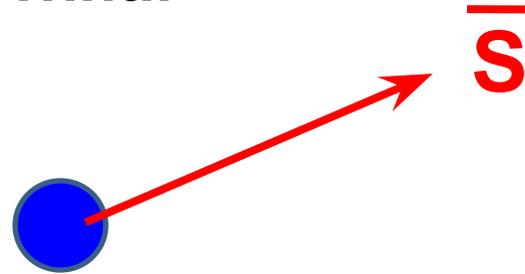


# Приложения математического аппарата

**СПИНОВОЙ МОМЕНТ (или просто СПИН) —**

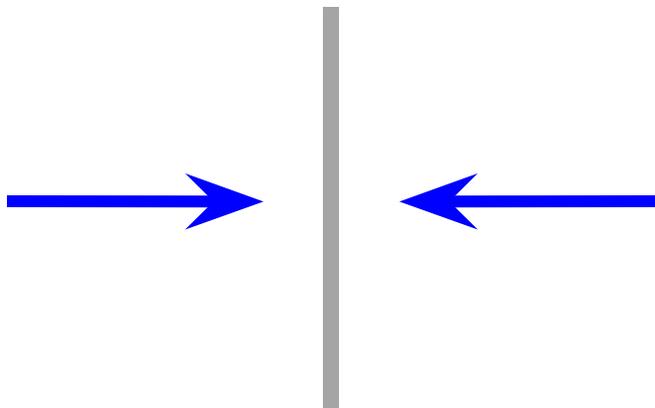
наблюдаемая векторного типа:



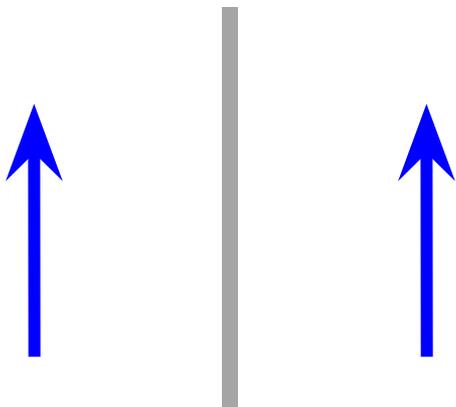
для задания которой необходимо указать:

- длину (модуль) вектора спина  $|\vec{S}|$ ,
- направление (ориентацию) вектора спина в пространстве (проекции вектора на декартовы координатные оси  $S_x$ ,  $S_y$  и  $S_z$ )

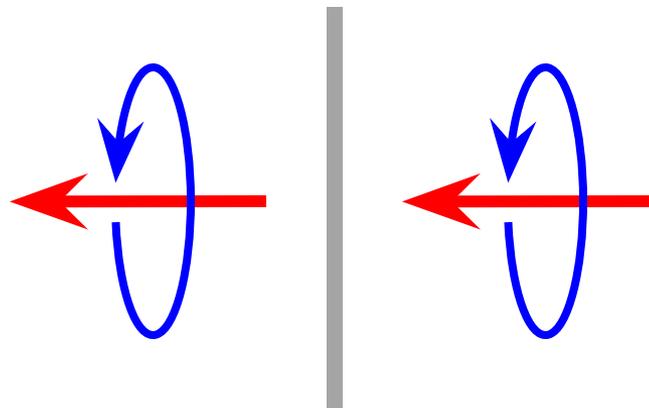
**ВЕКТОР**  
(импульс, **P**)



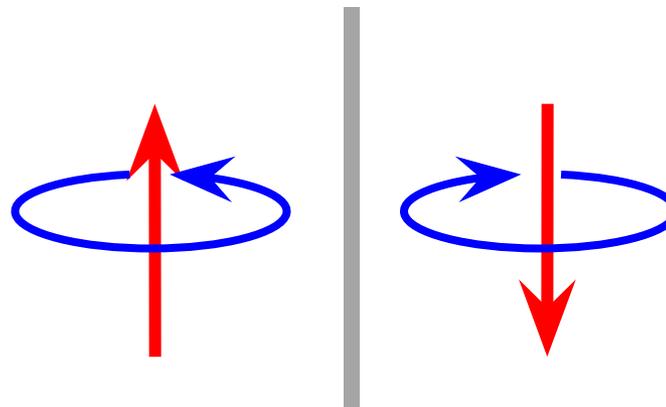
**ОТРАЖЕНИЕ В ЗЕРКАЛЕ**



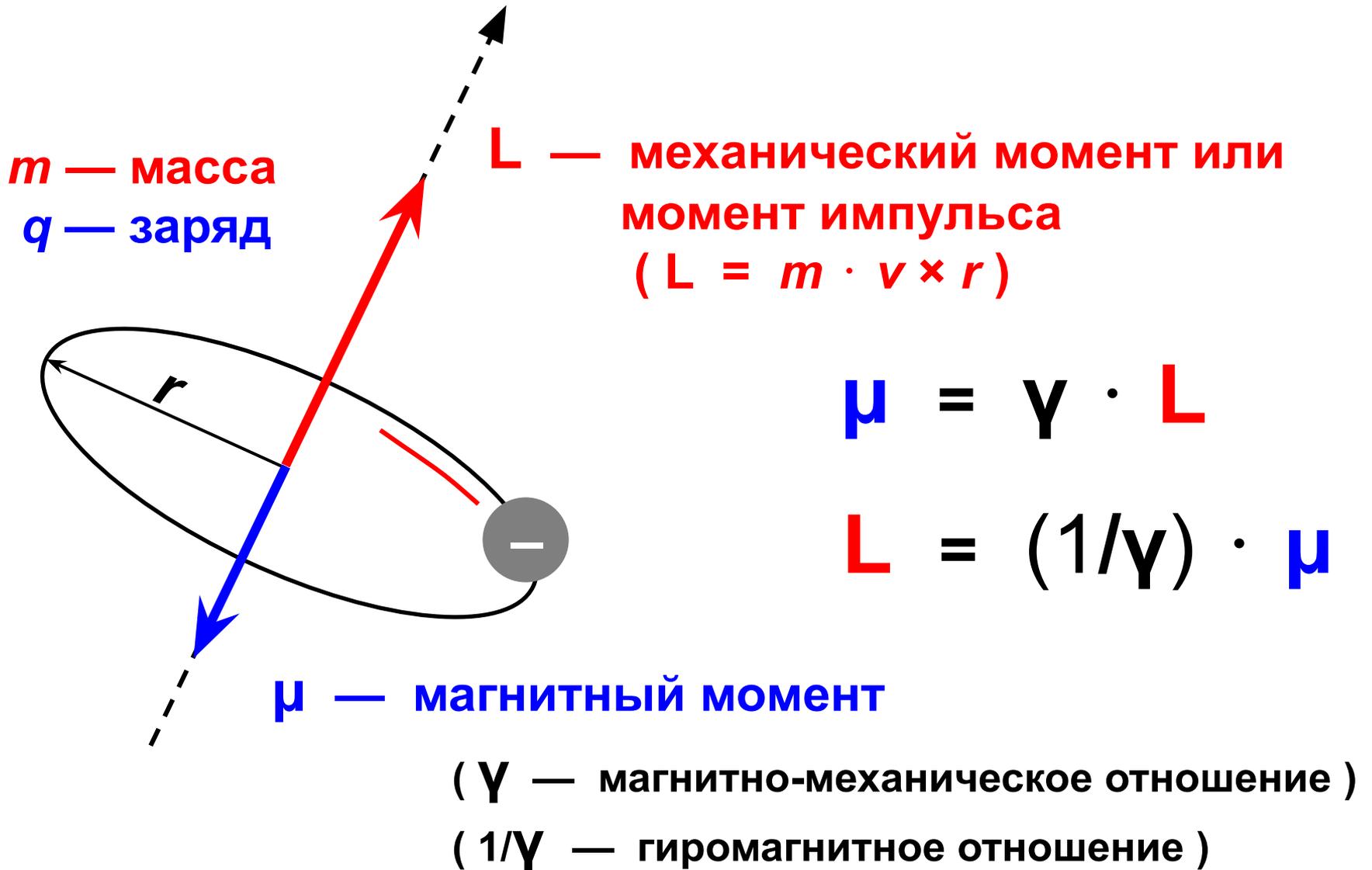
**ПСЕВДОВЕКТОР**  
(момент импульса, **L**  
и спин, **S**)



**ОТРАЖЕНИЕ В ЗЕРКАЛЕ**

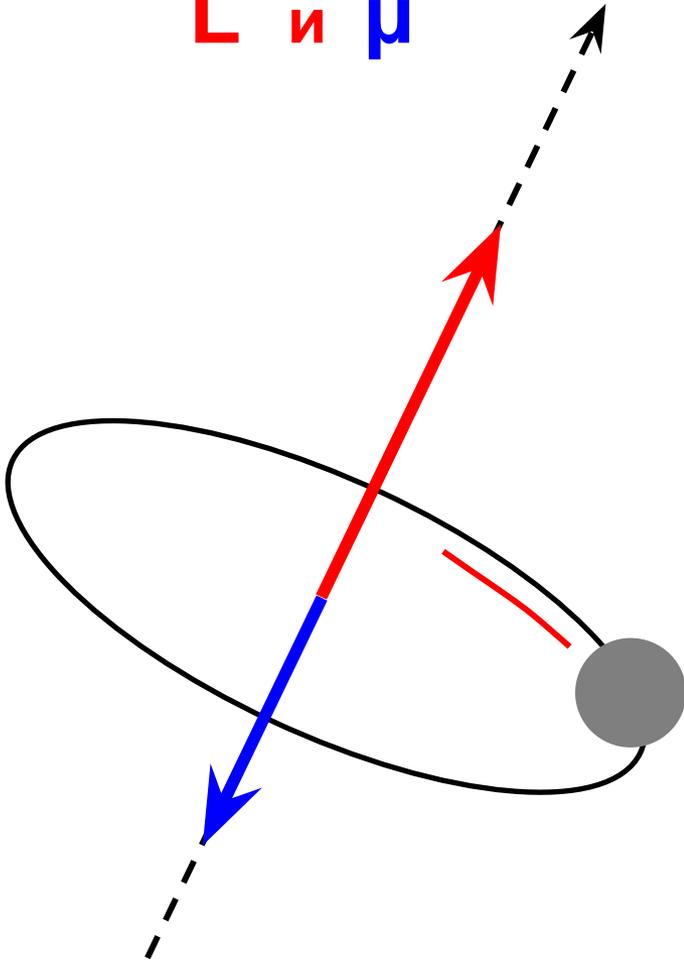


# Экспериментальное обнаружение спина



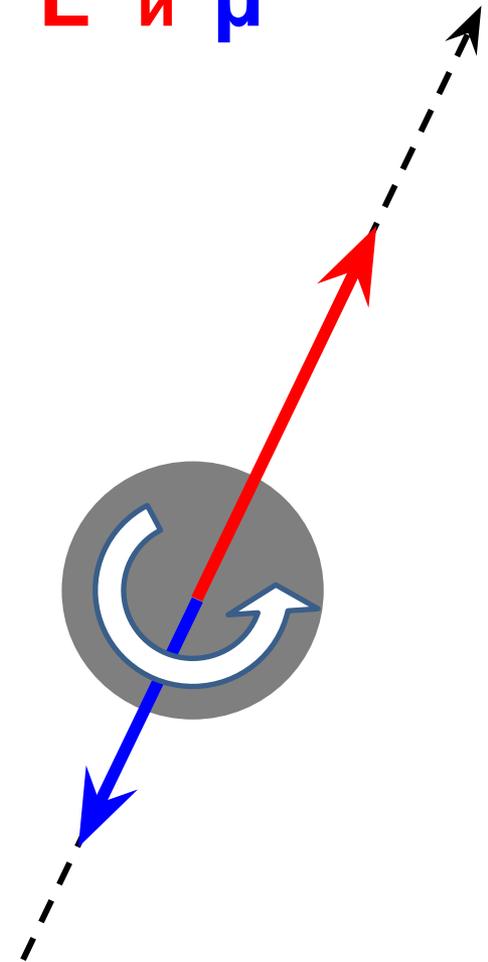
**ВНЕШНИЕ**  
**(«орбитальные»)**  
**МОМЕНТЫ**

**L** и  **$\mu$**



**ВНУТРЕННИЕ**  
**(«собственные»)**  
**МОМЕНТЫ**

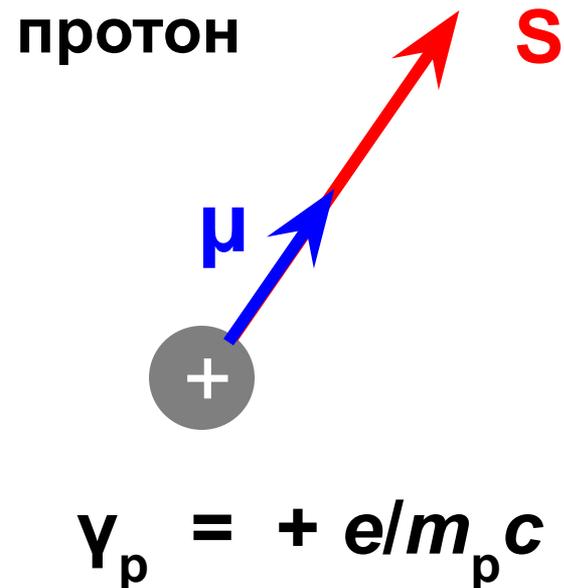
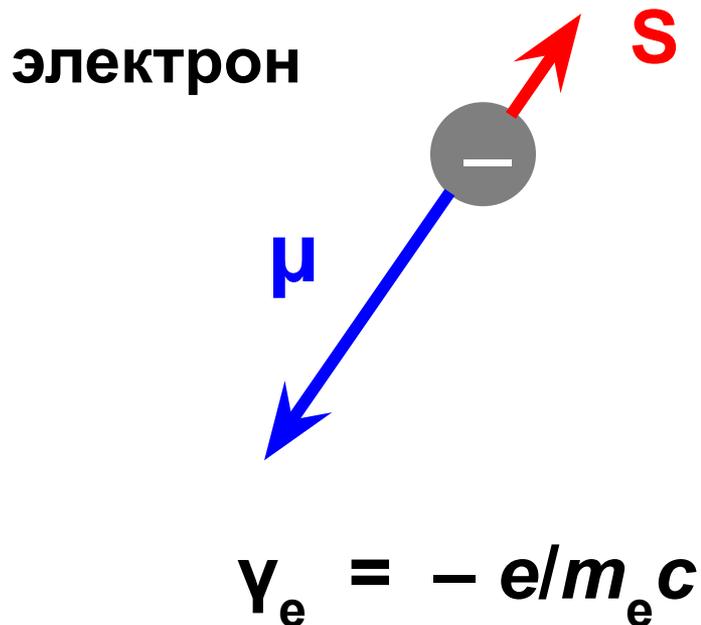
**L** и  **$\mu$**



Микрочастица обладает электрическим зарядом и «собственным» магнитным моментом, который обнаруживается по влиянию на него внешнего магнитного поля

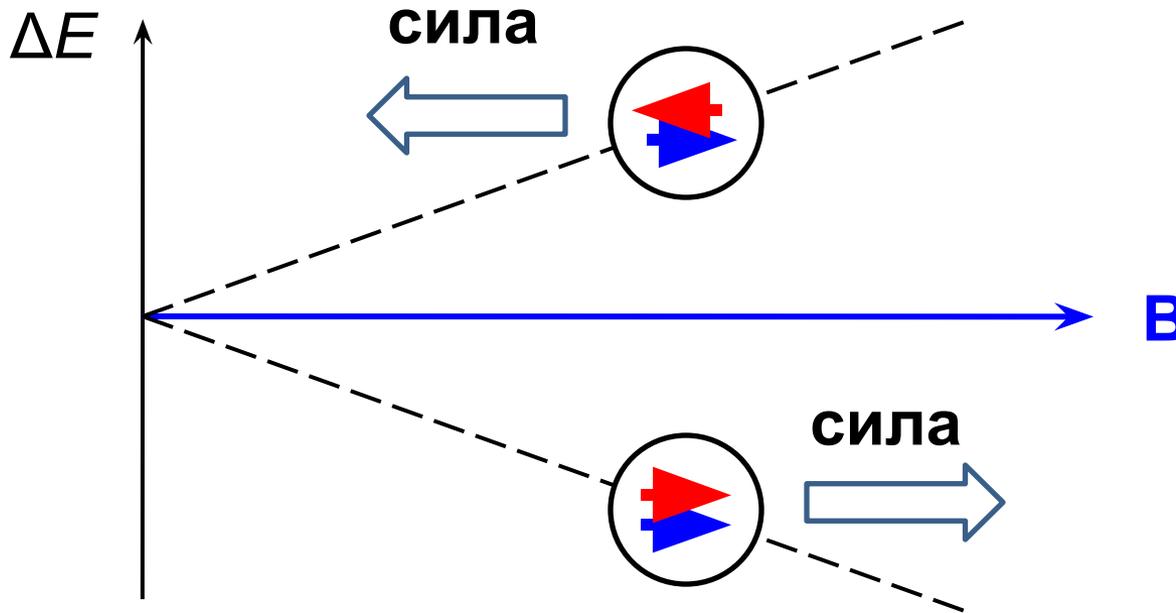


Поскольку микрочастица обладает не только зарядом, но и массой, то с ее магнитным моментом должен быть связан «собственный» механический момент — СПИН



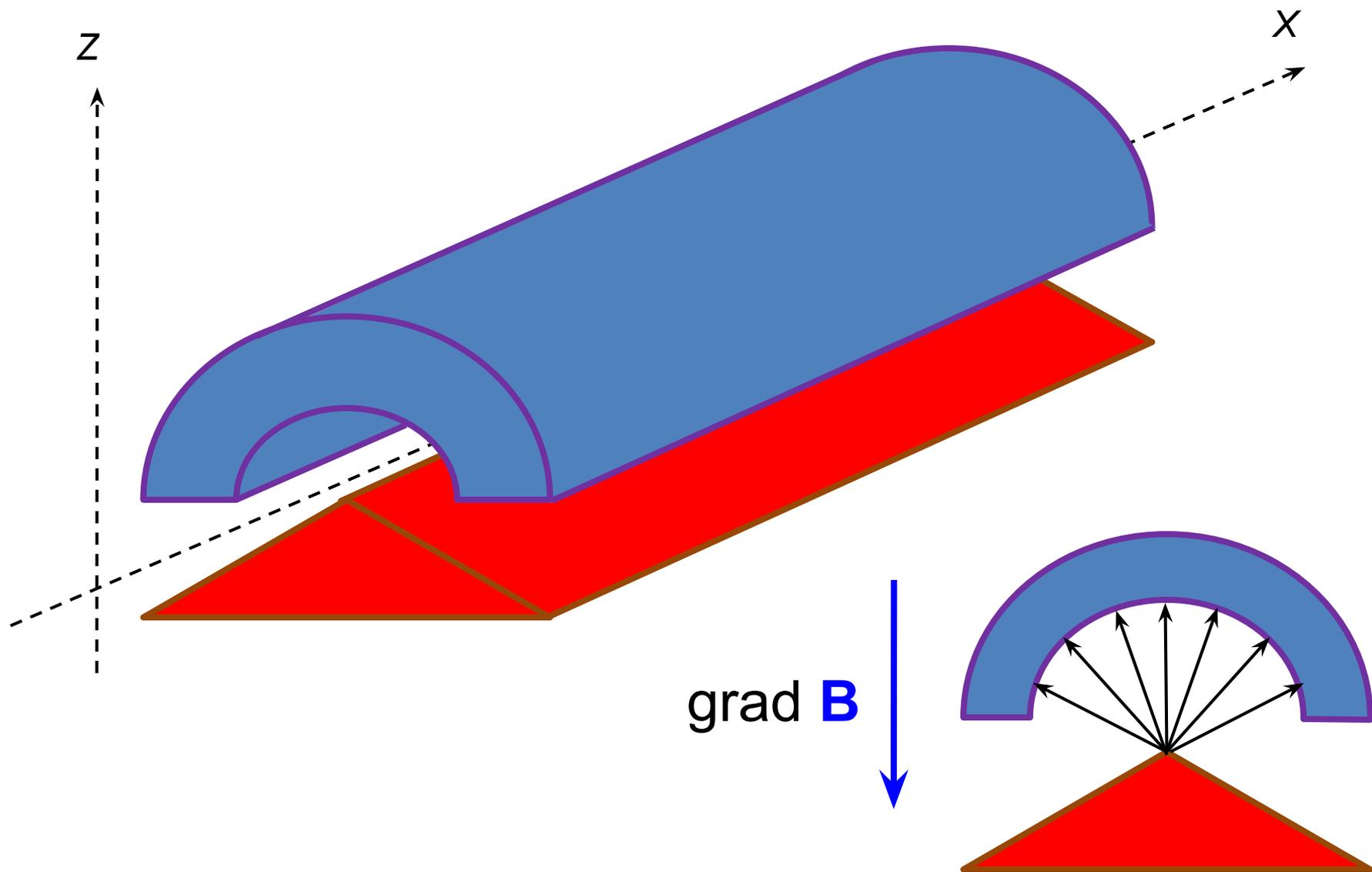
## Взаимодействие магнитных моментов с неоднородным магнитным полем

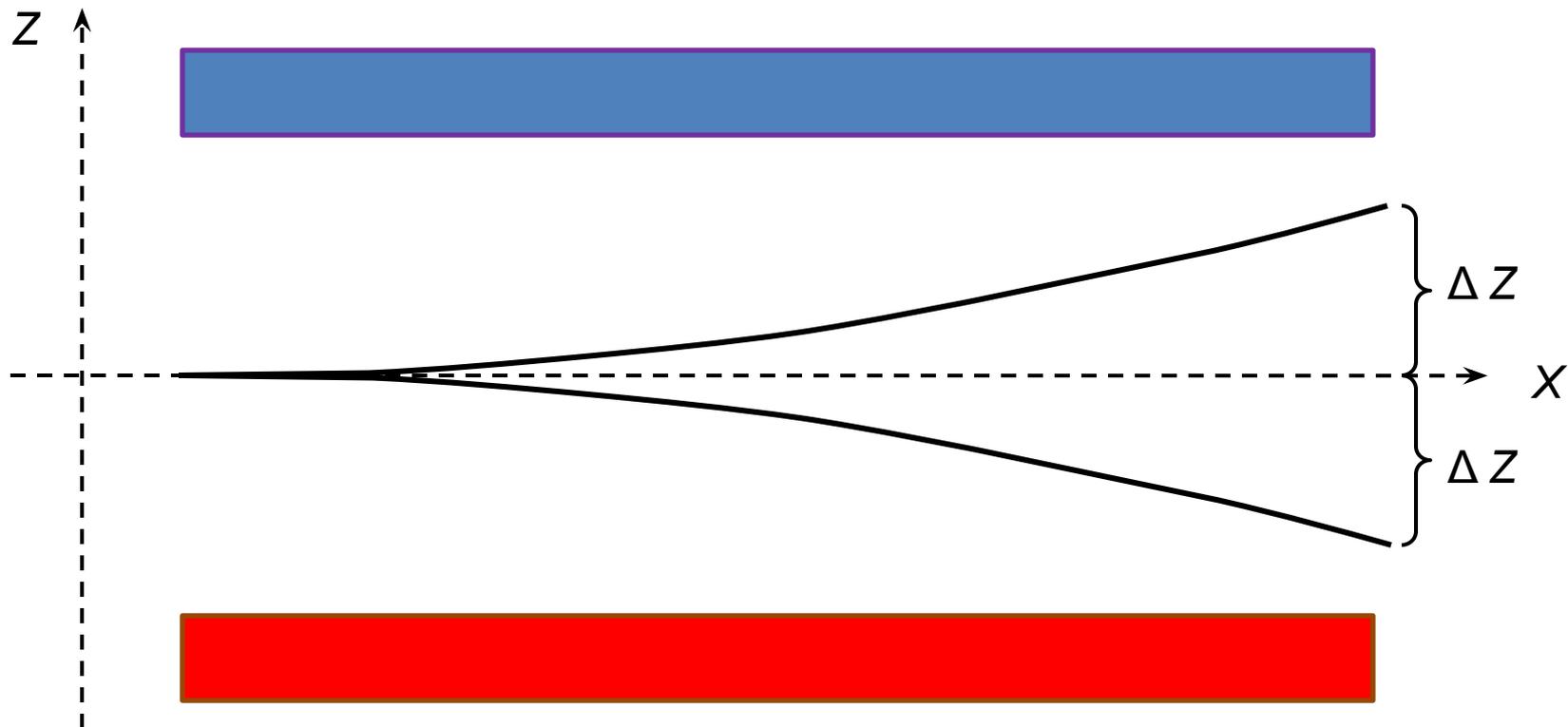
$$\Delta E = -\boldsymbol{\mu} \cdot \mathbf{B} = -|\boldsymbol{\mu}| \cdot |\mathbf{B}| \cdot \cos \alpha = -\mu_B \cdot |\mathbf{B}|$$



**В зависимости от направления вектора магнитного момента (и спина) частица выталкивается в область слабого или сильного внешнего поля**

# Прибор Штерна-Герлаха





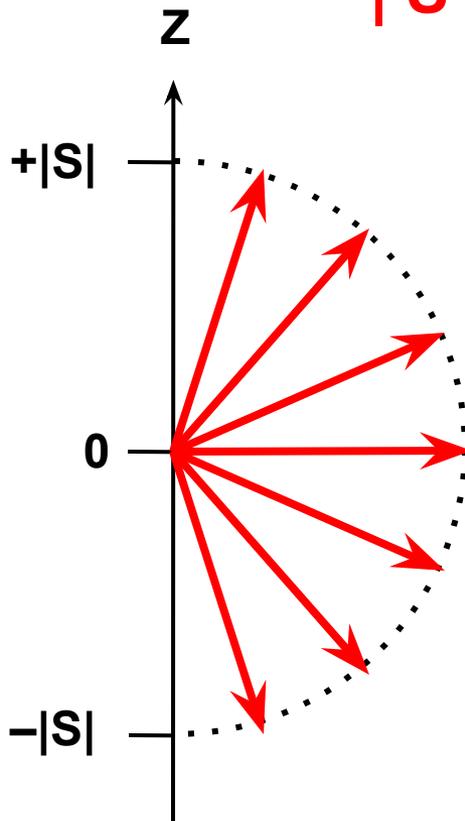
$$\Delta Z = \frac{1}{2m} \cdot \mu_z \cdot \frac{dB}{dZ} \cdot \frac{L^2}{v^2}$$

(  $L$  — длина прибора,  $v$  — скорость движения частицы )

**ВЫВОД:** Прибор Штерна-Герлаха является спектральным анализатором, предназначенным для измерения двух наблюдаемых:

$S_z$  — проекция вектора спина на ось  $z$

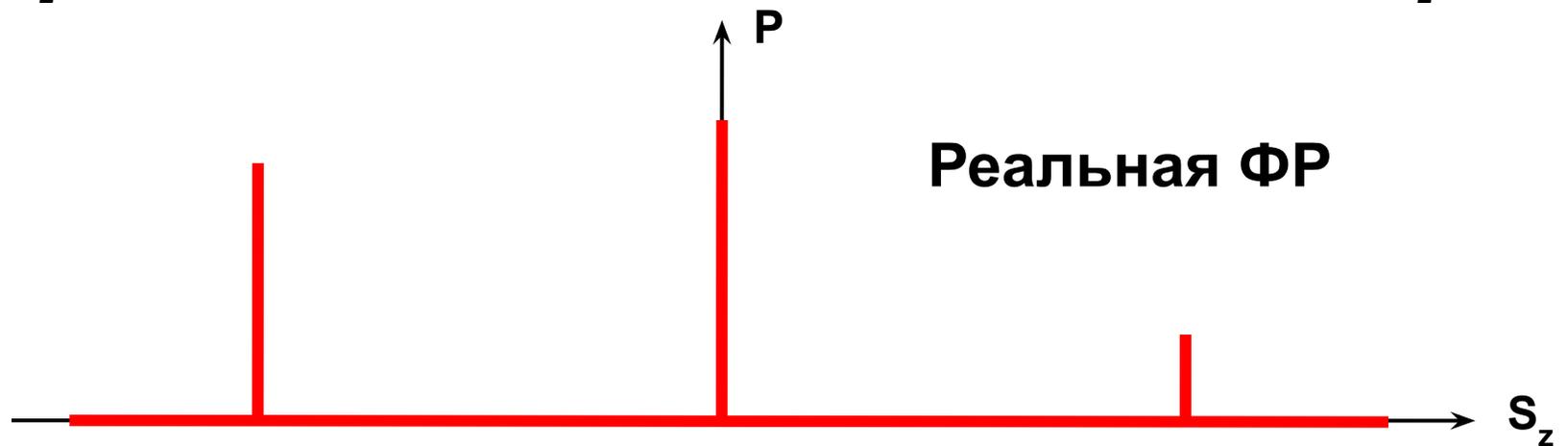
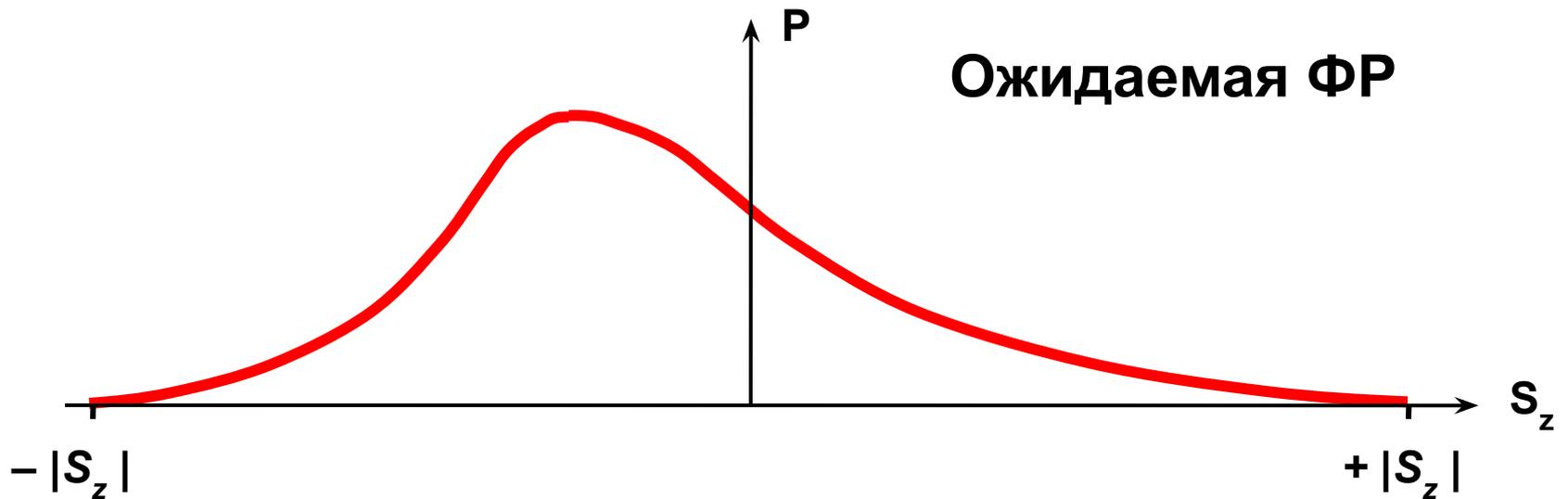
$|S|$  — модуль вектора спина



Эти два числа полностью характеризуют наблюдаемую, называемую

**СПИНОМ**

(или **СПИНОВЫМ МОМЕНТОМ**)



Наблюдаемая  $S_z$  имеет дискретный спектр  
Число пиков — **МУЛЬТИПЛЕТНОСТЬ** ( $N = 1, 2, 3, \dots$ )

## Физические результаты эксперимента:

- 1) **ВЕЛИЧИНА** (модуль) вектора спина строго определена природой частицы и всегда имеет только одно значение, т.е.  $|\mathbf{S}| = \text{const}$ ,
- 2) **ОРИЕНТАЦИЯ** вектора спина относительно оси Z может осуществляться только несколькими различными («разрешенными») способами, т.е.

$$\mathbf{S}_z = \mathbf{S}_{z1}, \mathbf{S}_{z2}, \dots, \mathbf{S}_{zn}$$

число которых  $N$  (мультиплетность) зависит только от природы частицы,

- 3) **ВЕРОЯТНОСТИ** различных ориентаций вектора спина

$$P_1, P_2, \dots, P_n$$

зависят от конкретных условий приготовления объекта со спином.

**Вспомогательные величины:** (для удобства описания)

**СПИНОВОЕ КВАНТОВОЕ ЧИСЛО  $s$**

$$N = 2s + 1$$

**МАГНИТНОЕ СПИНОВОЕ КВАНТОВОЕ ЧИСЛО  $m_s$**

$$m_s = \underbrace{-s, -s + 1, -s + 2, \dots, s - 2, s - 1, s}_N$$

$$| \mathbf{S} | = \hbar \sqrt{s(s + 1)}$$

$$| \mathbf{S} |^2 = \hbar^2 \cdot s(s + 1)$$

$$S_z = \hbar \cdot m_s$$

## Электрон, протон, нейтрон

$$N = 2 \quad \Rightarrow \quad \begin{cases} \mathbf{s} = (N - 1)/2 = 1/2 \\ m_s = \{-1/2; +1/2\} \end{cases}$$

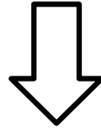
$$|\mathbf{S}| = \square \sqrt{3} / 2 \quad \mathbf{S}_z = \{-\square/2; +\square/2\}$$

## Дейтрон (ядро дейтерия)

$$N = 3 \quad \Rightarrow \quad \begin{cases} \mathbf{s} = (N - 1)/2 = 1 \\ m_s = \{-1; 0; +1/2\} \end{cases}$$

$$|\mathbf{S}| = \square \sqrt{2} \quad \mathbf{S}_z = \{-\square; 0; +\square\}$$

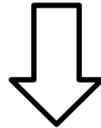
**Мультиплетность (  $N$  ) — целое число**



**Два класса спиновых квантовых чисел (  $s$  )**

**ЦЕЛЫЕ (при нечетных  $N = 1, 3, 5, \dots$ )**

**ПОЛУЦЕЛЫЕ (при четных  $N = 2, 4, 6, \dots$ )**



**Два класса микроскопических объектов**

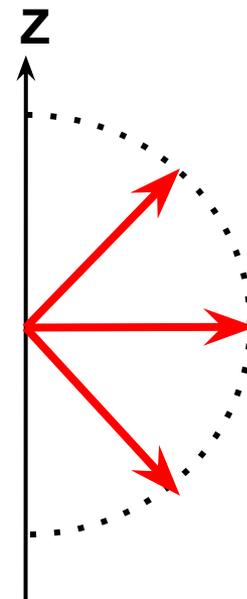
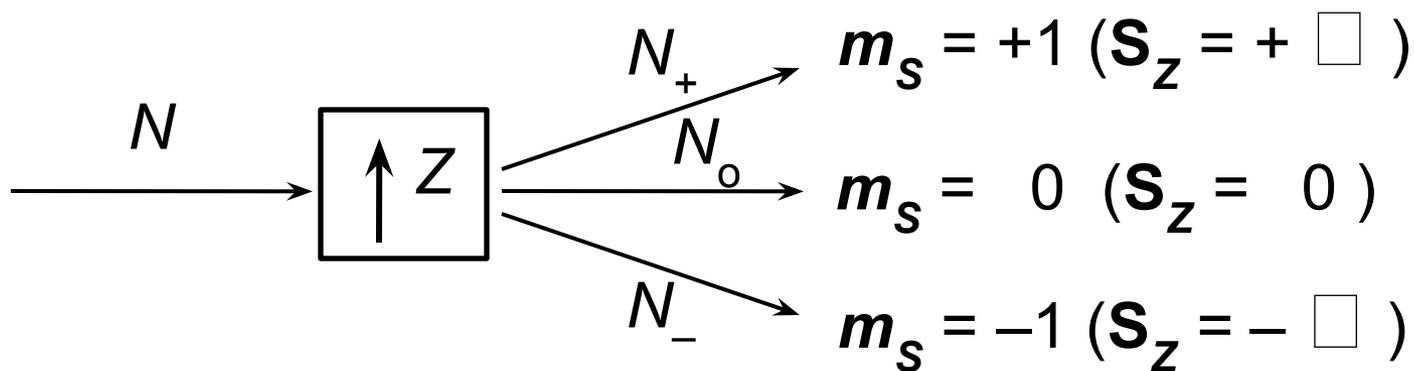
**БОЗОНЫ — частицы с целым спином**

**(  $s = 0, 1, 2, \dots$  )**

**ФЕРМИОНЫ — частицы с полуцелым спином**

**(  $s = 1/2, 3/2, \dots$  )**

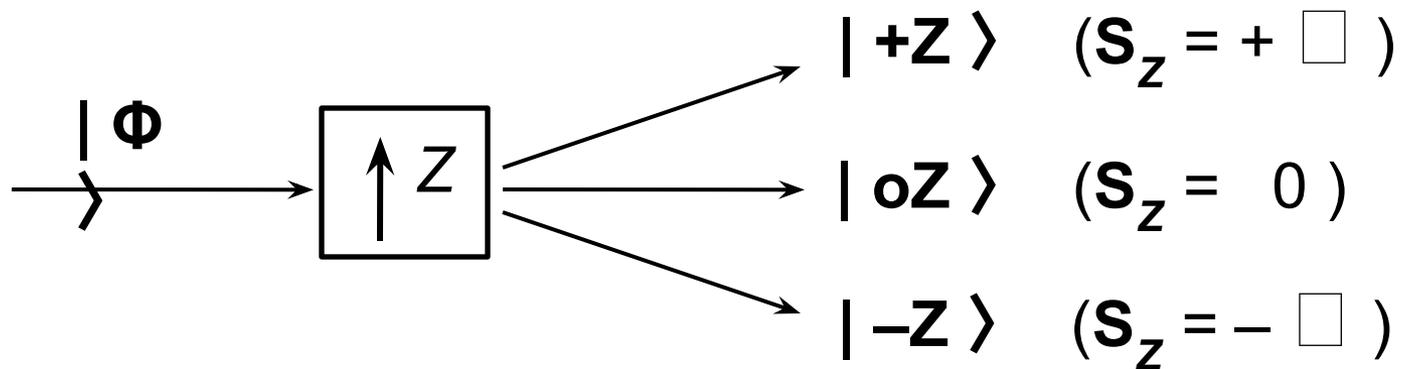
## Частица со спином 1 ( $s = 1$ )



## Вероятности

$$\left. \begin{aligned} (N_+ / N) &\rightarrow P_+ \\ (N_0 / N) &\rightarrow P_0 \\ (N_- / N) &\rightarrow P_- \end{aligned} \right\}$$

$$P_+ + P_0 + P_- = 1$$



**базисные состояния**

$$\begin{aligned}
 |\Phi\rangle &= |+Z\rangle \cdot Z_+ + |oZ\rangle \cdot Z_o + |-Z\rangle \cdot Z_- = \\
 &= |+Z\rangle \cdot \langle +Z | \Phi \rangle + |oZ\rangle \cdot \langle oZ | \Phi \rangle + |-Z\rangle \cdot \langle -Z | \Phi \rangle
 \end{aligned}$$

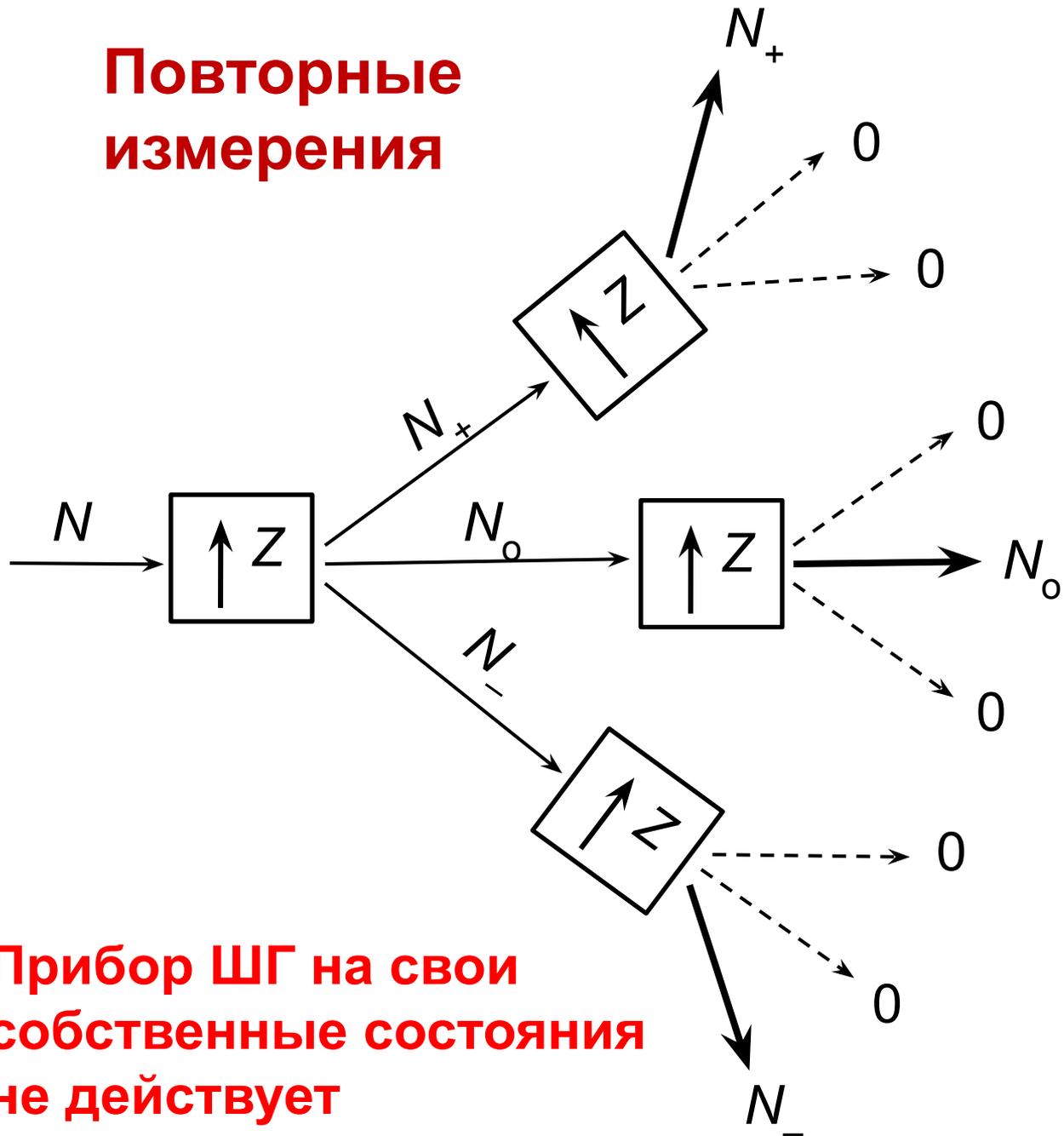
**амплитуды**

$$|Z_+|^2 = P_+$$

$$|Z_o|^2 = P_o$$

$$|Z_-|^2 = P_-$$

# Повторные измерения



$$\langle +Z | +Z \rangle = 1$$
$$\langle 0Z | +Z \rangle = 0$$
$$\langle -Z | +Z \rangle = 0$$

$$\langle +Z | 0Z \rangle = 0$$
$$\langle 0Z | 0Z \rangle = 1$$
$$\langle -Z | 0Z \rangle = 0$$

$$\langle +Z | -Z \rangle = 0$$
$$\langle 0Z | -Z \rangle = 0$$
$$\langle -Z | -Z \rangle = 1$$

Прибор ШГ на свои собственные состояния не действует

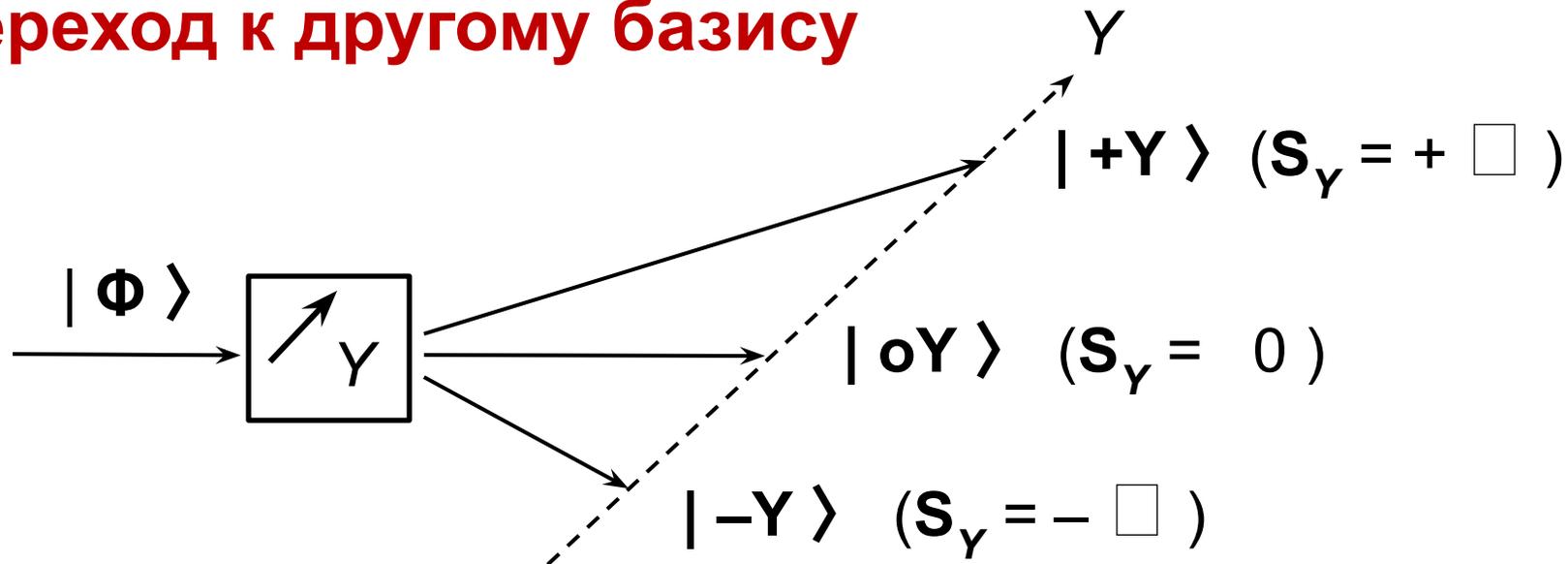
$$\begin{pmatrix} \langle +Z | +Z \rangle & \langle oZ | +Z \rangle & \langle -Z | +Z \rangle \\ \langle +Z | oZ \rangle & \langle oZ | oZ \rangle & \langle -Z | oZ \rangle \\ \langle +Z | -Z \rangle & \langle oZ | -Z \rangle & \langle -Z | -Z \rangle \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix} = \delta_{ij}$$

$$\delta_{ij} = \begin{cases} 1 & \text{при } i = j \\ 0 & \text{при } i \neq j \end{cases} \quad \text{— символ Кронекера}$$

**Векторы базисных состояний любого спектрального анализатора взаимно ортогональны**

**Собственные векторы любого оператора КМ-наблюдаемой взаимно ортогональны (образуют ортонормированный базис)**

# Переход к другому базису



## базисные состояния

$$\begin{aligned} |\Phi\rangle &= |+Y\rangle \cdot Y_+ + |oY\rangle \cdot Y_o + |-Y\rangle \cdot Y_- = \\ &= |+Y\rangle \cdot \langle +Y | \Phi \rangle + |oY\rangle \cdot \langle oY | \Phi \rangle + |-Y\rangle \cdot \langle -Y | \Phi \rangle \end{aligned}$$

амплитуды

## Z-представление

$$|\Phi\rangle = |+\mathbf{Z}\rangle \cdot Z_+ + |0\mathbf{Z}\rangle \cdot Z_0 + |-\mathbf{Z}\rangle \cdot Z_- = (Z_+, Z_0, Z_-)$$

## Y-представление

$$|\Phi\rangle = |+\mathbf{Y}\rangle \cdot Y_+ + |0\mathbf{Y}\rangle \cdot Y_0 + |-\mathbf{Y}\rangle \cdot Y_- = (Y_+, Y_0, Y_-)$$

$$|\Phi\rangle_Z \begin{array}{c} \xrightarrow{U_{Z\leftarrow Y}} \\ \xleftarrow{U_{Y\leftarrow Z}} \end{array} |\Phi\rangle_Y$$

$\left. \begin{array}{l} U_{Z\leftarrow Y} \\ U_{Y\leftarrow Z} \end{array} \right\}$  унитарные операторы перехода от одного представления (базиса) к другому

$$\mathbf{U}_{Y \leftarrow Z} |\Phi\rangle_Z = |\Phi\rangle_Y$$

$$\begin{pmatrix} \langle +Y | +Z \rangle & \langle +Y | 0Z \rangle & \langle +Y | -Z \rangle \\ \langle 0Y | +Z \rangle & \langle 0Y | 0Z \rangle & \langle 0Y | -Z \rangle \\ \langle -Y | +Z \rangle & \langle -Y | 0Z \rangle & \langle -Y | -Z \rangle \end{pmatrix} \begin{pmatrix} \langle +Z | \Phi \rangle \\ \langle 0Z | \Phi \rangle \\ \langle -Z | \Phi \rangle \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \langle +Y | \Phi \rangle \\ \langle 0Y | \Phi \rangle \\ \langle -Y | \Phi \rangle \end{pmatrix}$$

$$\mathbf{U}_{Z \leftarrow Y} |\Phi\rangle_Y = |\Phi\rangle_Z$$

$$\begin{pmatrix} \langle +Z | +Y \rangle & \langle +Z | 0Y \rangle & \langle +Z | -Y \rangle \\ \langle 0Z | +Y \rangle & \langle 0Z | 0Y \rangle & \langle 0Z | -Y \rangle \\ \langle -Z | +Y \rangle & \langle -Z | 0Y \rangle & \langle -Z | -Y \rangle \end{pmatrix} \begin{pmatrix} \langle +Y | \Phi \rangle \\ \langle 0Y | \Phi \rangle \\ \langle -Y | \Phi \rangle \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \langle +Z | \Phi \rangle \\ \langle 0Z | \Phi \rangle \\ \langle -Z | \Phi \rangle \end{pmatrix}$$

$$\mathbf{U}_{Y \leftarrow Z} = (\mathbf{U}_{Z \leftarrow Y})^{-1} = (\mathbf{U}_{Z \leftarrow Y})^\dagger$$

# Последовательные измерения

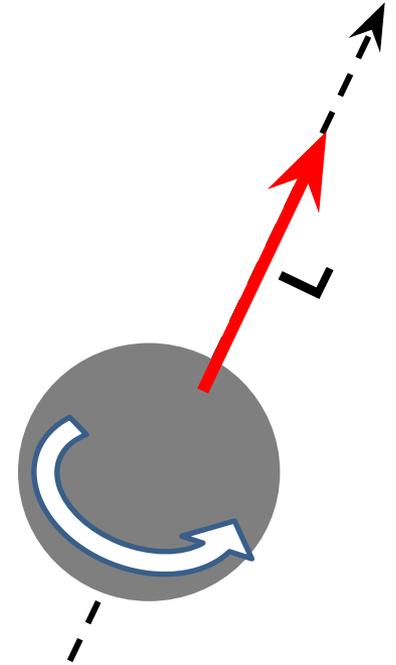
Вектор момента  $\mathbf{L}$  можно охарактеризовать:

а) **проекциями** на декартовы оси:

$$\mathbf{L} = L_x \cdot \mathbf{i} + L_y \cdot \mathbf{j} + L_z \cdot \mathbf{k} = (L_x, L_y, L_z),$$

б) **модулем** (длиной):

$$|\mathbf{L}|^2 = (L_x)^2 + (L_y)^2 + (L_z)^2$$



В классической (МАКРО-) механике все 4 числа (модуль и три проекции) можно определить независимо и проверить экспериментально

В квантовой (МИКРО-) механике любые измерения требуется производить **ПОСЛЕДОВАТЕЛЬНО**, что обусловлено конструкцией спектральных анализаторов (например, прибора Штерна-Герлаха)

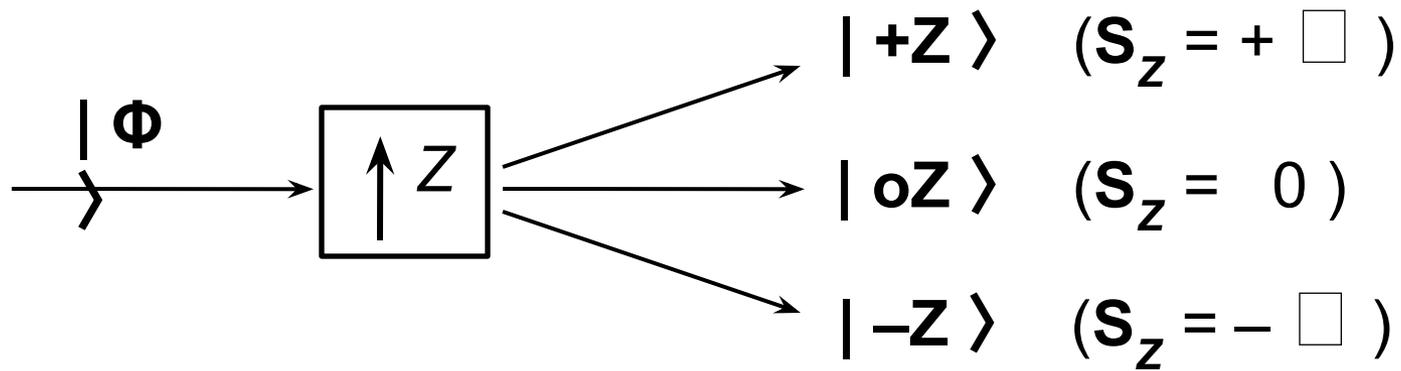
Поставим два вопроса:

Чему равна величина проекции  $\mathbf{S}_z$  ?

Чему равна величина проекции  $\mathbf{S}_y$  ?

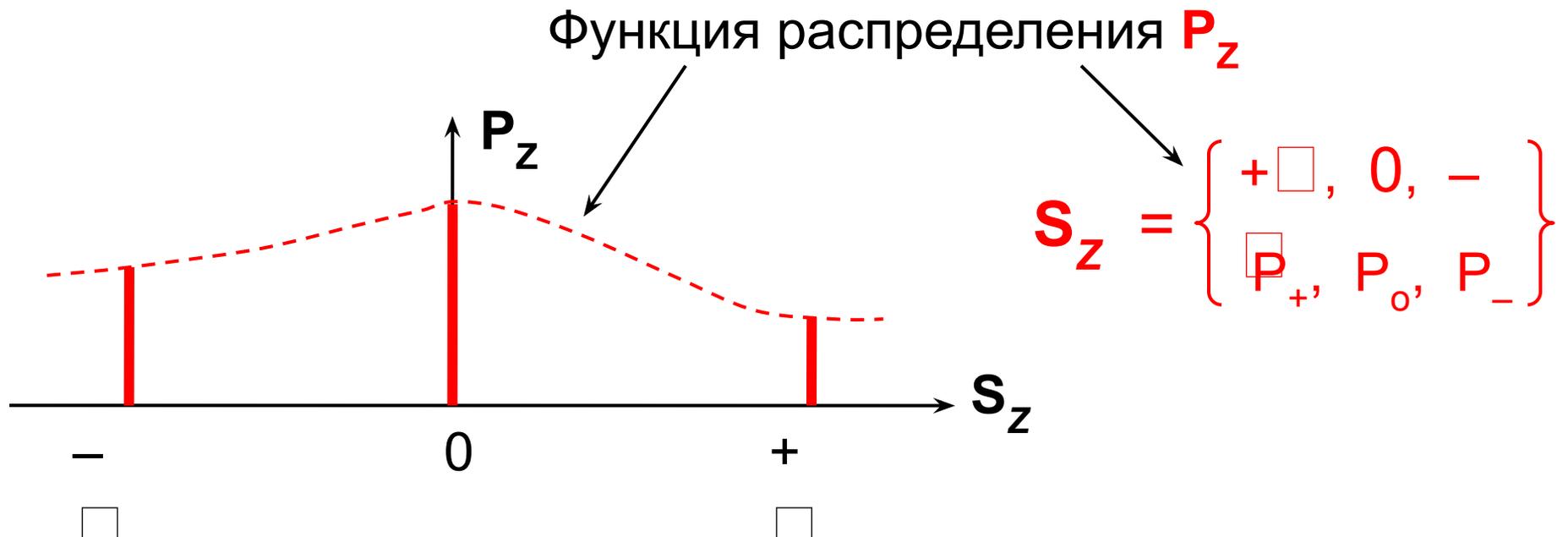
Для нахождения ответа нужно провести **ДВЕ** процедуры измерения с помощью **ДВУХ** приборов Штерна-Герлаха, ориентированных по осям  $Z$  и  $Y$ , соответственно.

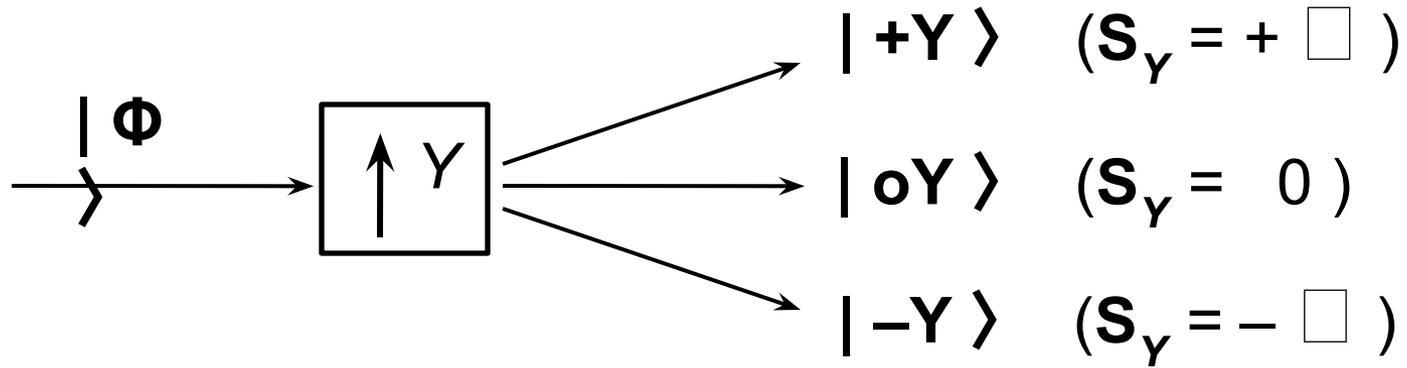
(источник частиц — один и тот же)



$$|\Phi\rangle = | +Z \rangle \cdot Z_+ + | oZ \rangle \cdot Z_0 + | -Z \rangle \cdot Z_- = (Z_+, Z_0, Z_-)$$

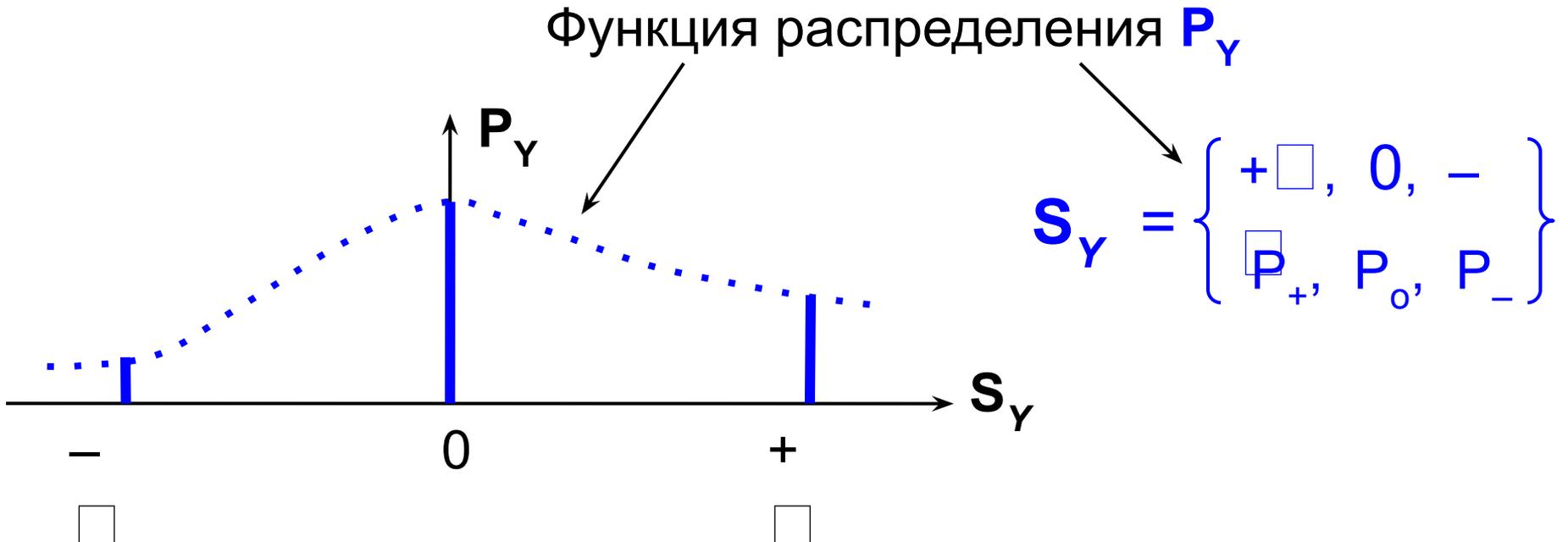
$$|Z_+|^2 = P_+; \quad |Z_0|^2 = P_0; \quad |Z_-|^2 = P_-$$

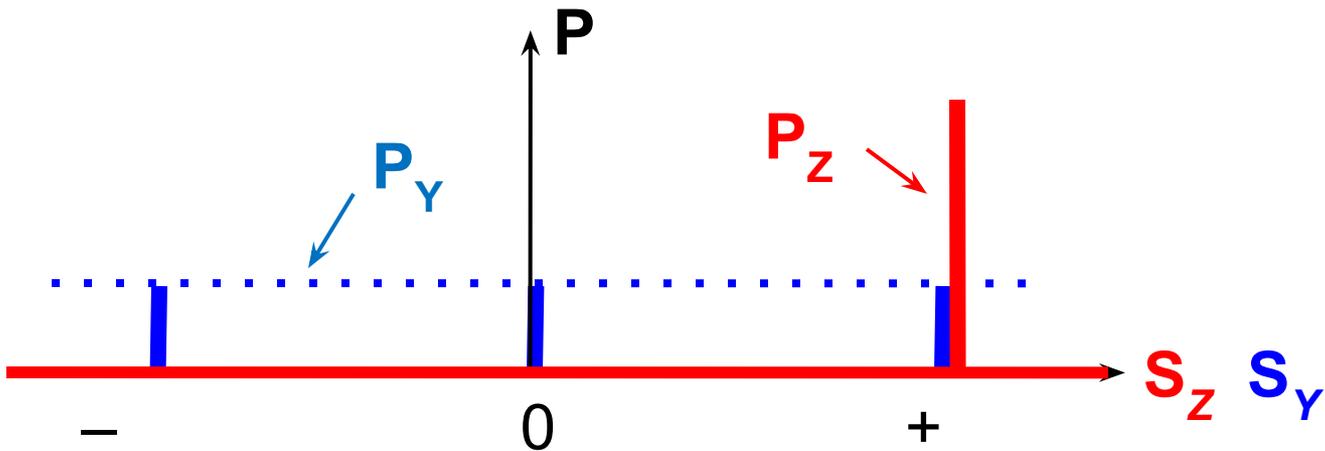
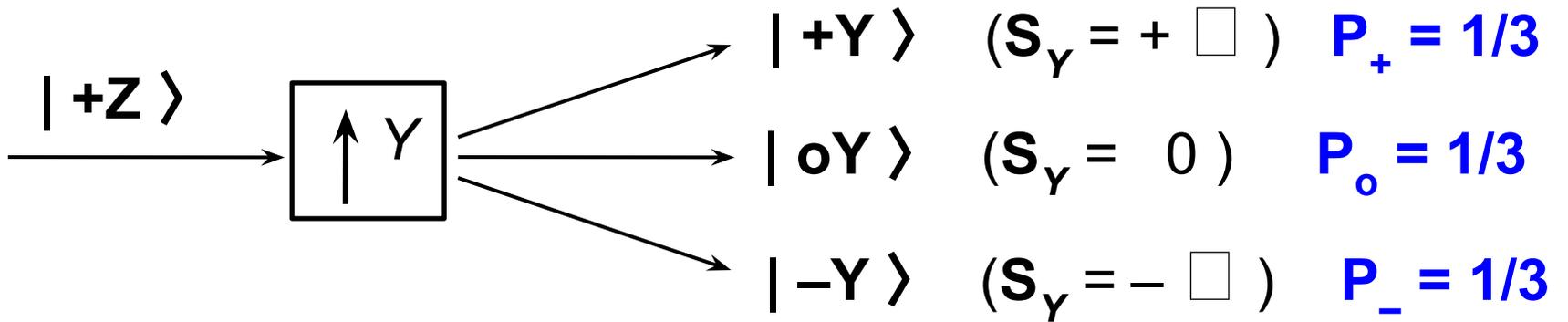
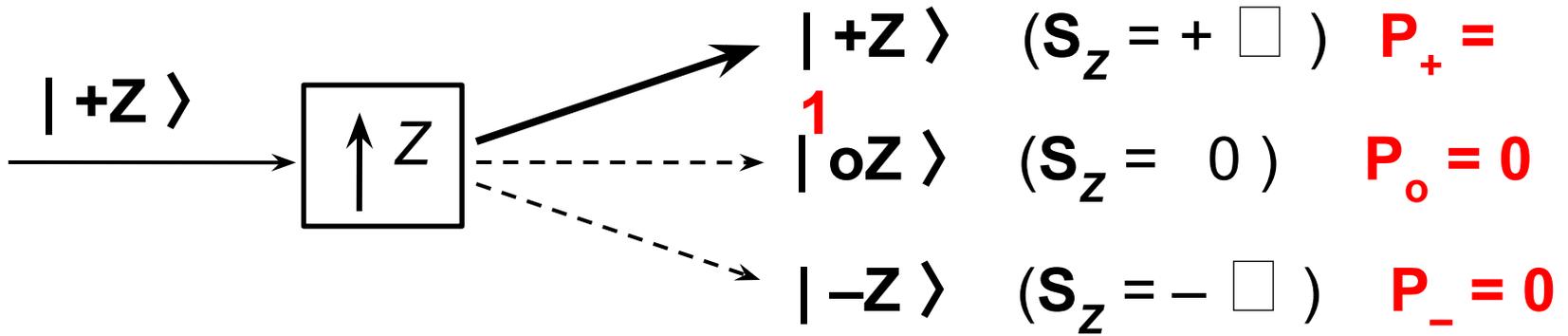


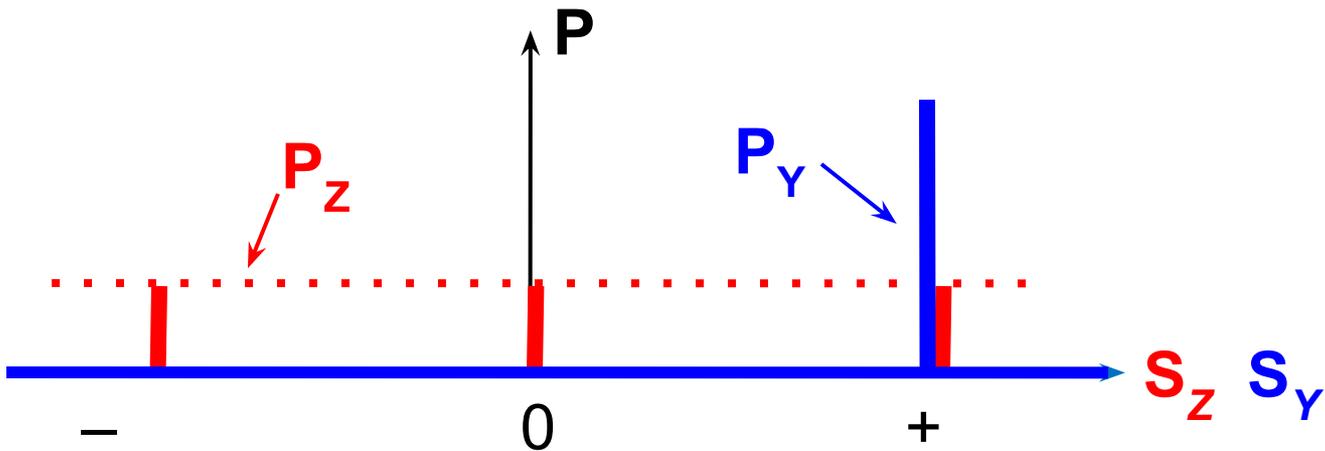
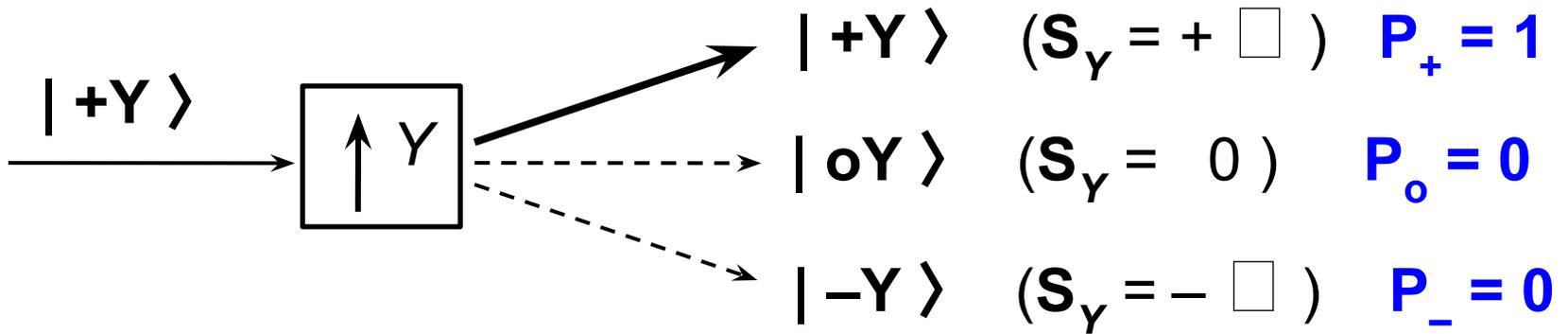
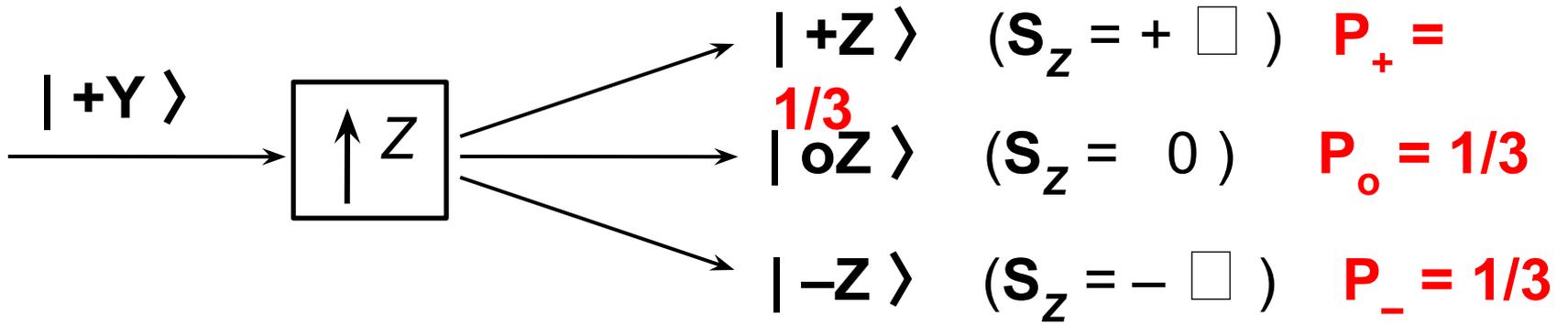


$$|\Phi\rangle = |+Y\rangle \cdot Y_+ + |oY\rangle \cdot Y_0 + |-Y\rangle \cdot Y_- = (Y_+, Y_0, Y_-)$$

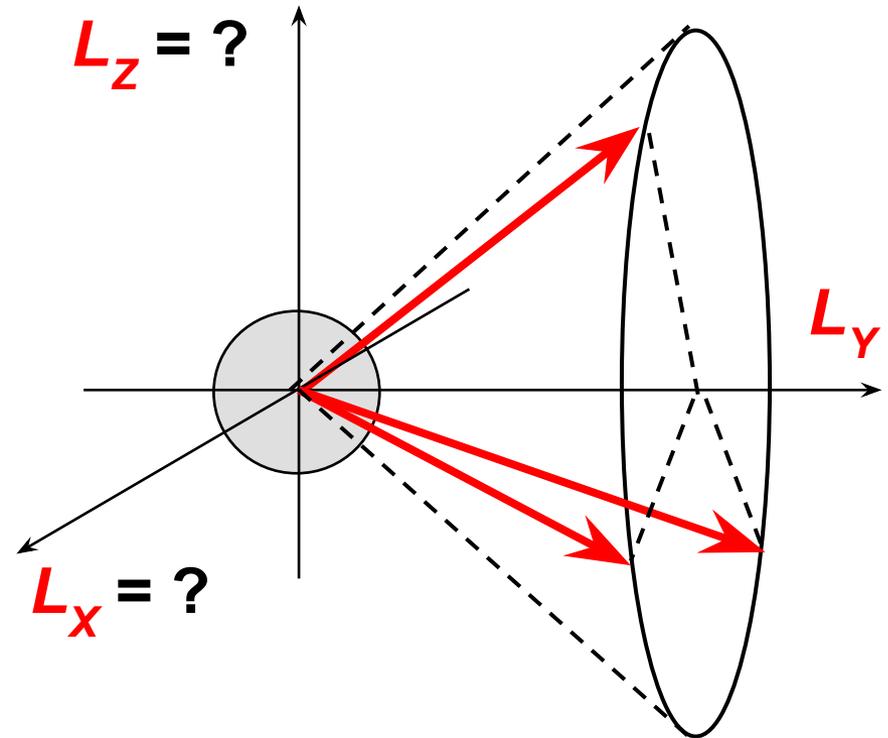
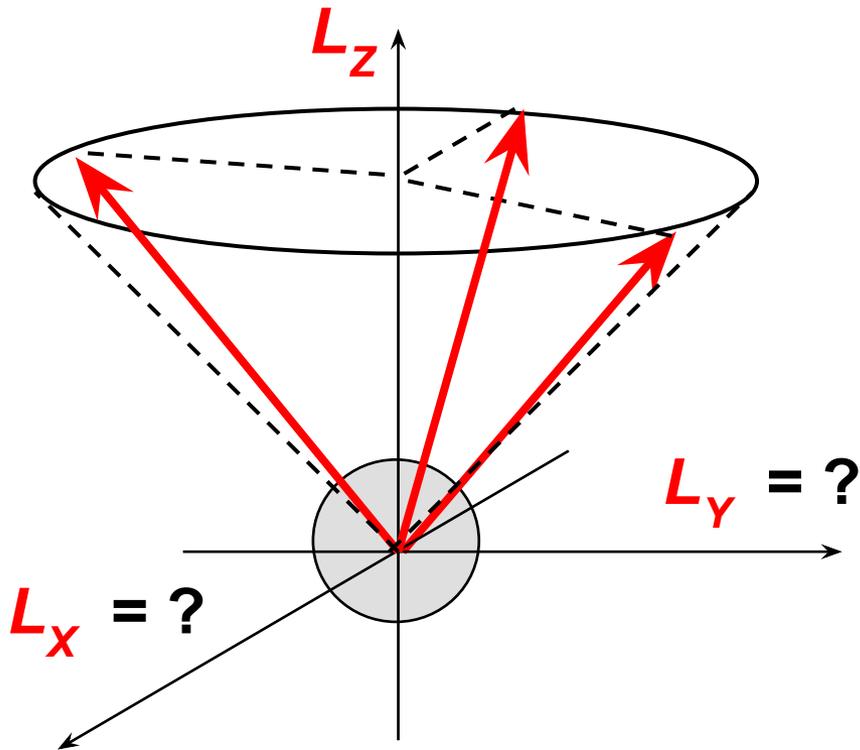
$$|Y_+|^2 = P_+; \quad |Y_0|^2 = P_0; \quad |Y_-|^2 = P_-$$





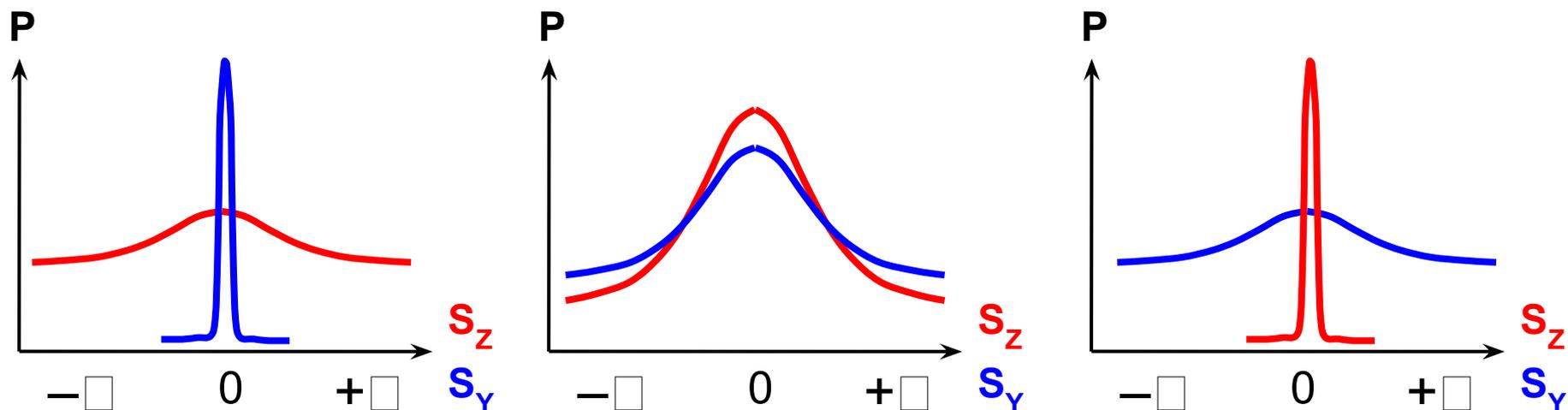


# Вектор момента (спина) и процедура измерения

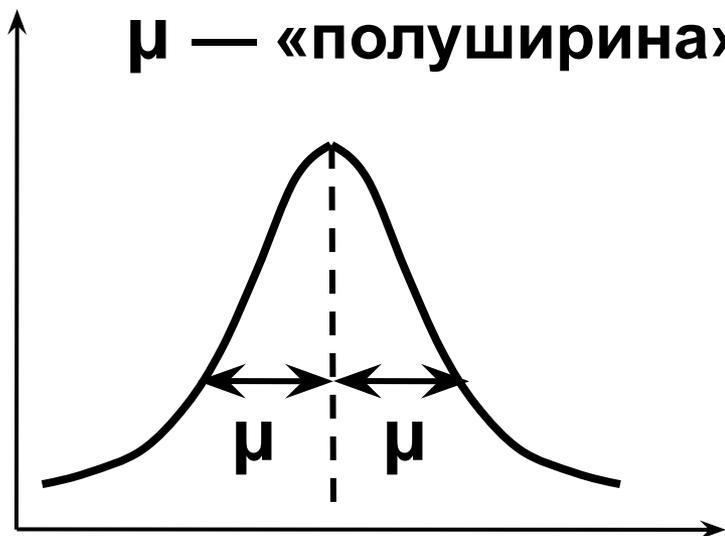


Определение ориентации вектора момента (спина) требует наложения внешнего магнитного поля (**прибор ШГ**), что приводит к вращению вектора  $\mathbf{L}$  (или  $\mathbf{S}$ ) вокруг той оси, вдоль которой ориентирован градиент напряженности внешнего поля. В итоге одна из проекций оказывается фиксированной, а все остальные — неопределенными.

# Взаимосвязь функций распределения



$\mu$  — «полуширина» ФР



$$\mu_z \cdot \mu_y \geq \text{const}$$

СООТНОШЕНИЯ НЕОПРЕДЕЛЕННОСТЕЙ

(В. Гейзенберг)

# «ПРИНЦИП НЕОПРЕДЕЛЕННОСТИ» ГЕЙЗЕНБЕРГА

Существуют связанные пары наблюдаемых  $[A, B]$ ,  
которым невозможно одновременно приписать  
точные числовые значения

$$\cancel{A = A_i} \quad \cancel{B = B_j}$$

так как уменьшение неопределенности для одной из  
таких наблюдаемых ( $\mu_A$ ) вызывает увеличение  
неопределенности в значении другой ( $\mu_B$ ).

---

Какие именно пары наблюдаемых связаны между собой  
«принципом неопределенности», а какие — нет?

$$C_{AB} = [A, B] = A \cdot B - B \cdot A \quad \left\{ \begin{array}{l} \neq 0 \text{ (связаны)} \\ = 0 \text{ (не связаны)} \end{array} \right.$$

**Причина:** не коммутирующие операторы не имеют совпадающих собственных векторов, т.е. состояние, собственное для прибора  $A$ , обязательно будет несобственным для другого прибора  $B$ .

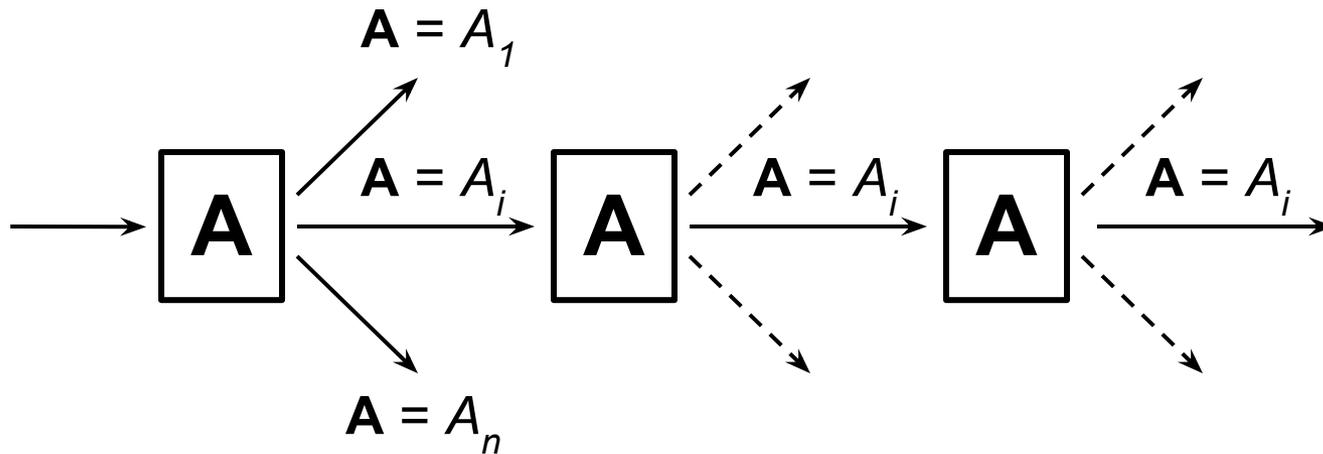
**Следствие:**

анализ собственного состояния прибора  $A$

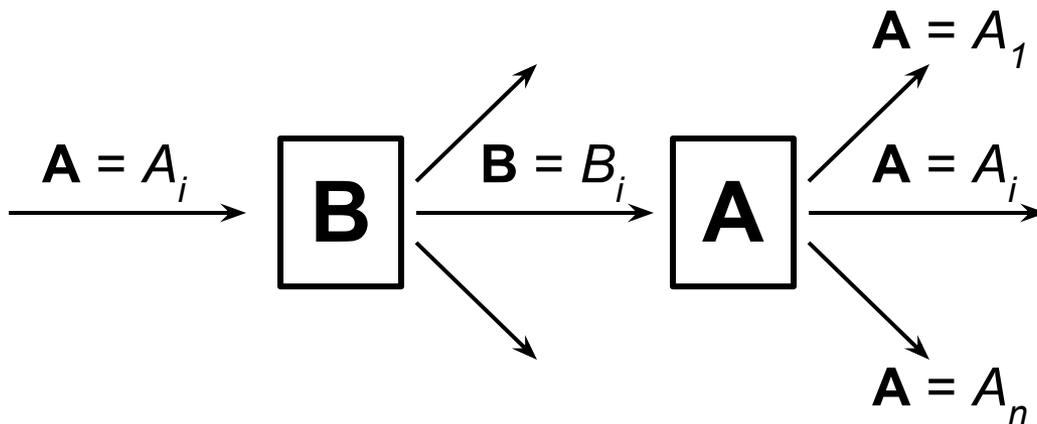
( т.е. когда наблюдаемая  $\mathbf{A} = A_i$  )

с помощью другого прибора  $B$  обязательно приведет к результату в виде не конкретного числа  $B_i$ , а функции распределения

$$\mathbf{B} = \left\{ \begin{array}{l} B_1, B_2, \dots, B_n \\ P_1, P_2, \dots, P_n \end{array} \right\}$$



Повторные измерения наблюдаемой **A** не изменяют ее величину



Измерение наблюдаемой **B** изменяет ранее измеренную и точно известную величину наблюдаемой **A**

Аналогично, измерение наблюдаемой **A** изменяет измеренную и точно известную величину наблюдаемой **B**

**Правило:** в квантовой механике все наблюдаемые можно разбить на пары:

**СОВМЕСТНО-ИЗМЕРИМЫЕ** наблюдаемые, для которых функции распределения не связаны между собой соотношениями неопределенности и для которых операторы коммутируют

**СОВМЕСТНО-НЕИЗМЕРИМЫЕ** наблюдаемые, для которых функции распределения связаны между собой соотношениями неопределенности и для которых операторы не коммутируют

Примеры совместно измеримых наблюдаемых:  
энергия и модуль вектора спина

$$[E, |S|] = 0$$

модуль вектора спина и одна из его проекций:

$$[|S|, S_x] = [ |S|, S_y ] = [ |S|, S_z ] = 0$$

Примеры совместно-неизмеримых наблюдаемых:

проекции вектора спина,

$$[S_x, S_y] \neq 0 \quad [S_x, S_z] \neq 0 \quad [S_y, S_z] \neq 0$$

импульс и координата,

$$[x, p_x] \neq 0 \quad [y, p_y] \neq 0 \quad [z, p_z] \neq 0$$

энергия и время

$$[E, t] \neq 0$$