МАТРИЦЫ

и

ОПЕРАТОРЫ

МАТРИЦЫ

$$A_{n\times n} = (a_{ij}) = \begin{pmatrix} a_{11} & a_{12} & a_{13} & \dots & a_{1n} \\ a_{21} & a_{22} & a_{23} & \dots & a_{2n} \\ a_{31} & a_{32} & a_{33} & \dots & a_{3n} \\ \dots & \dots & \dots & \dots & \dots \\ a_{n1} & a_{n2} & a_{n3} & \dots & a_{nn} \end{pmatrix}$$

столбцы

$$A_{n\times n} = (a_{ij}) = \begin{pmatrix} a_{11} & a_{12} & a_{13} & \dots & a_{1n} \\ a_{21} & a_{22} & a_{23} & \dots & a_{2n} \\ a_{31} & a_{32} & a_{33} & \dots & a_{3n} \\ \dots & \dots & \dots & \dots & \dots \\ a_{n1} & a_{n2} & a_{n3} & \dots & a_{nn} \end{pmatrix}$$

строки

$$\mathbf{A}_{n\times n} = (a_{ij}) = \begin{pmatrix} a_{11} & a_{12} & a_{13} & \dots & a_{1n} \\ a_{21} & a_{22} & a_{23} & \dots & a_{2n} \\ a_{31} & a_{32} & a_{33} & \dots & a_{3n} \\ \dots & \dots & \dots & \dots & \dots \\ a_{n1} & a_{n2} & a_{n3} & \dots & a_{nn} \end{pmatrix}$$

блоки

$$\mathbf{A}_{n\times n} = (a_{ij}) = \begin{pmatrix} \boldsymbol{a_{11}} & a_{12} & a_{13} & \dots & a_{1n} \\ a_{21} & \boldsymbol{a_{22}} & a_{23} & \dots & a_{2n} \\ a_{31} & a_{32} & \boldsymbol{a_{33}} & \dots & a_{3n} \\ \dots & \dots & \dots & \dots & \dots \\ a_{n1} & a_{n2} & a_{n3} & \dots & \boldsymbol{a_{nn}} \end{pmatrix}$$

диагональ

Характеристики матриц

1. След

$$Sp = a_{11} + a_{22} + \ldots + a_{nn} = \sum a_{ii}$$

2. Определитель (детерминант)

Метод разложения по элементам строки (столбца)

1) **выбрать в матрице некоторую строку** (обычно выбирается та строка, которая содержит наибольшее количество нулей);

2) **записать первый элемент выбранной строки и умножить его на вспомогательную матрицу (*минор*), которая получается из исходной посредством вычеркивания строки и столбца, на пересечении которых стоит выписанный элемент;**

$$\mathbf{A}_{n\times n} = (a_{ij}) = \begin{pmatrix} a_{11} & a_{12} & a_{13} & \dots & a_{1n} \\ a_{21} & a_{22} & a_{23} & \dots & a_{2n} \\ a_{31} & a_{32} & a_{33} & \dots & a_{3n} \\ \dots & \dots & \dots & \dots & \dots \\ a_{n1} & a_{n2} & a_{n3} & \dots & a_{nn} \end{pmatrix}$$

$$\mathbf{Det\ A} = \begin{vmatrix} a_{11} & a_{12} & a_{13} & \dots & a_{1n} \\ a_{21} & a_{22} & a_{23} & \dots & a_{2n} \\ a_{31} & a_{32} & a_{33} & \dots & a_{3n} \\ \dots & \dots & \dots & \dots & \dots \\ a_{n1} & a_{n2} & a_{n3} & \dots & a_{nn} \end{vmatrix} = a_{11} \begin{vmatrix} a_{22} & a_{23} & \dots & a_{2n} \\ a_{32} & a_{33} & \dots & a_{3n} \\ \dots & \dots & \dots & \dots \\ a_{n2} & a_{n3} & \dots & a_{nn} \end{vmatrix} + \dots$$

3) **выполнить описанный выше прием для всех элементов выделенной строки;**

$$+\ a_{12}\begin{vmatrix} a_{21} & a_{23} & \dots & a_{2n} \\ a_{31} & a_{33} & \dots & a_{3n} \\ \dots & \dots & \dots & \dots \\ a_{n1} & a_{n3} & \dots & a_{nn} \end{vmatrix} + \dots +\ a_{1n}\begin{vmatrix} a_{21} & a_{22} & \dots & a_{2n-1} \\ a_{31} & a_{32} & \dots & a_{3n-1} \\ \dots & \dots & \dots & \dots \\ a_{n1} & a_{n2} & \dots & a_{nn-1} \end{vmatrix}$$

4) каждое произведение дополнительно умножить на $(-1)^{i+j}$, где i и j — индексы элемента выделенной строки.

В итоге большой определитель представляется в виде линейной комбинации определителей, размерность которых на 1 меньше, чем у исходного.

5) **применить описанную процедуру ко всем определителям с размерностью (*n* – 1), в результате чего каждый из них превратится в линейную комбинацию определителей размерностью (*n* – 2).**

Систематически повторяя процедуру, мы, в конце концов, придем к длинной линейной комбинации определителей с размерностью 1, т.е. обычных чисел.

Для завершения процедуры нужно выполнить все перемножения, сложения и вычитания,что даст в итоге единственное число — определитель матрицы А.

Пример

$$A = \begin{bmatrix} 2 & 4 & 8 \\ 3 & 5 & 7 \\ 4 & 1 & 5 \end{bmatrix} \qquad \operatorname{Det} A = -48$$

$$\operatorname{Det} A = (-1)^2 \cdot 2 \cdot \begin{bmatrix} 5 & 7 \\ 1 & 5 \end{bmatrix} + (-1)^3 \cdot 4 \cdot \begin{bmatrix} 3 & 7 \\ 4 & 5 \end{bmatrix} + (-1)^4 \cdot 8 \cdot \begin{bmatrix} 3 & 5 \\ 4 & 1 \end{bmatrix}$$

$$= 2 \cdot (5 \cdot 5 - 7 \cdot 1) - 4 \cdot (3 \cdot 5 - 7 \cdot 4) + 8 \cdot (3 \cdot 1 - 5 \cdot 4)$$

$$= 2 \cdot (25 - 7) - 4 \cdot (15 - 28) + 8 \cdot (3 - 20) =$$

$$= 2 \cdot (18) - 4 \cdot (-13) + 8 \cdot (-17) = 36 + 52 - 136 = -48$$

---

3. Перманент (плюс-определитель)

Метод вычисления тот же самый, что и для определителя, но вместо дополнительного множителя $(-1)^{i+j}$ используется множитель $(+1)^{i+j}$

Пример

$$A = \begin{bmatrix} 2 & 4 & 8 \\ 3 & 5 & 7 \\ 4 & 1 & 5 \end{bmatrix} \qquad \mathrm{Per}\, A = 420$$

$$\mathrm{Per}\, A = (+1)^2 \cdot 2 \cdot \begin{bmatrix} 5 & 7 \\ 1 & 5 \end{bmatrix} + (+1)^3 \cdot 4 \cdot \begin{bmatrix} 3 & 7 \\ 4 & 5 \end{bmatrix} + (+1)^4 \cdot 8 \cdot \begin{bmatrix} 3 & 5 \\ 4 & 1 \end{bmatrix}$$

$$= 2 \cdot (5 \cdot 5 + 7 \cdot 1) + 4 \cdot (3 \cdot 5 + 7 \cdot 4) + 8 \cdot (3 \cdot 1 + 5 \cdot 4)$$

$$= 2 \cdot (25 + 7) + 4 \cdot (15 + 28) + 8 \cdot (3 + 20) =$$

$$= 2 \cdot (32) + 4 \cdot (43) + 8 \cdot (23) = 64 + 172 + 184 = 420$$

Алгебраическое дополнение A_{ij} = минор $(a_{ij}) \cdot (-1)^{i+j}$

$$\mathbf{Det\, A} = a_{i1} \cdot A_{i1} + a_{i2} \cdot A_{i2} + \ldots + a_{in} \cdot A_{in}$$

Операции над матрицами

1. Сложение матриц

$$\mathbf{A} + \mathbf{B} = \mathbf{C} \qquad A_{ij} + B_{ij} = C_{ij}$$

2. Умножение матрицы на число

$$\boldsymbol{\alpha} \cdot \mathbf{A} = \mathbf{D} \qquad \boldsymbol{\alpha} \cdot A_{ij} = D_{ij}$$

3. Линейные комбинации

$$\boldsymbol{\alpha} \cdot \mathbf{A} + \boldsymbol{\beta} \cdot \mathbf{B} + \boldsymbol{\gamma} \cdot \mathbf{C} + \ldots = \mathbf{F}$$

$$\alpha \cdot A_{ij} + \beta \cdot B_{ij} + \gamma \cdot C_{ij} + \ldots = F_{ij}$$

4. Скалярное умножение матриц

$$A \bullet B = C$$

$$\begin{pmatrix} \cdot & \cdot & \cdot & \cdot & \cdot & \cdot \\ A_{i1} & A_{i2} & & \cdot & \cdot & A_{in} \\ \cdot & \cdot & \cdot & \cdot & \cdot & \cdot \\ \cdot & \cdot & \cdot & \cdot & \cdot & \cdot \\ \cdot & \cdot & \cdot & \cdot & \cdot & \cdot \end{pmatrix} \bullet \begin{pmatrix} \cdot & \cdot & \cdot & B_{1j} & \cdot \\ \cdot & \cdot & \cdot & B_{2j} & \cdot \\ \cdot & \cdot & \cdot & \cdot & \cdot \\ \cdot & \cdot & \cdot & \cdot & \cdot \\ \cdot & \cdot & \cdot & B_{nj} & \cdot \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \cdot & \cdot & \cdot & \cdot & \cdot \\ \cdot & \cdot & \cdot & C_{ij} & \cdot \\ \cdot & \cdot & \cdot & \cdot & \cdot \\ \cdot & \cdot & \cdot & \cdot & \cdot \\ \cdot & \cdot & \cdot & \cdot & \cdot \end{pmatrix}$$

$$C_{ij} = A_{i1} \cdot B_{1i} + A_{i2} \cdot B_{2i} + \ldots + A_{in} \cdot B_{ni} = \sum_{j=1}^{n} (A_{ij} \cdot B_{ji})$$

$$A \bullet B = B \bullet A \qquad\qquad A \bullet B \neq B \bullet A$$

Коммутирующие матрицы — **Некоммутирующие матрицы**

Примеры

$$\begin{bmatrix} 1 & 2 \\ 3 & 4 \end{bmatrix} + \begin{bmatrix} 5 & 6 \\ 7 & 8 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 6 & 8 \\ 10 & 12 \end{bmatrix}$$

$$5 \cdot \begin{bmatrix} 1 & 2 \\ 3 & 4 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 5 & 10 \\ 15 & 20 \end{bmatrix}$$

$$\begin{bmatrix} 1 & 2 \\ 3 & 4 \end{bmatrix} \cdot \begin{bmatrix} 5 & 6 \\ 7 & 8 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 19 & 22 \\ 43 & 50 \end{bmatrix}$$

$$\begin{bmatrix} 5 & 6 \\ 7 & 8 \end{bmatrix} \cdot \begin{bmatrix} 1 & 2 \\ 3 & 4 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 23 & 34 \\ 31 & 46 \end{bmatrix}$$

Матрицы не коммутируют

Типология матриц

Единичная матрица, E

$$\mathbf{A} \bullet \mathbf{E} = \mathbf{E} \bullet \mathbf{A} = \mathbf{A}$$

$$\begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 & \dots \\ 0 & 1 & 0 & \dots \\ 0 & 0 & 1 & \dots \\ \dots & \dots & \dots & \dots \end{bmatrix}$$

Взаимно обратные матрицы

$$\mathbf{B} \bullet \mathbf{B}^{-1} = \mathbf{B}^{-1} \bullet \mathbf{B} = \mathbf{E}$$

Алгебраическое дополнение элемента B_{ji}

Элемент обратной матрицы $\longrightarrow$ $(B_{ij})^{-1} = \dfrac{A_{ji}}{\mathrm{Det}\ \mathbf{B}}$

Если матрица B «особенная» (Det B = 0), то обратной ей матрицы не существует

Алгебраическое дополнение A_{ij} = минор $(a_{ij}) \cdot (-1)^{i+j}$

Пример

$$\mathbf{B} = \begin{bmatrix} 1 & 2 \\ 3 & 4 \end{bmatrix}$$

$$Det\,\mathbf{B} = -2$$

$$A_{11} = +4 \qquad (B_{11})^{-1} = +4/-2 = -2$$

$$A_{12} = -3 \qquad (B_{12})^{-1} = -2/-2 = +1$$

$$A_{21} = -2 \qquad (B_{21})^{-1} = -3/-2 = +1{,}5$$

$$A_{22} = +1 \qquad (B_{22})^{-1} = +1/-2 = -0{,}5$$

$$\mathbf{B}^{-1} = \frac{1}{\Delta}\begin{bmatrix} A_{11} & A_{21} \\ A_{12} & A_{22} \end{bmatrix} = \frac{1}{-2}\begin{bmatrix} 4 & -2 \\ -3 & 1 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} -2 & 1 \\ 1{,}5 & -0{,}5 \end{bmatrix}$$

Проверка: $\mathbf{B} \bullet \mathbf{B}^{-1} = \mathbf{E}$

$$\begin{bmatrix} 1 & 2 \\ 3 & 4 \end{bmatrix} \bullet \begin{bmatrix} -2 & 1 \\ 1{,}5 & -0{,}5 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{bmatrix}$$

Взаимно транспонированные матрицы

$$\mathbf{B} = \begin{bmatrix} 1 & 2 \\ 3 & 4 \end{bmatrix} \qquad \mathbf{B}^{\mathrm{T}} = \begin{bmatrix} 1 & 3 \\ 2 & 4 \end{bmatrix}$$

Симметричные матрицы

$$\mathbf{B} = \mathbf{B}^{\mathrm{T}}$$

Ортогонгальные матрицы

$$\mathbf{B}^{-1} = \mathbf{B}^{\mathrm{T}}$$

$$\mathbf{B} = \begin{bmatrix} \cos\varphi & -\sin\varphi \\ \sin\varphi & \cos\varphi \end{bmatrix}$$

$$\mathbf{B}^{-1} = \begin{bmatrix} \cos\varphi & \sin\varphi \\ -\sin\varphi & \cos\varphi \end{bmatrix}$$

Комплексно сопряженные матрицы

$$B = \begin{bmatrix} 1 + i & 2 - i \\ 3 - 2i & 4 \end{bmatrix} \qquad B^* = \begin{bmatrix} 1 - i & 2 + i \\ 3 + 2i & 4 \end{bmatrix}$$

Эрмитово сопряженные матрицы

$$B = \begin{bmatrix} 1 + i & 2 - i \\ 3 - 2i & 4 \end{bmatrix} \qquad B^+ = \begin{bmatrix} 1 - i & 3 + 2i \\ 2 + i & 4 \end{bmatrix}$$

Самосопряженные (эрмитовы) матрицы

$$B = B^+$$

Аналоги симметричных матриц

Унитарные матрицы

$$B^{-1} = B^+$$

Аналоги ортогональных матриц

Линейные операторы

$$\begin{pmatrix} F_{11} & F_{12} & \cdots & F_{1n} \\ F_{21} & F_{22} & \cdots & F_{2n} \\ \cdot & \cdot & \cdots & \cdot \\ F_{n1} & F_{n2} & \cdots & F_{nn} \end{pmatrix} \bullet \begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \\ \cdot \\ x_n \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} y_1 \\ y_2 \\ \cdot \\ y_n \end{pmatrix}$$

$$\boldsymbol{F}\,(\mathrm{X}) = \mathrm{Y}$$

ОПЕРАТОР, трансформирующий исходный вектор X в конечный вектор Y

ВЕКТОРЫ, принадлежащие к одному ВП

$$\boldsymbol{F}(\alpha \cdot \mathrm{X}) = \alpha \cdot \boldsymbol{F}(\mathrm{X})$$

$$\boldsymbol{F}(\mathrm{X} + \mathrm{Y}) = \boldsymbol{F}(\mathrm{X}) + \boldsymbol{F}(\mathrm{Y})$$

Условия линейности

Преобразование векторов-строк

$$\begin{pmatrix} x_1 & x_2 & \dots & x_n \end{pmatrix} \cdot \left(\begin{array}{c|c|c|c} F_{11} & F_{12} & \dots & F_{1n} \\ F_{21} & F_{22} & \dots & F_{2n} \\ \cdot & \cdot & \cdots & \cdot \\ F_{n1} & F_{n2} & \dots & F_{nn} \end{array}\right) = \begin{pmatrix} y_1 & y_2 & \dots & y_n \end{pmatrix}$$

$$\boldsymbol{F}(\overline{\mathbf{X}}) = \overline{\mathbf{Y}}$$ **«столбец → столбец»**

$$(\underline{\mathbf{X}})\boldsymbol{F} = \underline{\mathbf{Y}}$$ **«строка → строка»**

1. Любая квадратная матрица может выступать в роли оператора
2. Любой оператор может быть изображен в виде квадратной матрицы

Единичный оператор

$$\begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{bmatrix} \bullet \begin{bmatrix} x \\ y \\ z \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} x \\ y \\ z \end{bmatrix}$$

Оператор растяжения

$$\begin{bmatrix} 2 & 0 & 0 \\ 0 & 2 & 0 \\ 0 & 0 & 2 \end{bmatrix} \bullet \begin{bmatrix} x \\ y \\ z \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 2x \\ 2y \\ 2z \end{bmatrix}$$

Оператор проектирования на ось Z

$$\begin{bmatrix} 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{bmatrix} \bullet \begin{bmatrix} x \\ y \\ z \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 0 \\ 0 \\ z \end{bmatrix}$$

Матричные представления операций симметрии

Единичная операция E

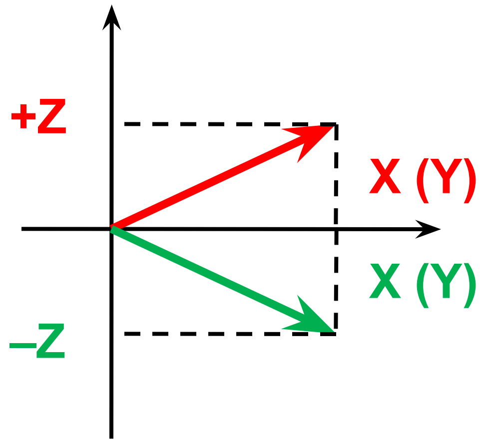
$$\begin{bmatrix} x \\ y \\ z \end{bmatrix} \xrightarrow{\mathbf{E}} \begin{bmatrix} x \\ y \\ z \end{bmatrix} \qquad \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{bmatrix} \bullet \begin{bmatrix} x \\ y \\ z \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} x \\ y \\ z \end{bmatrix}$$

Инверсия E

$$\begin{bmatrix} x \\ y \\ z \end{bmatrix} \xrightarrow{\mathbf{i}} \begin{bmatrix} -x \\ -y \\ -z \end{bmatrix} \qquad \begin{bmatrix} -1 & 0 & 0 \\ 0 & -1 & 0 \\ 0 & 0 & -1 \end{bmatrix} \bullet \begin{bmatrix} x \\ y \\ z \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} -x \\ -y \\ -z \end{bmatrix}$$

Операции отражения

$$\sigma^{XY} \begin{bmatrix} x \\ y \\ z \end{bmatrix} \longrightarrow \begin{bmatrix} x \\ y \\ -z \end{bmatrix}$$



$$\begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & -1 \end{bmatrix} \bullet \begin{bmatrix} x \\ y \\ z \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} x \\ y \\ -z \end{bmatrix}$$

$$\sigma^{XZ}$$

$$\begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & -1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{bmatrix} \bullet \begin{bmatrix} x \\ y \\ z \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} x \\ -y \\ z \end{bmatrix}$$

$$\sigma^{YZ}$$

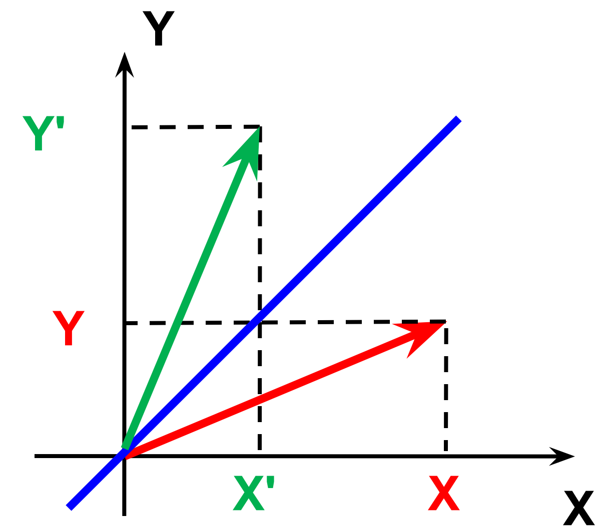
$$\begin{bmatrix} -1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{bmatrix} \bullet \begin{bmatrix} x \\ y \\ z \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} -x \\ y \\ z \end{bmatrix}$$

Операции отражения

$\sigma^{X+Y,\,Z}$

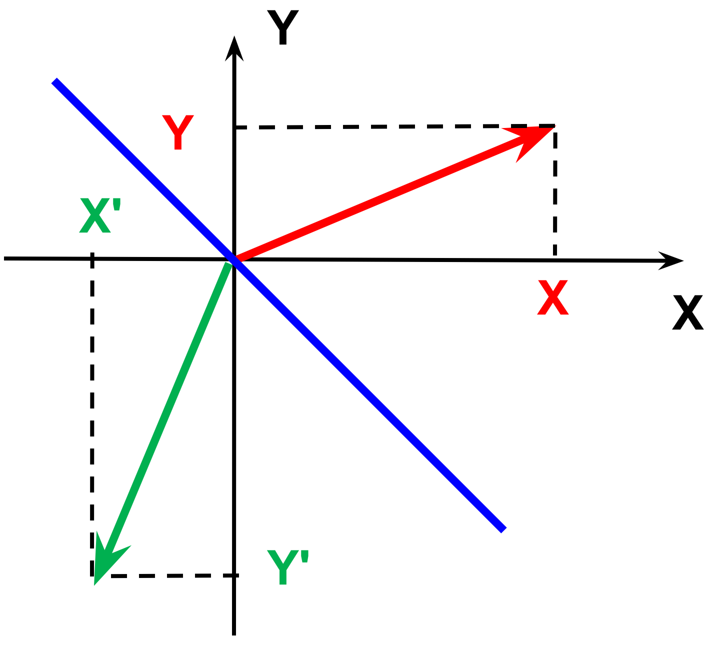
$$\begin{bmatrix} x \\ y \\ z \end{bmatrix} \longrightarrow \begin{bmatrix} y \\ x \\ z \end{bmatrix}$$

$$\begin{bmatrix} 0 & 1 & 0 \\ 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{bmatrix} \bullet \begin{bmatrix} x \\ y \\ z \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} y \\ x \\ z \end{bmatrix}$$



$\sigma^{X-Y,\,Z}$

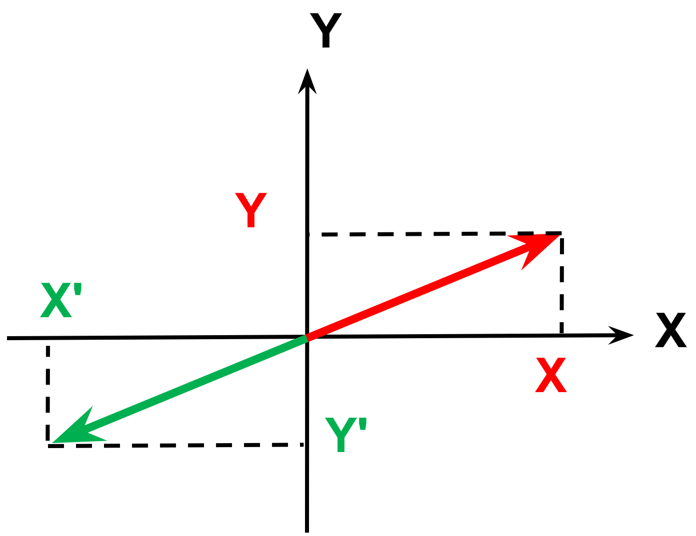
$$\begin{bmatrix} 0 & -1 & 0 \\ -1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{bmatrix} \bullet \begin{bmatrix} x \\ y \\ z \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} -y \\ -x \\ z \end{bmatrix}$$



Повороты

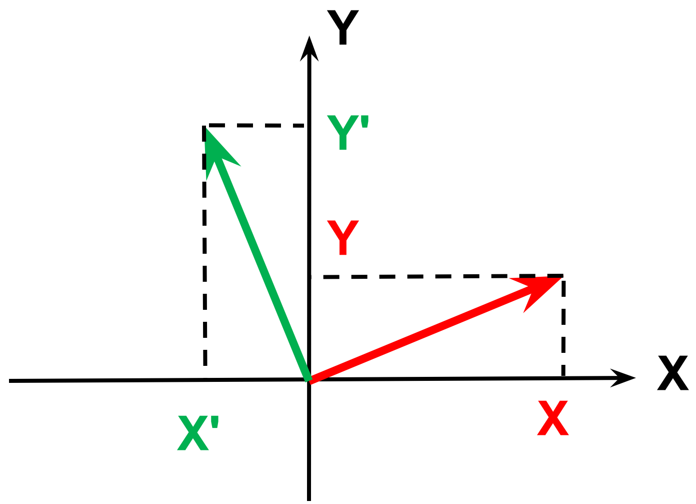
C_2^Z

$$\begin{bmatrix} -1 & 0 & 0 \\ 0 & -1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{bmatrix} \bullet \begin{bmatrix} x \\ y \\ z \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} -y \\ -x \\ z \end{bmatrix}$$



C_4^Z

$$\begin{bmatrix} 0 & -1 & 0 \\ 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{bmatrix} \bullet \begin{bmatrix} x \\ y \\ z \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} -y \\ x \\ z \end{bmatrix}$$



$$C_\varphi^Z = \begin{bmatrix} \cos\varphi & -\sin\varphi & 0 \\ \sin\varphi & \cos\varphi & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{bmatrix}$$

Поворот на произвольный угол φ

Группа C_{2v}

$E \qquad C_2^Z \qquad \sigma^{XZ} \qquad \sigma^{YZ}$

$$\begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{bmatrix} \quad \begin{bmatrix} -1 & 0 & 0 \\ 0 & -1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{bmatrix} \quad \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & -1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{bmatrix} \quad \begin{bmatrix} -1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{bmatrix}$$

Матричное представление группы C_{2v}

$$\sigma^{XZ} \cdot \sigma^{YZ} = C_2^Z$$

$$\begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & -1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{bmatrix} \cdot \begin{bmatrix} -1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} -1 & 0 & 0 \\ 0 & -1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{bmatrix}$$

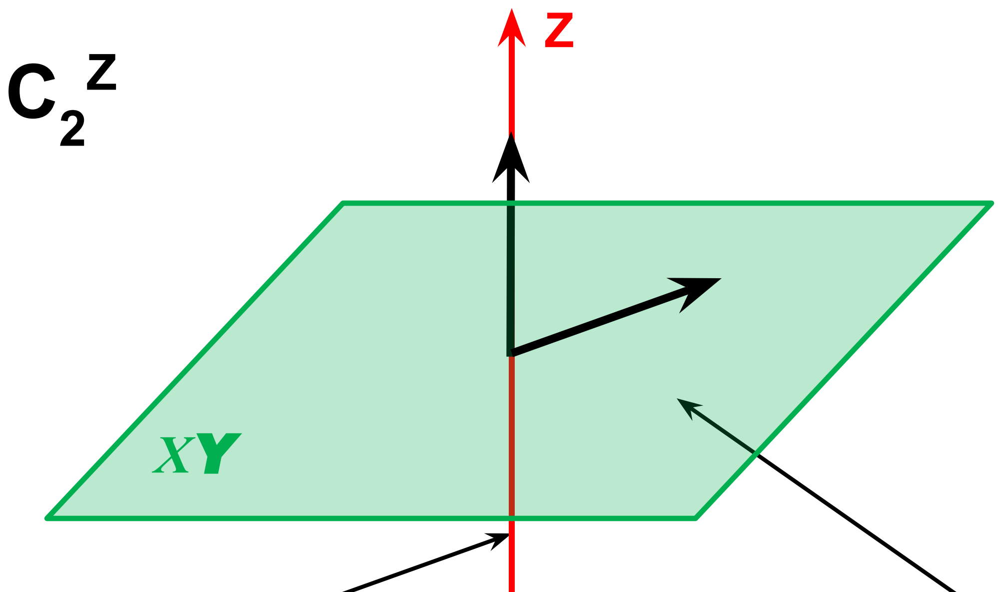
Домашнее задание

Задача 3.1. Установить, коммутируют ли между собой заданные операции симметрии, найти коммутатор.

1) найти матричные представления операций F_1 и F_2;
2) найти произведения: $F_1 \bullet F_2$ и $F_2 \bullet F_1$;
3) найти коммутатор: $C = F_1 \bullet F_2 - F_2 \bullet F_1$

Инвариантные подпространства

Векторы инвариантных подпространств преобразуются оператором только друг в друга, оставаясь внутри подпространства.



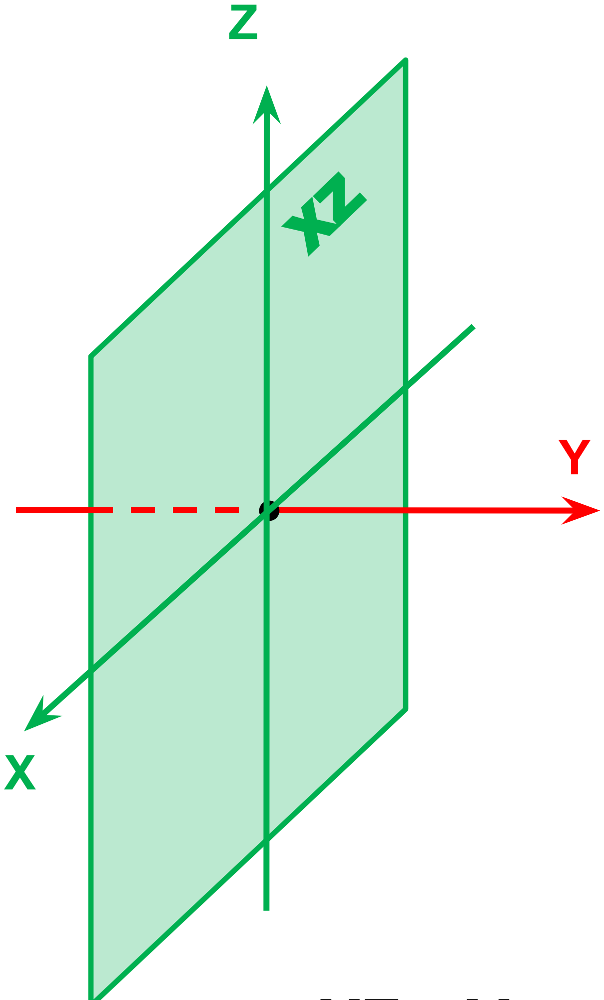
$XY \oplus Z$

Трехмерное пространство XYZ — прямая сумма двумерного подпространства XY и одномерного подпространства Z

1-мерное инвариантное подпространство
(любой вектор, лежащий на оси Z, при действии оператора останется лежащим на этой оси)

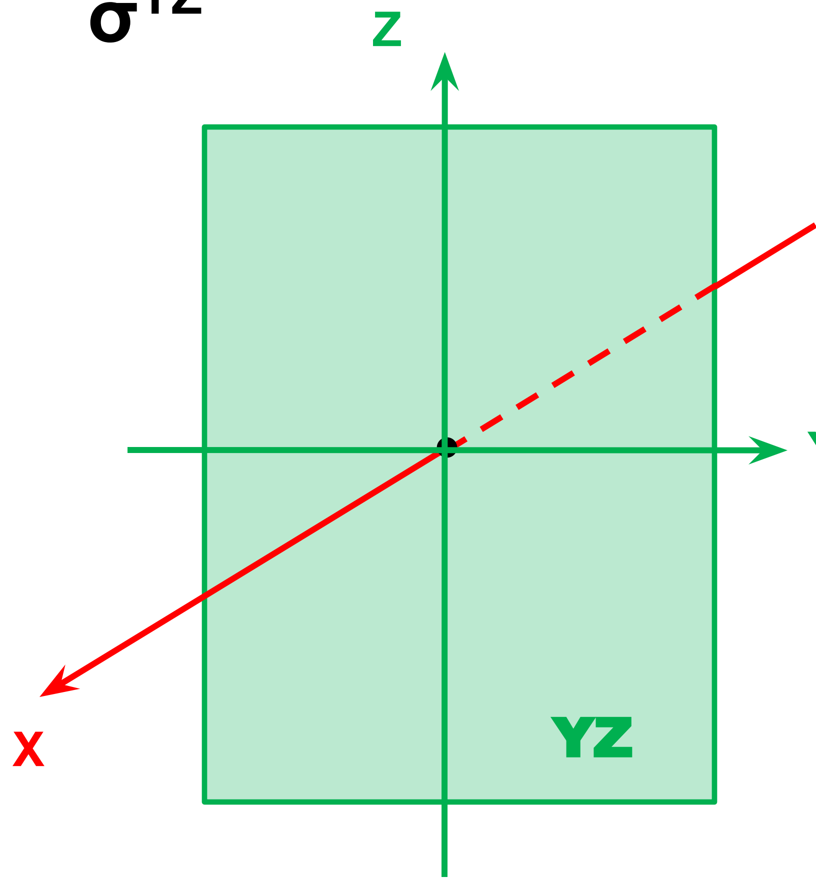
2-мерное инвариантное подпространство
(любой вектор, лежащий в плоскости XY, при действии оператора останется лежащим в этой плоскости)

σ^{XZ}



$XZ \oplus Y$

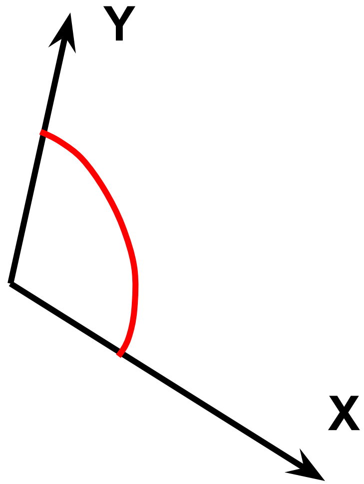
σ^{YZ}



$X \oplus YZ$

Спектральные свойства операторов

$$F\,(X) = Y$$



Уравнение на собственные значения

Собственное значение

$$F\,(A) = \alpha \cdot A$$

Собственный вектор (инвариантное подпространство)

Спектр оператора $\left\{ \begin{matrix} \alpha_1 & \alpha_2 & \alpha_3 & \ldots & \alpha_n \\ A_1 & A_2 & A_3 & \ldots & A_n \end{matrix} \right\}$

n — размерность пространства

$$F(A) = \alpha \cdot A$$

$$\begin{pmatrix} F_{11} & F_{12} & \dots & F_{1n} \\ F_{21} & F_{22} & \dots & F_{2n} \\ . & . & \dots & . \\ F_{n1} & F_{n2} & \dots & F_{nn} \end{pmatrix} \bullet \begin{pmatrix} a_1 \\ a_2 \\ . \\ a_n \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \alpha \cdot a_1 \\ \alpha \cdot a_2 \\ . \quad . \\ \alpha \cdot a_n \end{pmatrix}$$

$$\begin{cases} F_{11} \cdot a_1 + F_{12} \cdot a_2 + \dots + F_{1n} \cdot a_n = \alpha \cdot a_1 \\ F_{21} \cdot a_1 + F_{22} \cdot a_2 + \dots + F_{2n} \cdot a_n = \alpha \cdot a_2 \\ . \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \\ F_{n1} \cdot a_1 + F_{n2} \cdot a_2 + \dots + F_{nn} \cdot a_n = \alpha \cdot a_n \end{cases}$$

$$
\begin{cases}
(F_{11} - \boldsymbol{\alpha}) \cdot a_1 + F_{12} \cdot a_2 + \; . \; . \; . + F_{1n} \cdot a_n = 0 \\
F_{21} \cdot a_1 + (F_{22} - \boldsymbol{\alpha}) \cdot a_2 + \; . \; . \; . + F_{2n} \cdot a_n = 0 \\
. \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \\
F_{n1} \cdot a_1 + F_{n2} \cdot a_2 + \; . \; . \; . + (F_{nn} - \boldsymbol{\alpha}) \cdot a_n = 0
\end{cases}
$$

Однородная система линейных уравнений

Условие разрешимости: Det = 0

$$
\begin{vmatrix}
(F_{11} - \boldsymbol{\alpha}) & F_{12} & . \; . \; . & F_{1n} \\
F_{21} & (F_{22} - \boldsymbol{\alpha}) & . \; . \; . & F_{2n} \\
. \quad . \quad . & . \quad . \quad . & . \quad . & . \quad . \\
F_{n1} & F_{n2} & . \; . \; . & (F_{nn} - \boldsymbol{\alpha})
\end{vmatrix} = 0
$$

$$C_n \cdot \boldsymbol{\alpha}^n + C_{n-1} \cdot \boldsymbol{\alpha}^{n-1} + C_{n-2} \cdot \boldsymbol{\alpha}^{n-2} + \ldots + C_1 \cdot \boldsymbol{\alpha} + C_o = 0$$

Характеристическое уравнение

Основная теорема алгебры:

всякое уравнение степени *n* имеет *n* корней

Корни: $\{ \boldsymbol{\alpha}_1 \quad \boldsymbol{\alpha}_2 \quad \ldots \quad \boldsymbol{\alpha}_n \}$ — **собственные значения оператора *F***

$$\begin{cases} (F_{11} - \boldsymbol{\alpha}) \cdot a_1 + F_{12} \cdot a_2 + \ldots + F_{1n} \cdot a_n = 0 \\ F_{21} \cdot a_1 + (F_{22} - \boldsymbol{\alpha}) \cdot a_2 + \ldots + F_{2n} \cdot a_n = 0 \\ \ldots \\ F_{n1} \cdot a_1 + F_{n2} \cdot a_2 + \ldots + (F_{nn} - \boldsymbol{\alpha}) \cdot a_n = 0 \end{cases}$$

$$\alpha_1 \qquad \alpha_2 \qquad \ldots \qquad \alpha_n$$

$$\mathbf{a}_1 = \begin{pmatrix} a_1 \\ a_2 \\ \ldots \\ a_n \end{pmatrix}_1 \qquad \mathbf{a}_2 = \begin{pmatrix} a_1 \\ a_2 \\ \ldots \\ a_n \end{pmatrix}_2 \qquad \cdots \qquad \mathbf{a}_\mathrm{n} = \begin{pmatrix} a_1 \\ a_2 \\ \ldots \\ a_n \end{pmatrix}_n$$

Пример:

$$\begin{vmatrix} 3-\boldsymbol{\alpha} & 2 & 4 \\ 2 & 0-\boldsymbol{\alpha} & 2 \\ 4 & 2 & 3-\boldsymbol{\alpha} \end{vmatrix} = \mathbf{0}$$

$$\boldsymbol{A} = \begin{pmatrix} 3 & 2 & 4 \\ 2 & 0 & 2 \\ 4 & 2 & 3 \end{pmatrix}$$

$$\mathbf{Det} = (3-\boldsymbol{\alpha})\cdot(0-\boldsymbol{\alpha})\cdot(3-\boldsymbol{\alpha}) + 2\cdot 2\cdot 4 + 4\cdot 2\cdot 2 -$$

$$-4\cdot(0-\boldsymbol{\alpha})\cdot 4 - 2\cdot 2\cdot(3-\boldsymbol{\alpha}) - (3-\boldsymbol{\alpha})\cdot 2\cdot 2 =$$

$$= -9\boldsymbol{\alpha} + 6\boldsymbol{\alpha}^2 - \boldsymbol{\alpha}^3 + 16 + 16 + 16\boldsymbol{\alpha} - 12 + 4\boldsymbol{\alpha} - 12 + 4\boldsymbol{\alpha} =$$

$$= -\boldsymbol{\alpha}^3 + 6\boldsymbol{\alpha}^2 + 15\boldsymbol{\alpha} + 8 = 0$$

Корни: $\{\ \boldsymbol{\alpha}_1 = 8 \qquad \boldsymbol{\alpha}_2 = -1 \qquad \boldsymbol{\alpha}_3 = -1\ \}$

$$\begin{cases} (3-\boldsymbol{\alpha})\,x + 2\,y + 4\,z = 0 \\ 2\,x + (0-\boldsymbol{\alpha})\,y + 2\,z = 0 \\ 4\,x + 2\,y + (3-\boldsymbol{\alpha})\,z = 0 \end{cases}$$

$$\alpha_1 = 8 \qquad \begin{cases} -5x + 2y + 4z = 0 \\ 2x - 8y + 2z = 0 \\ 4x + 2y - 5z = 0 \end{cases}$$

Вычитая третье уравнение из первого, получим:

$\mathbf{-9x + 9z = 0}$ **или** $\mathbf{x = z}$

Подставим этот результат во второе уравнение и получим:

$\mathbf{4x - 8y = 0}$ **или** $\mathbf{y = x/2}$

Теперь мы можем выразить все три координаты вектора через одну, например, через x:

$\mathbf{x = x} \qquad \mathbf{y = x/2} \qquad \mathbf{z = x}$

Решение:

$$\mathbf{a}_1 = \begin{pmatrix} x \\ y \\ z \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} x \\ x/2 \\ x \end{pmatrix} = (x/2)\begin{pmatrix} 2 \\ 1 \\ 2 \end{pmatrix}$$

$\alpha = -1$

$$\begin{cases} 4x + 2y + 4z = 0 \\ 2x + 1y + 2z = 0 \\ 4x + 2y + 4z = 0 \end{cases}$$

Видно, что все три уравнения одинаковы и задают только одно соотношение между тремя неизвестными. Поэтому мы можем произвольно выбрать значения двух неизвестных, а третье уже выразить через эти два.

Уравнение $\mathbf{2x + 1y + 2z = 0}$ определяет некоторую плоскость (двумерное инвариантное подпространство) в трехмерном пространстве. Любой вектор, лежащий на этой плоскости является решением нашей системы и, следовательно, будет собственным для нашего оператора.

Экономный способ задать все эти векторы заключается в выборе базиса — двух ортогональных векторов на плоскости.

Первый базисный вектор можно выбрать произвольно. Положим, например, $\boldsymbol{x} = \mathbf{0}$ и $\boldsymbol{y} = \mathbf{1}$. Тогда из уравнения плоскости

$$\mathbf{2}\boldsymbol{x} + \mathbf{1}\boldsymbol{y} + \mathbf{2}\boldsymbol{z} = \mathbf{0}$$

следует, что $\boldsymbol{z} = \mathbf{-1/2}$.

Второй базисный вектор должен удовлетворять как уравнению плоскости ($\mathbf{2}\boldsymbol{x} + \mathbf{1}\boldsymbol{y} + \mathbf{2}\boldsymbol{z} = \mathbf{0}$), так и условию ортогональности:

$$(0,\ 1,\ -1/2)\begin{pmatrix} x \\ y \\ z \end{pmatrix} = \boldsymbol{y} - \mathbf{1/2}\ \boldsymbol{z} = \mathbf{0}$$

Решая совместно эти два уравнения, получим: $\boldsymbol{y} = \mathbf{-2/5}\ \boldsymbol{x}$ и $\boldsymbol{z} = \mathbf{-4/5}\ \boldsymbol{x}$.

$$\mathbf{a}_2 = \begin{pmatrix} 0 \\ 1 \\ -1/2 \end{pmatrix} \qquad \mathbf{a}_3 = \begin{pmatrix} 1 \\ -2/5 \\ -4/5 \end{pmatrix} \qquad \mathbf{a}_2 = \begin{pmatrix} 0 \\ 2 \\ -1 \end{pmatrix} \qquad \mathbf{a}_3 = \begin{pmatrix} 5 \\ -2 \\ -4 \end{pmatrix}$$

$$\alpha_1 = 8 \qquad\qquad \alpha_2 = \alpha_2 = -1$$

$$\mathbf{a}_1 = \begin{pmatrix} 2 \\ 1 \\ 2 \end{pmatrix} \qquad \mathbf{a}_2 = \begin{pmatrix} 0 \\ 2 \\ -1 \end{pmatrix} \qquad \mathbf{a}_3 = \begin{pmatrix} 5 \\ -2 \\ -4 \end{pmatrix}$$

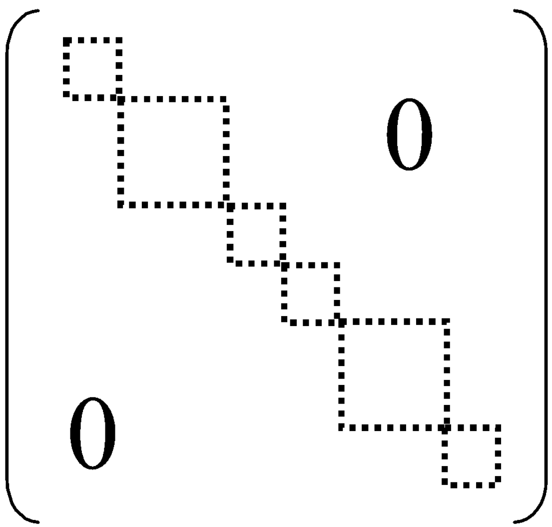
Проверка

$$\begin{pmatrix} 3 & 2 & 4 \\ 2 & 0 & 2 \\ 4 & 2 & 3 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 2 \\ 1 \\ 2 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 16 \\ 8 \\ 16 \end{pmatrix} = (+8) \cdot \begin{pmatrix} 2 \\ 1 \\ 2 \end{pmatrix}$$

$$\mathcal{A}\,(\mathbf{a}_1) = \alpha_1 \cdot \mathbf{a}_1$$

Собственные векторы любого оператора образуют БАЗИС в линейном пространстве — «собственный базис» оператора.

Матрица оператора в собственном базисе имеет квазидиагональный вид



$$\boldsymbol{A} = \begin{pmatrix} \alpha_1 & & & & & 0 \\ & \alpha_2 & & & & \\ & & \alpha_3 & & & \\ & & & \cdot & & \\ & 0 & & & \cdot & \\ & & & & & \alpha_n \end{pmatrix}$$

Все собственные значения невырожденны

Группа C_{2v}

E	C_2^Z	σ^{XZ}	σ^{YZ}
$\begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{bmatrix}$	$\begin{bmatrix} -1 & 0 & 0 \\ 0 & -1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{bmatrix}$	$\begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & -1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{bmatrix}$	$\begin{bmatrix} -1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{bmatrix}$

Собственные векторы

$$\mathbf{a}_1 = \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix} \qquad \mathbf{a}_2 = \begin{pmatrix} 0 \\ 1 \\ 0 \end{pmatrix} \qquad \mathbf{a}_3 = \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 1 \end{pmatrix}$$

Домашнее задание

Задача 3.2. Для заданной матрицы найти собственные значения и собственные векторы:

$$\alpha_1 = ? \qquad \alpha_2 = ? \qquad \alpha_2 = ?$$

$$\mathbf{a}_1 = \begin{pmatrix} ? \\ ? \\ ? \end{pmatrix} \qquad \mathbf{a}_2 = \begin{pmatrix} ? \\ ? \\ ? \end{pmatrix} \qquad \mathbf{a}_3 = \begin{pmatrix} ? \\ ? \\ ? \end{pmatrix}$$

(все собственные значения являются целыми числами)