расположен одноименно заряженный шарик массой  $m=40$  мг и зарядом  $q=31,8$  нКл. Сила натяжения нити, на которой висит шарик,  $T=0,5$  мН. Найти поверхностную плотность заряда  $\sigma$  на плоскости. Диэлектрическая проницаемость среды, в которой находится заряд  $\epsilon=6$ . Ускорение свободного падения  $g=10$  м/с<sup>2</sup>.

**Дано**

$$m=40 \text{ мг}$$

$$q=31,8 \text{ нКл}$$

$$T=0,5 \text{ мН}$$

$$\epsilon=6$$

$$g=10 \text{ м/с}^2$$

$$\sigma = ?$$

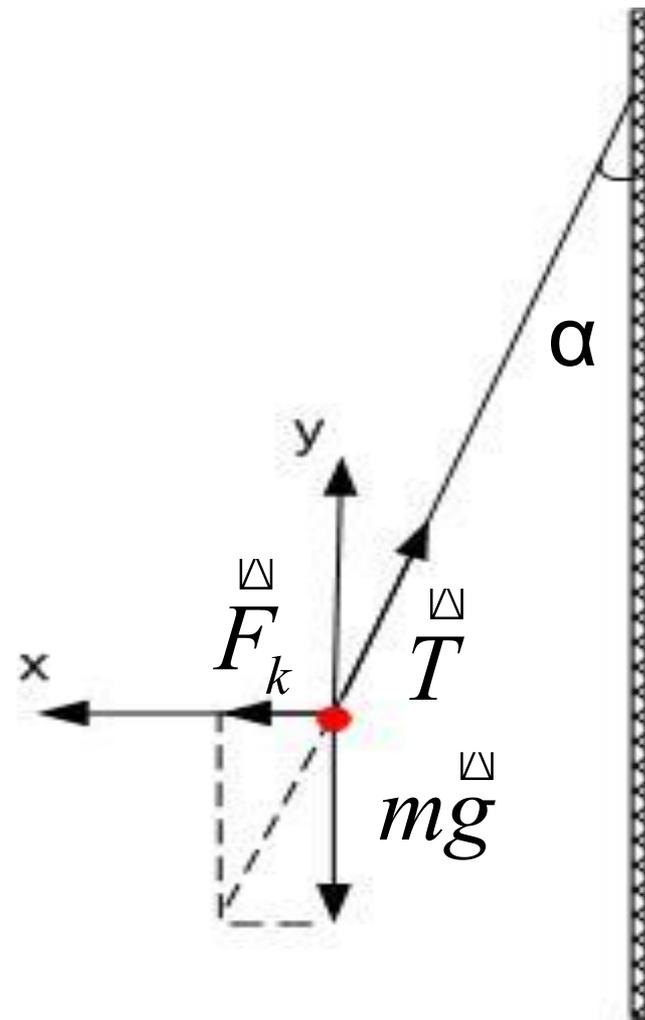
$$\vec{mg} + \vec{T} + \vec{F}_k = 0,$$

$$T \cos \alpha - mg = 0$$

$$-T \sin \alpha + F_{\text{эл}} = 0$$

$$\cos \alpha = \frac{T}{mg}$$

$$T \sin \alpha = F_{\text{эл}}$$



$$F_{\text{эл}} = qE$$

$$E = \frac{\sigma}{2\varepsilon\varepsilon_0}$$

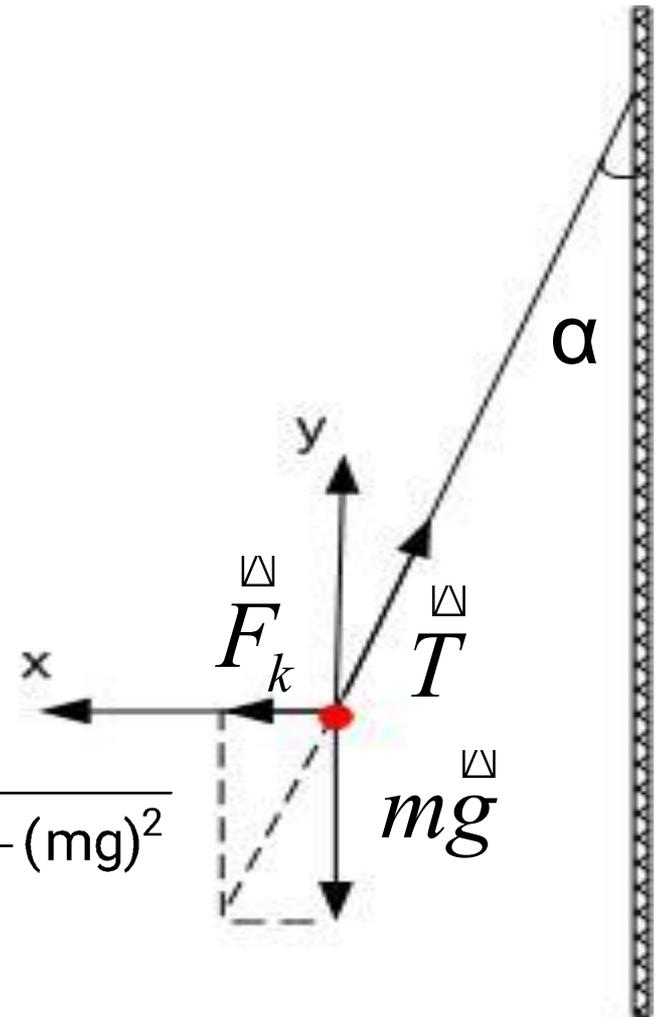
$$F_{\text{эл}} = \frac{q\sigma}{2\varepsilon\varepsilon_0} = T \sin\alpha.$$

$$\sin\alpha = \sqrt{1 - \left(\frac{mg}{T}\right)^2}$$

$$\sigma = \frac{2\varepsilon\varepsilon_0 T \sin\alpha}{q} = \frac{2\varepsilon\varepsilon_0 T}{q} \sqrt{1 - \left(\frac{mg}{T}\right)^2} = \frac{2\varepsilon\varepsilon_0}{q} \sqrt{T^2 - (mg)^2}$$

$$\sigma = \frac{2 \cdot 6,885 \cdot 10^{-12} \cdot 0,5 \cdot 10^{-3}}{31,8 \cdot 10^{-9}} \sqrt{1 - \left(\frac{40 \cdot 10^{-6} \cdot 10}{0,5 \cdot 10^{-3}}\right)^2}$$

**Ответ:**  $\sigma = 1 \cdot 10^{-6} \text{ Кл/м}^2$ .



4.(9.20) Найти силу  $F$ , действующую на заряд  $q=0,66$  нКл, если заряд помещен: а) на расстоянии  $r_1=2$  см от длинной однородно заряженной нити с линейной плотностью заряда  $\tau=0,2$  мкКл/м; б) в поле однородно заряженной плоскости с поверхностной плотностью заряда  $\sigma=20$  мкКл/м<sup>2</sup>; в) на расстоянии  $r_2=2$  см от поверхности однородно заряженного шара радиусом  $R=2$  см и поверхностной плотностью заряда  $\sigma=20$  мкКл/м<sup>2</sup>. Диэлектрическая проницаемость среды  $\epsilon=6$ .

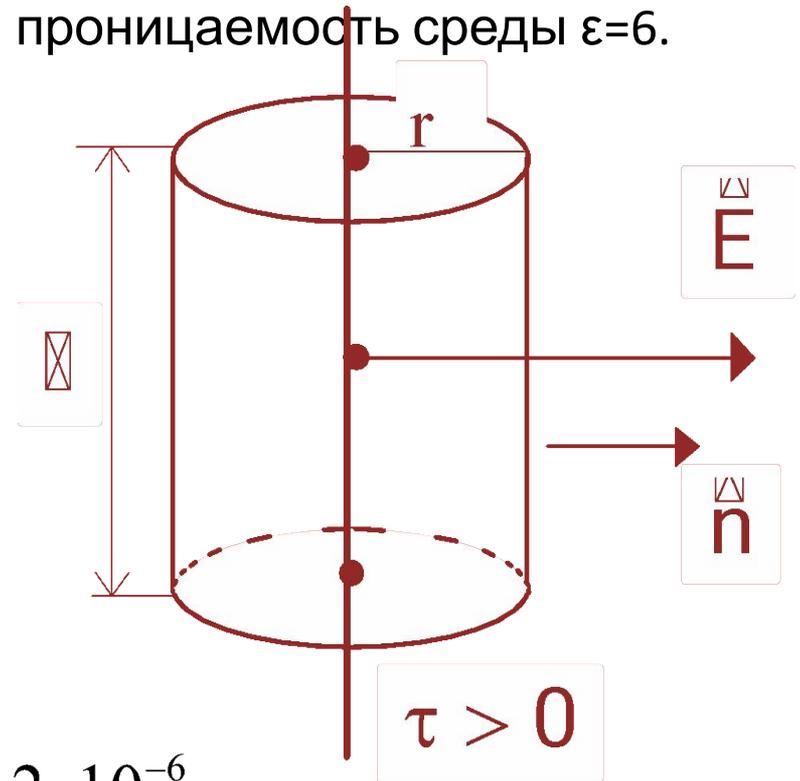
**Дано**

а)  
 $q=0,66$  нКл  
 $r_1=2$  см  
 $\tau=0,2$  мкКл/м  
 $\epsilon=6$

$F=?$

$$F_1 = qE_1$$

$$E_1 = \frac{\sigma}{2\pi\epsilon\epsilon_0 r_1}$$



$$F_1 = \frac{q\tau}{2\pi\epsilon_0\epsilon r_1} = \frac{0,66 \cdot 10^{-9} \cdot 0,2 \cdot 10^{-6}}{2 \cdot 3,14 \cdot 6 \cdot 8,85 \cdot 10^{-12} \cdot 6 \cdot 2 \cdot 10^{-12}} = 19,7 \cdot 10^{-6}$$

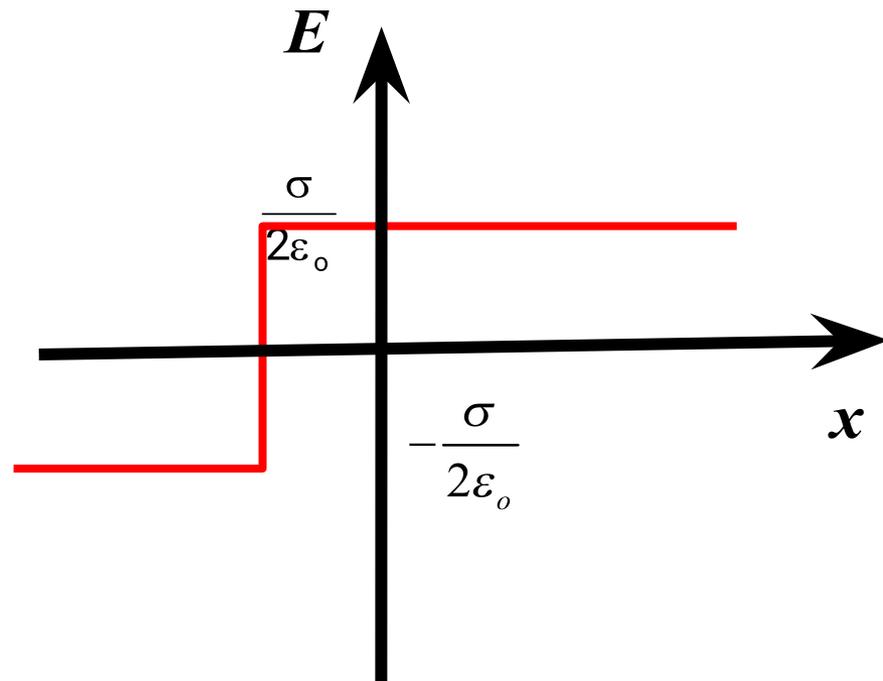
**Дано**

б)

$$q = 0,66 \text{ нКл}$$

$$\sigma = 20 \text{ мкКл/м}^2$$

$$\epsilon = 6$$



$$F_2 = qE_2$$

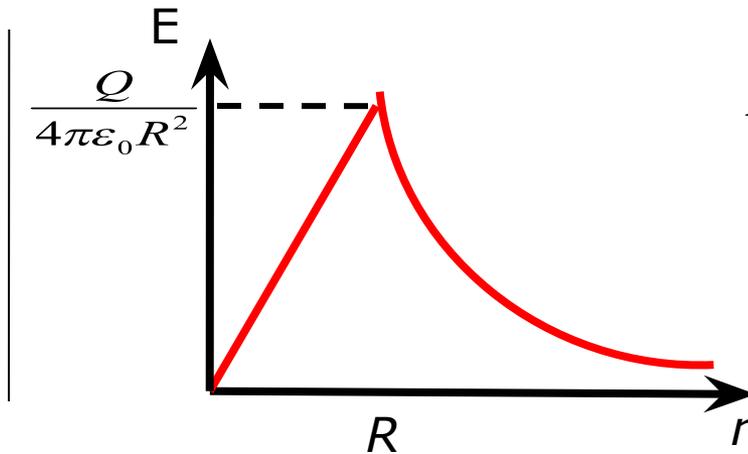
$$E_2 = \frac{\sigma}{2\epsilon\epsilon_0}$$

$$F_2 = \frac{q\sigma}{2\epsilon\epsilon_0} = \frac{0,66 \cdot 10^{-9} \cdot 20 \cdot 10^{-6}}{2 \cdot 6 \cdot 8,85 \cdot 10^{-12}} = 124$$

F=?

**Дано**

в)  
 $q = 0,66 \text{ нКл}$   
 $\sigma = 20 \text{ мкКл/м}^2$   
 $r_2 = 2 \text{ см}$   
 $R = 2 \text{ см}$   
 $\varepsilon = 6$



$F = ?$

$$F_3 = qE_3$$

$$E_3 = \frac{Q_{ш}}{4\pi\varepsilon_0\varepsilon(R+r_2)^2}$$

$$Q_{ш} = \sigma 4\pi R^2$$

$$F_3 = \frac{q\sigma R^2}{\varepsilon\varepsilon_0(R+r_2)^2}$$

$$F_3 = \frac{0,66 \cdot 10^{-9} \cdot 20 \cdot 10^{-6} (2 \cdot 10^{-2})^2}{6 \cdot 8,85 \cdot 10^{-12} (2 \cdot 10^{-2} + 2 \cdot 10^{-2})^2} = 62$$

**Ответ:** а)  $F_1 = 20 \text{ мкН}$ ; б)  $F_2 = 126 \text{ мкН}$ ; в)  $F_3 = 62,8 \text{ мкН}$ .

**5.(9.23)** С какой силой  $F$ , электрическое поле бесконечной однородно заряженной плоскости действует на единицу длины однородно заряженной бесконечно длинной нити, помещенной в это поле? Линейная плотность заряда на нити  $\tau=3$  мкКл/м и поверхностная плотность заряда на плоскости  $\sigma=20$  мкКл/м<sup>2</sup>.

**Дано**

$\tau=3$  мкКл/м  $\sigma=20$   
мкКл/м<sup>2</sup>.

$F=?$

$$F = qE, \quad q = \tau l$$

$$E = \frac{\tau}{2\varepsilon_0} \quad F = \frac{\tau l \sigma}{2\varepsilon_0}$$

$$F = \frac{3 \cdot 10^{-6} \cdot 1 \cdot 20 \cdot 10^{-6}}{2 \cdot 8,85 \cdot 10^{-12} \cdot 10^{-12}} = 3,4 \frac{H}{m}$$

**Ответ:**  $F_l=3,4$

Н/м

**6.(9.26)** С какой силой  $F_s$  на единицу площади отталкиваются две одноименные однородно заряженные бесконечно протяженные плоскости. Поверхностная плотность заряда на плоскостях  $\sigma=0,3$  мкКл/м<sup>2</sup>.

**Дано**

$$\sigma=0,3 \text{ мкКл/м}^2$$

$F=?$

$$F = q_1 E_2$$

$$q_1 = \sigma_1 S \quad \sigma_1 = \sigma_2 = \sigma,$$

$$E_2 = \frac{\sigma_2}{2\varepsilon_0} \quad F = \frac{\sigma_1 S \sigma_2}{2\varepsilon_0},$$

$$F = \frac{\sigma^2 S}{2\varepsilon_0}$$

$$F = \frac{(0,3 \cdot 10^{-6})^2 \cdot 1}{2 \cdot 8,85 \cdot 10^{-12}} = 5,1 \cdot 10^{-3}$$

**Ответ:**  $F_s = 5,1 \text{ кН/м}^2$ .

**7.(9.29)** Показать, что электрическое поле, образованное однородно заряженной нитью конечной длины, в предельных случаях переходит в электрическое поле: а) бесконечно длинной заряженной нити; б) точечного заряда.

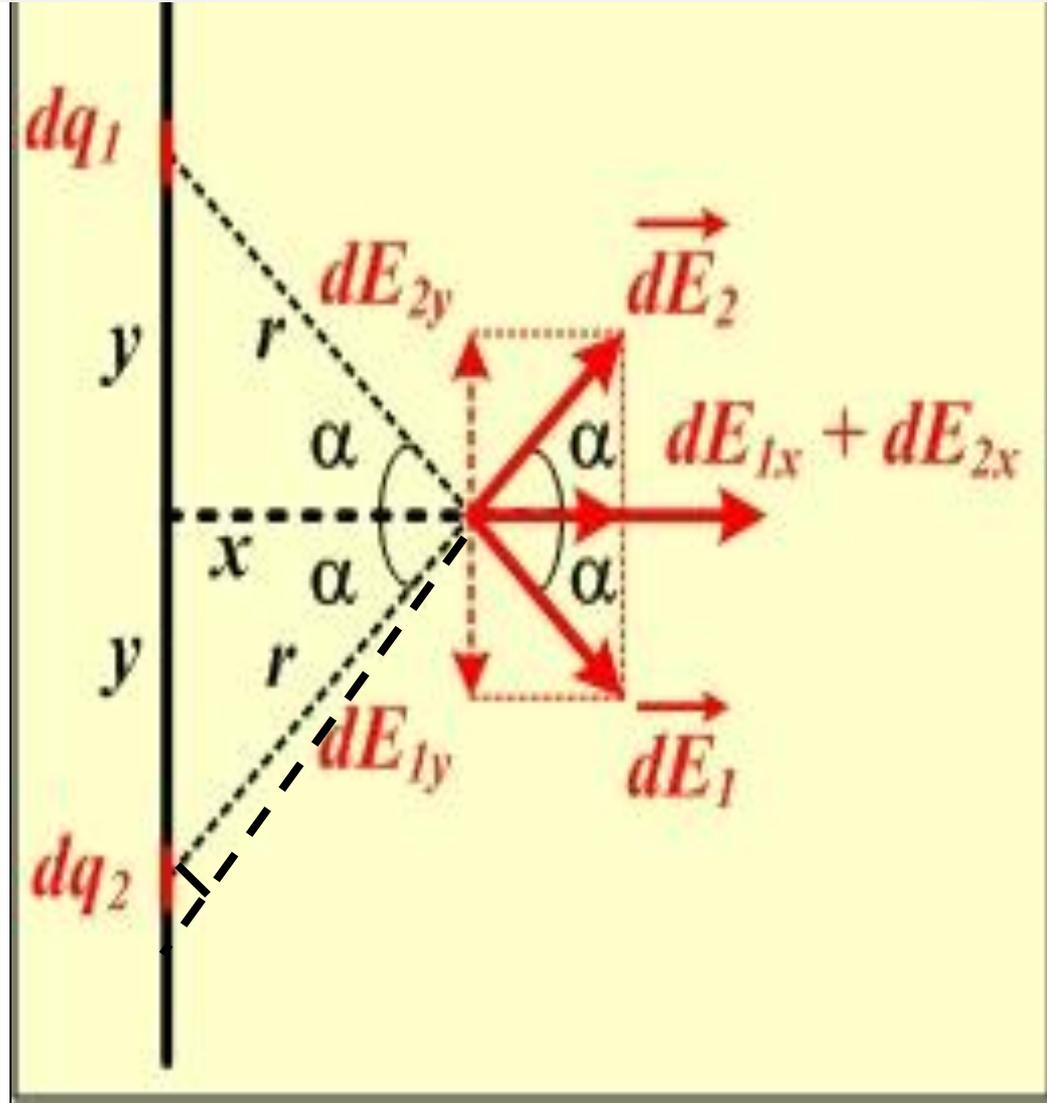
$$\vec{E} = \sum d\vec{E}_x$$

$$\sum_i d\vec{E}_{yi} = 0$$

$$dE_{x1} = dE_1 \cos \alpha$$

$$dE = \frac{dq \cos \alpha}{4\pi\epsilon_0 r^2}$$

$$dE = \frac{\tau \cdot dl \cdot \cos \alpha}{4\pi\epsilon_0 r^2}$$



$$dE = \frac{\tau \cdot \frac{dr}{\cos \alpha} \cdot \cos \alpha}{4\pi\epsilon_0 r^2}$$

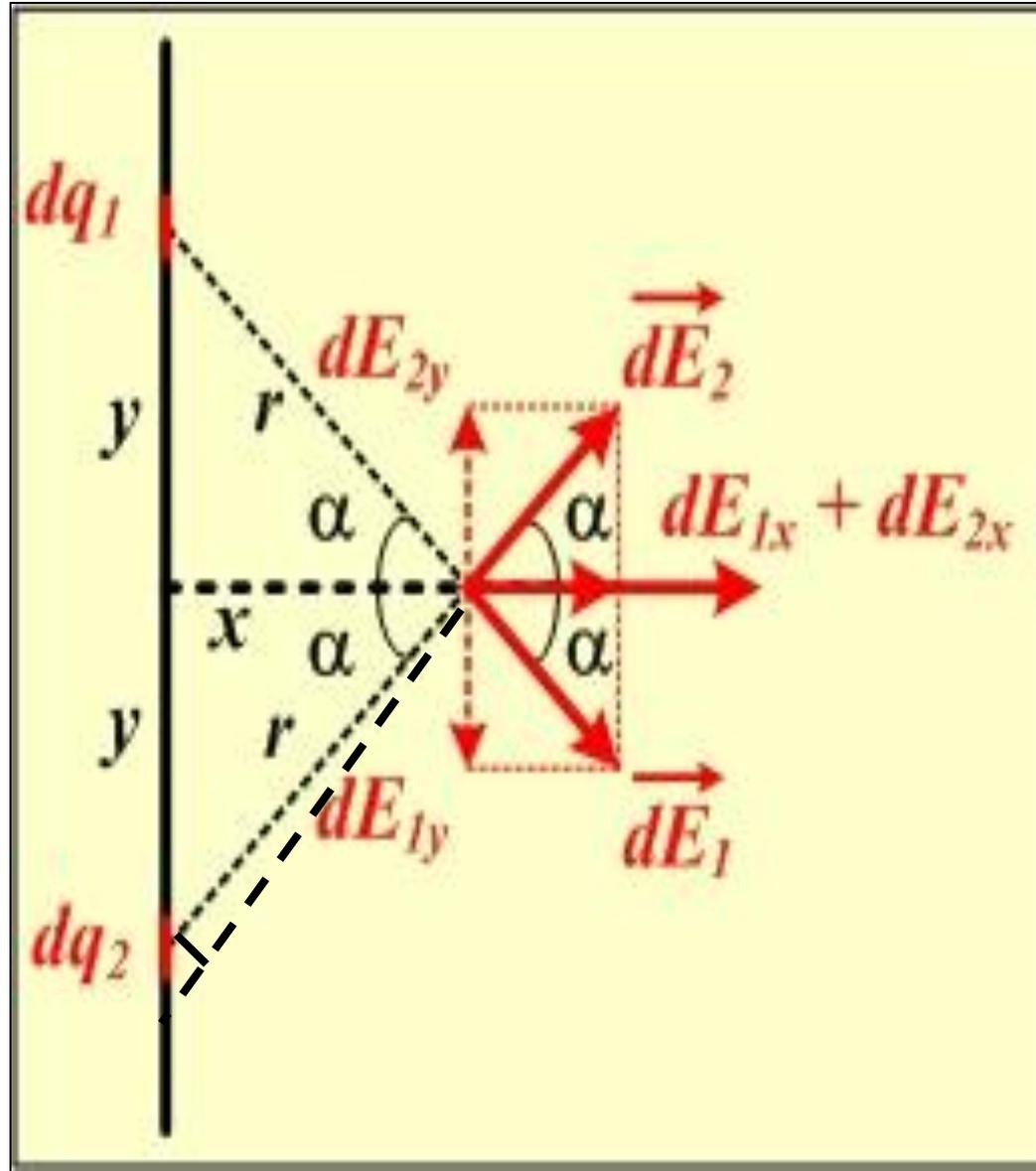
$$dr = r \cdot d\alpha$$

$$dE = \frac{\tau \cdot r}{4\pi\epsilon_0 r^2} \cdot d\alpha$$

$$dE = \frac{\tau}{4\pi\epsilon_0 r} \cdot d\alpha$$

$$dE = \frac{\tau \cdot \cos \alpha}{2\pi\epsilon_0 x} \cdot d\alpha$$

$$E = 2 \int_0^{\infty} \frac{\tau \cdot \cos \alpha}{4\pi\epsilon_0 x} \cdot d\alpha$$



**7.(9.29)** Показать, что электрическое поле, образованное однородно заряженной нитью конечной длины, в предельных случаях переходит в электрическое поле: а) бесконечно длинной заряженной нити; б) точечного заряда.

$$E_c = \frac{\tau \sin \theta}{2\pi\epsilon_0 x}$$

$$\sin \theta = \frac{\ell/2}{\sqrt{\frac{\ell^2}{4} + x^2}}$$

$$E_c = \frac{\tau}{2\pi\epsilon_0 a} \frac{\ell/2}{\sqrt{\frac{\ell^2}{4} + x^2}}$$

$$\ell/2 \gg x$$

$$E_c = \frac{\tau}{2\pi\epsilon_0 x}$$

$$x \gg \ell/2$$

$$\tau \ell = q$$

$$E_c = \frac{q}{4\pi\epsilon_0 x^2}$$

**8.(9.30)** Длина однородно заряженной нити  $l=25$  см. При каком предельном расстоянии  $a$  от нити по нормали к ее середине возбуждаемое ею электрическое поле можно рассматривать как поле бесконечно длинной заряженной нити? Ошибка  $\delta$  при таком допущении не должна превышать 0,05. Указание: допускаемая ошибка  $\delta$  равна  $(E_2 - E_1)/E_2$ , где  $E_2$  – напряженность электрического поля бесконечно длинной нити,  $E_1$  – напряженность поля нити конечной длины.

**Дано**

$$l = 25 \text{ см}$$

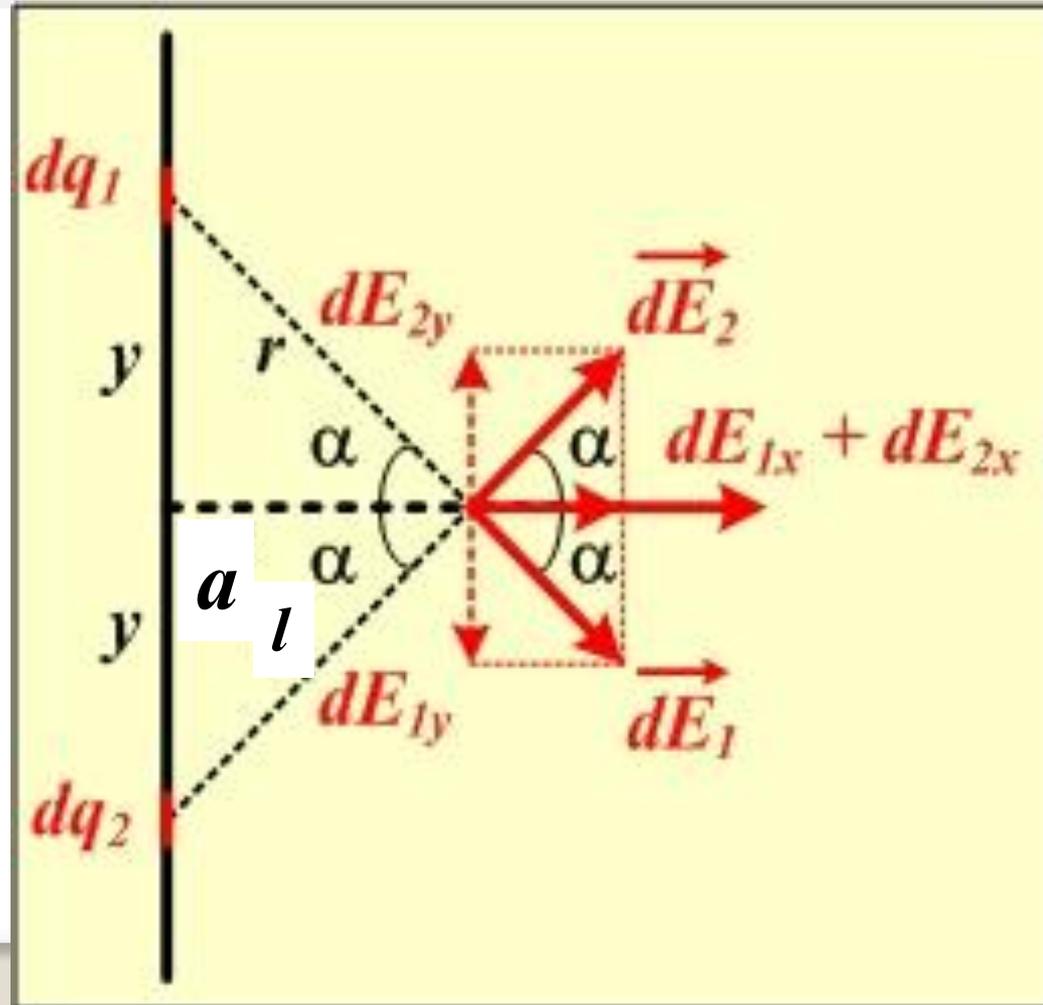
$$\delta = 0,05$$

$a = ?$

$$E_2 = \frac{\tau}{2\pi\epsilon_0 a}$$

$$E_1 = \frac{\tau \sin \theta}{2\pi\epsilon_0 a}$$

$$\delta = \frac{E_2 - E_1}{E_2}$$



$$\delta = \frac{E_2 - E_1}{E_2} = 1 - \sin \theta = 1 - \frac{\ell}{\sqrt{\ell^2 + 4a^2}},$$

$$\delta = 1 - \frac{\ell}{\sqrt{\ell^2 + 4a^2}} = 1 - \delta$$

$$4a^2 = \frac{\ell^2}{(1-\delta)^2} - \ell^2 \qquad \ell^2 = (1-\delta)^2 (\ell^2 + 4a^2)$$

$$a = \frac{1}{2} \sqrt{\frac{\ell^2}{(1-\delta)^2} - \ell^2}, \qquad a = \frac{\ell}{2} \sqrt{\frac{1}{(1-\delta)^2} - 1}.$$

$$a = \frac{0,25}{2} \sqrt{\frac{1}{(1-0,05)^2} - 1} = 0,041$$

**Ответ:** a=4,1 см.

**9.(9.33)** Напряженность электрического поля на оси однородно заряженного кольца имеет максимальное значение на некотором расстоянии от центра кольца. Во сколько раз напряженность электрического поля в точке, расположенной на половине этого расстояния, будет меньше максимального значения напряженности?

**Дано**

$$E(L) = E_{\max}$$

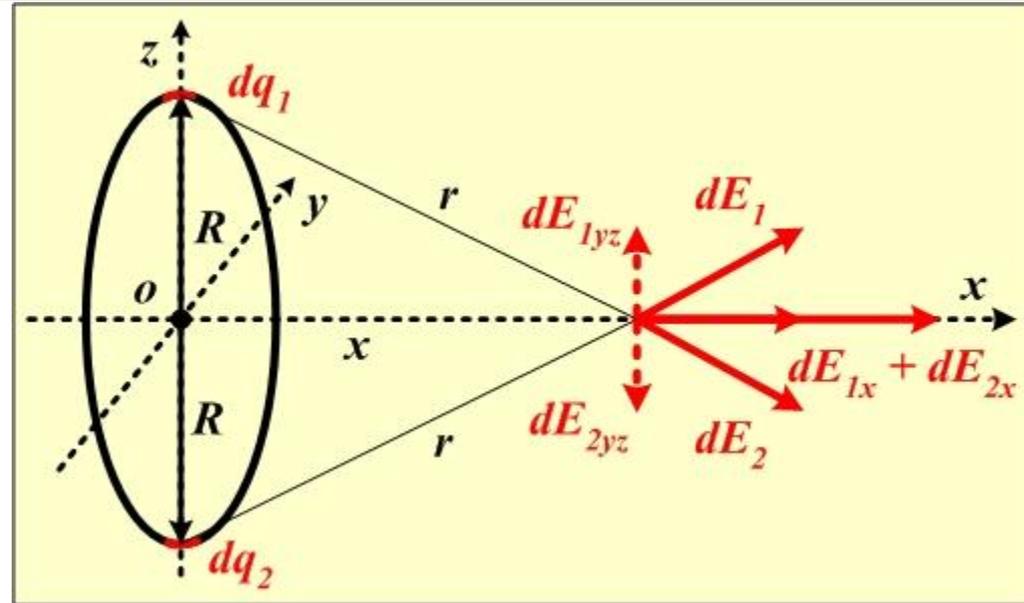

---


$$\frac{E_L}{E_{0,5L}} = ?$$

$$\sum_i d\vec{E}_{yi} = 0$$

$$\vec{E} = \sum d\vec{E}_x$$

$$dE_{x1} = dE_1 \cos \alpha$$



$$E = \frac{q \cos \alpha}{2\pi\epsilon_0 r^2}$$

$$E = \frac{qx}{2\pi\epsilon_0 (R^2 + x^2)^{3/2}}$$

$$\frac{dE(x)}{dx} = 0$$

$$\frac{dE(x)}{d\ell} = \frac{q[(R^2 + x^2)^{3/2} - 3/2(R^2 + x^2)^{1/2} 2x \cdot x]}{4\pi\epsilon_0 (R^2 + x^2)}$$

$$(R^2 + x^2)^{3/2} - \frac{3}{2}(R^2 + x^2)2x^2 = 0.$$

$$x = L = \frac{R}{\sqrt{2}}.$$

$$E(0,5L) = \frac{q}{4\pi\epsilon_0} \frac{R/2\sqrt{2}}{\left(R^2 + \frac{R^2}{8}\right)^{3/2}}.$$

$$\frac{E_L}{E_{0,5L}} = \frac{R\sqrt{2}(R^2 + R^2/8)^{3/2}}{(R^2 + R^2/2)^{3/2} R/2\sqrt{2}} = \frac{2(1+1/8)^{3/2}}{(1+1/2)^{3/2}} = 1,3$$

**10.** По четверти кольца радиусом  $r=6,1$  см однородно распределен положительный заряд с линейной плотностью  $\tau=64$  нКл/м. Найти силу  $F$ , действующую на заряд  $q=12$  нКл, расположенный в центре кольца.

**Дано**

$r=6,1$  см  
 $\tau=64$  нКл/м  
 $q=12$  нКл

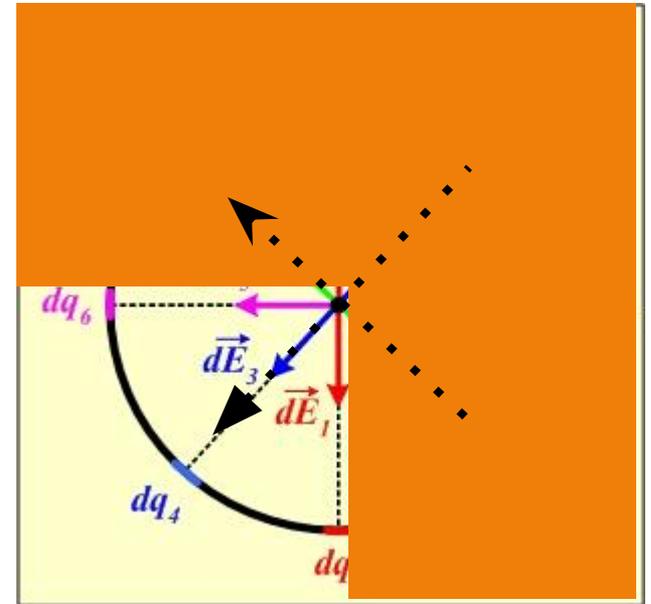
$F=?$

$$F = qE_0$$

$$\sum_i d\vec{E}_{yi} = 0$$

$$\vec{E}_0 = \sum d\vec{E}_x$$

$$dE = \frac{dq}{4\pi\epsilon_0 r^2}$$



$$E_0 = 2 \int_0^{\pi/8} dE_x = 2 \int_0^{\pi/2} \frac{\tau r d\alpha}{4\pi\epsilon_0 r^2} \cos\alpha = \frac{2\tau}{4\pi\epsilon_0 r} \int_0^{\pi/8} \cos\alpha d\alpha =$$

$$\frac{\tau}{2\pi\epsilon_0 r} \sin\alpha \Big|_0^{\pi/8} = \frac{\tau}{2\pi\epsilon_0 r} \sin\pi/8.$$

$$F = qE_0 = \frac{12 \cdot 10^{-9} \cdot 64 \cdot 10^{-9} \cdot \sqrt{2}/2}{2 \cdot 3,14 \cdot 8,85 \cdot 10^{-12} \cdot 6,1 \cdot 10^{-2}} = 161$$

**Ответ:**  $F = 161$  мкН.

## *Напряженность поля заряженной сферы*

**11.** Напряженность электрического поля, создаваемого металлической сферой радиусом  $R$ , несущей заряд  $Q$ , на расстоянии  $r$  от центра сферы:

внутри сферы ( $r < R$ ):  $E = 0$ ;

на поверхности сферы ( $r = R$ ): 
$$E = \frac{Q}{4\pi\epsilon\epsilon_0 R^2}$$

вне сферы ( $r > R$ ): 
$$E = \frac{Q}{4\pi\epsilon\epsilon_0 r^2}$$

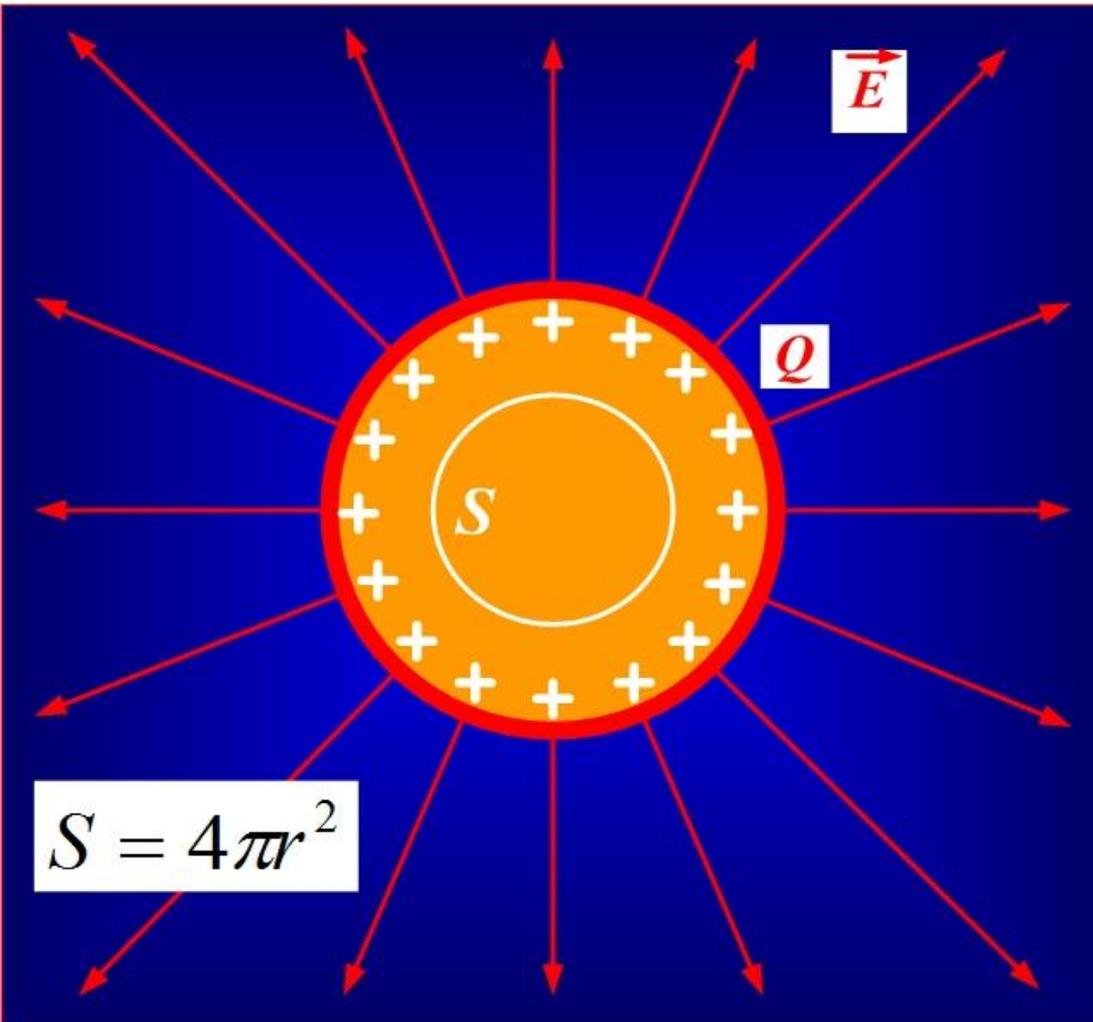
Получите данные соотношения.

# Применение теоремы О.-Г. к расчету полей заряженных тел.

Заряженная равномерно по поверхности сфера.

$$\sigma = \frac{Q}{S} = \frac{Q}{4\pi R^2}$$

$$\Phi_E = \oint_S (\vec{E} dS) = \frac{q}{\varepsilon_0}$$



Поверхность сферы разделяет все пространство на две части: внутреннюю ( $r < R$ ) и внешнюю ( $r \geq R$ ).

$$r < R \quad Q = 0$$

$$\Phi_E = ES =$$

$$= E \cdot 4\pi \cdot r_1^2 = \frac{0}{\varepsilon_0}$$

$$E = 0$$

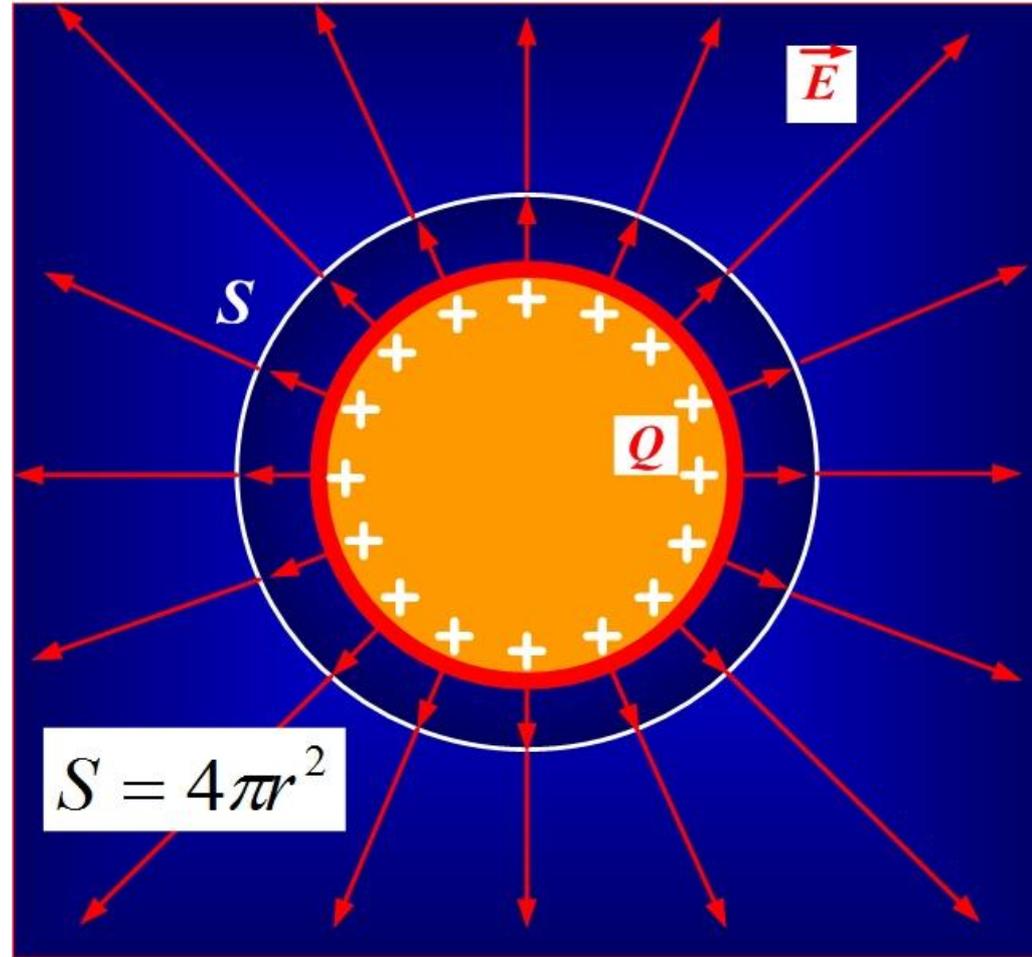
# Применение теоремы О.-Г. к расчету полей заряженных тел.

Заряженная равномерно по поверхности сфера.

$$r \geq R \quad Q = \sigma 4\pi R^2$$

$$\Phi_E = 4\pi r^2 E = \frac{Q}{\epsilon_0}$$

$$= \frac{\sigma 4\pi R^2}{\epsilon_0}$$



$$E = \frac{Q}{4\pi\epsilon_0 r_2^2} = \frac{\sigma 4\pi R^2}{4\pi\epsilon_0 r_2^2} = \frac{\sigma R^2}{\epsilon_0 r_2^2}.$$