Эллиптическая криптография.

Длина ключей, обеспечивающих одинаковый уровень криптостойкости

RSA/DSA	ECC	Отношение длин ключей RSA/ECC	AES
512	106	5:1	-
768	132	6:1	-
1024	160	7:1	-
2048	210	10:1	-
3072	256	12:1	**128**
7680	384	20:1	**192**
15360	**512**	**30:1**	**256**

Эллиптическая криптография

Эллиптической кривой E над полем F_p , *m.e* $E(F_p)$ F называется гладкая кривая, задаваемая уравнением вида:

$Y^2 + a_1XY + a_3Y = X^3 + a_2X^2 + a_4X + a_6$

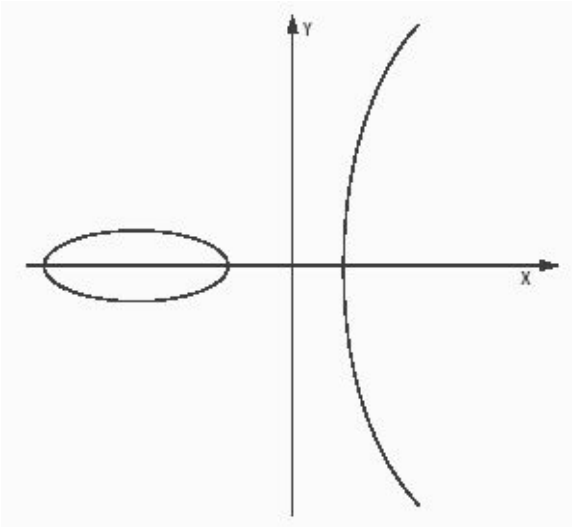
и содержащая также бесконечно удаленную точку, обозначаемую *O*

Для гладкости кривой не должно быть точек, в которых равны нулю обе частные производные, т.е два уравнения

$a_1Y = 3X^2 + 2a_2X + a_4$

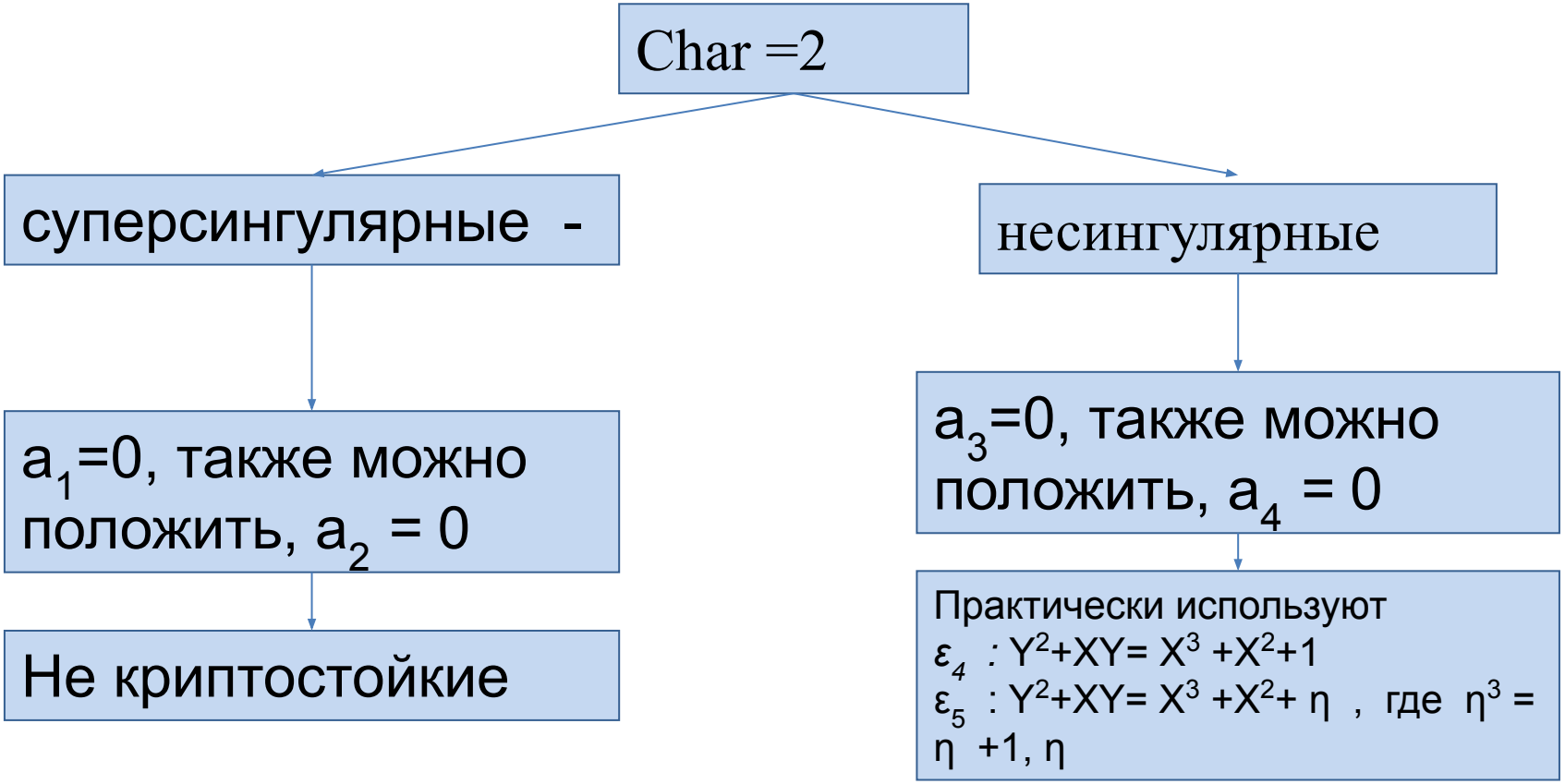
$2Y + a_1X + a_3 = 0$

не должны одновременно удовлетворяться ни в одной точке.



Эллиптическая криптография

Если $p = q^m$, где q - простое и m - положительное целое число, то q называют характеристикой(characteristic) F и обозначают char F, m называют степенью расширения (extension degree).



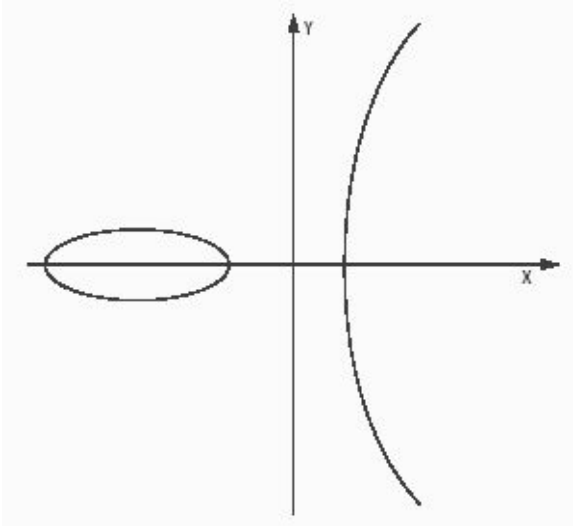
Эллиптическая криптография

Если F_p не является полем характеристики 2, то без потери общности можно полагать, что $a_1=a_3= 0$, а после упрощения левой части, линейной заменой переменной (а именно, $X \rightarrow X - 1/3a_2$) можно также удалить терм X^2. То есть без потери общности можно полагать, что кривая задана уравнением вида $Y^2 = X^3 +aX +b$, $a,b \in F_p$ $char\ F \neq 2, 3$

Понятие эллиптической кривой

В российском ГОСТ используется эллиптическая кривая E над полем Fp $y^2=x^3+ax+b$, задаваемая коэффициентами a и b и содержащая также бесконечно удаленную точку, обозначаемую *O*

p- простое число – модуль эллиптической кривой, $p>2^{255}$



Понятие эллиптической кривой

Множество точек эллиптической кривой вместе с нулевой точкой и с введенной операцией сложения будем называть «группой». Для каждой эллиптической кривой число точек в группе конечно, но достаточно велико.

Число точек эллиптической кривой, включая точку O, называется порядком (order) кривой и обозначается E (F_p). (в ГОСТе m)

Порядок m группы точек эллиптической кривой может быть оценен с помощью неравенства:
$p + 1 - 2\sqrt{p} \le m \le p + 1 + 2\sqrt{p}$,
где p — порядок поля, над которым определена кривая

Пример 1. задана эллиптическая кривая E: $Y^2 = X^3 + x + 4$ на поле F_{23}. Точками кривой будут
(0,2) (0,21) (1, 11) (1,12) (4,7)
(4,16) (7,3) (7,20) (8,8) (8,15)
(9,11) (9,12) (10,5) (10,18) (11,9)
(11,14) (13,11) (13,12) (14,5) (14,18)
(15,6) (15,17) (17,9) (17,14) (18,9)
(18,14) (22,5) (22,19) O
Порядок группы $\#E(F_{23}) = 29$.

Понятие эллиптической

Точки эллиптической кривой могут складываться, но не могут умножаться. Однако возможно скалярное умножение, когда соответствующее число раз выполняется прибавление одной и той же точки. В результате получается кратная точка.
$P = Q + Q + Q + \ldots + Q = kQ$

Порядком точки P эллиптической кривой называется наименьшее положительное целое число r , такое что kP=0

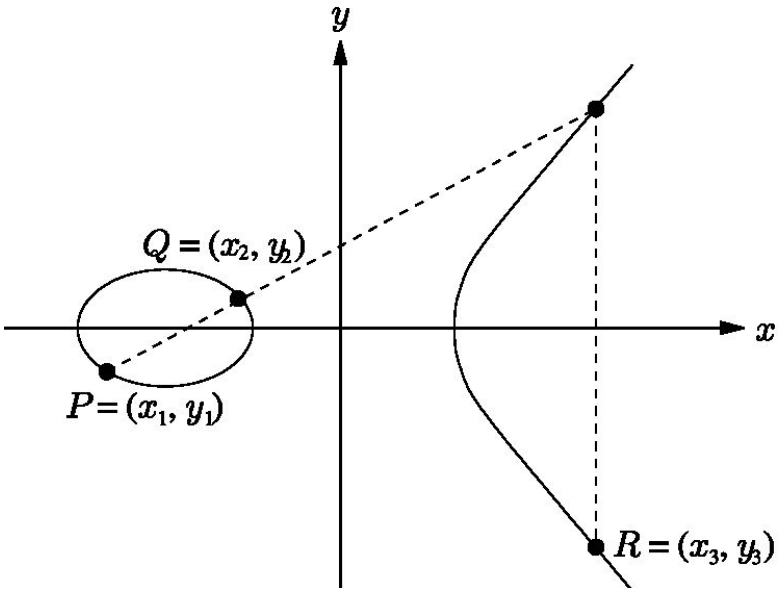
Точка P будет называться **генератором группы**, если кратные ей точки образуют все множество точек эллиптической кривой.

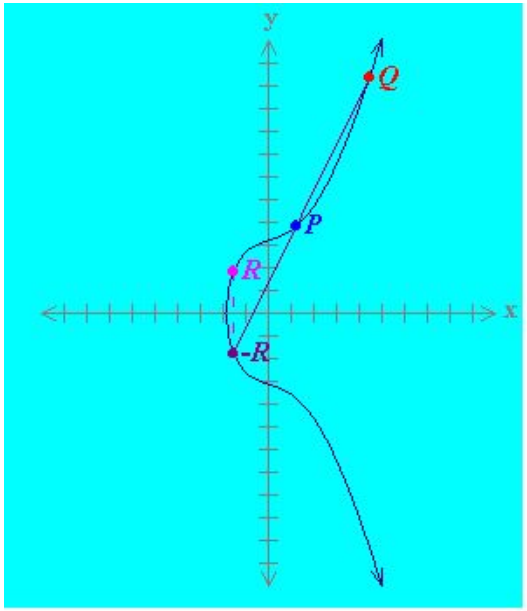
Для кривой, определенной в примере 1, #E (F_{23}) любая точка, кроме O, будет генератором E (F_{23}) . Например, для точки P =(0,2) имеем:

1P = (0, 2)	2P = (13, 12)	3P = (11, 9)
4P = (1, 12)	5P = (7, 20)	6P = (9, 11)
7P = (15, 6)	8P = (14, 5)	9P = (4, 7)
10P = (22, 5)	11P = (10, 5)	12P = (17, 9)
13P = (8, 15)	14P = (18, 9)	15P = (18, 14)
16P = (8, 8)	17P = (17, 14)	18P = (10, 18)
19P = (22, 18)	20P = (4, 16)	21P = (14, 18)
22P = (15, 17)	23P = (9, 12)	24P = (7, 3)
25P = (1, 11)	26P = (11, 14)	27P = (13, 11)
28P = (0, 21)	29P = O.	

Сложение точек на эллиптической кривой

Пусть P = (x_1, y_1) и Q = (x_2, y_2) две различные точки на кривой E. Тогда сумма P и Q, обозначаемая R = (x_3, y_3), определяется следующим образом. Сначала чертим линию через P и Q; эта линия пересекает эллиптическую кривую в третьей точке. Тогда R - отражение этой точки на ось X

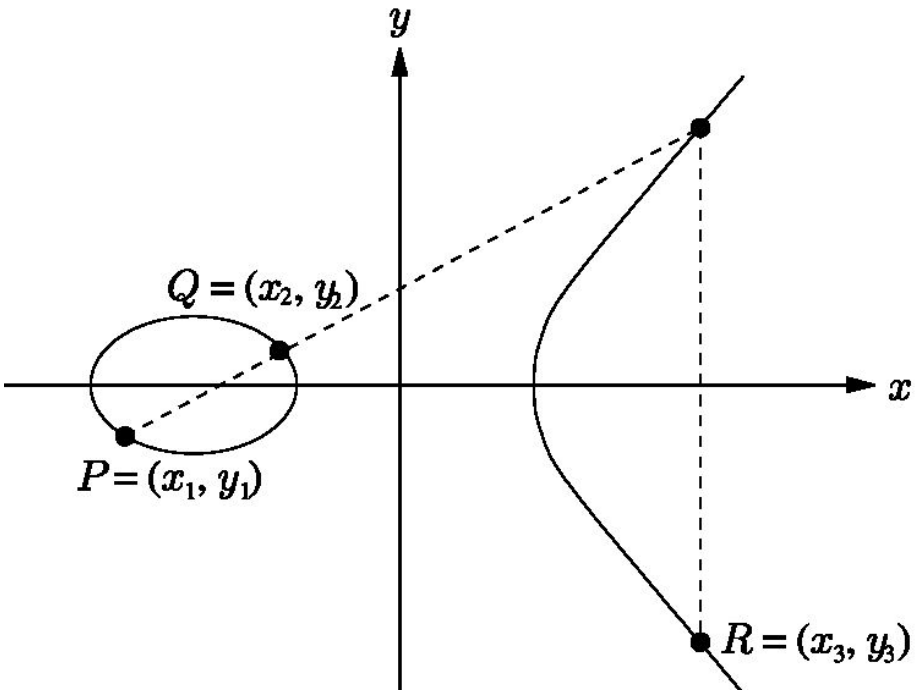




$$P + Q = R$$

Сложение точек на эллиптической кривой

P + Q = R

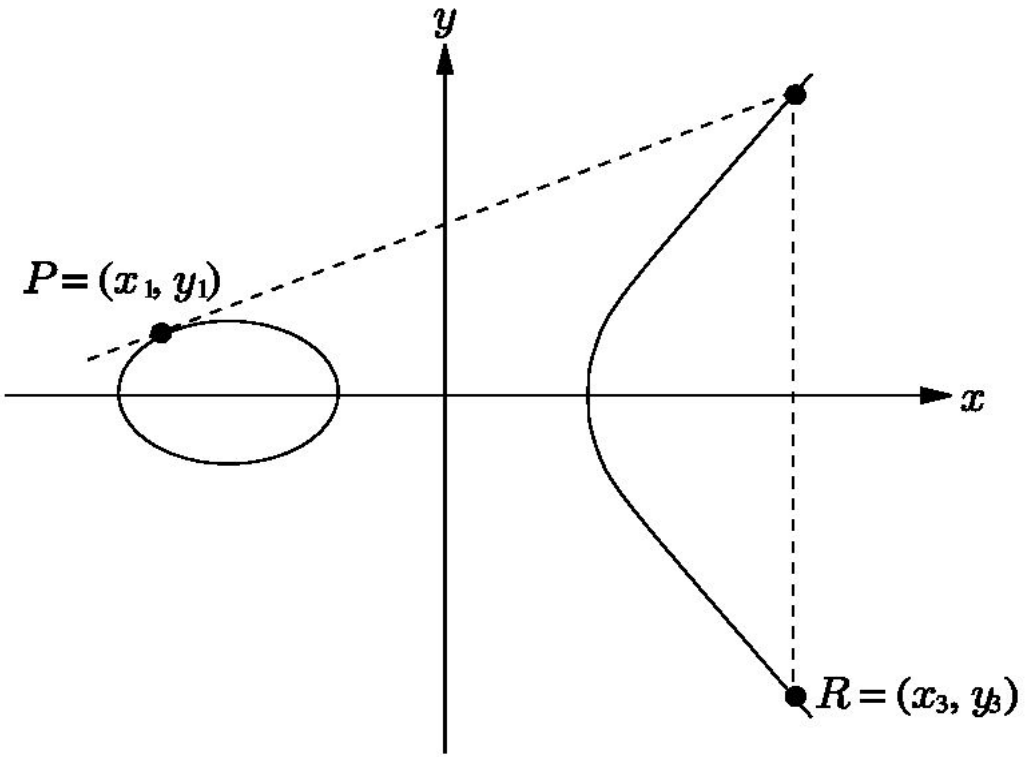


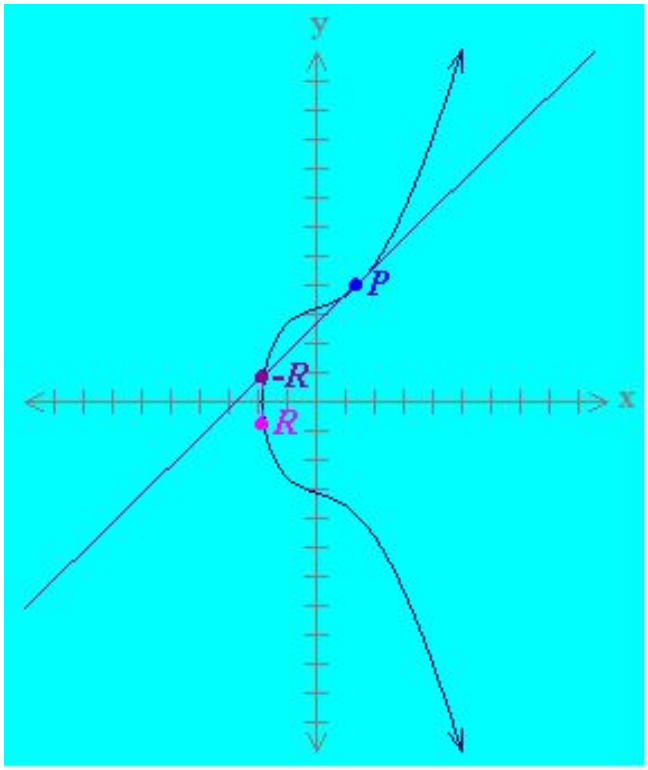
$$x_3 = \lambda^2 - x_1 - x_2 = \left(\frac{y_2 - y_1}{x_2 - x_1}\right)^2 - x_1 - x_2$$

$$y_3 = \lambda(x_1 - x_3) - y_1 = -y_1 + \left(\frac{y_2 - y_1}{x_2 - x_1}\right)(x_1 - x_3)$$

Удвоение точки

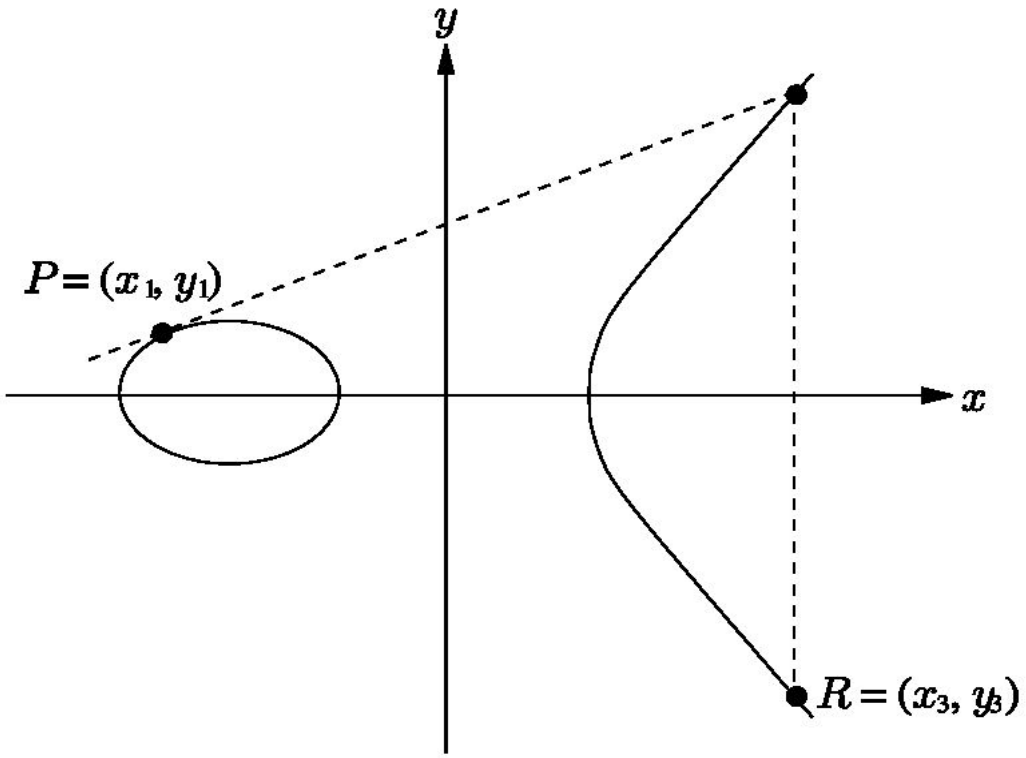
Если P = (x_1, y_1), то для нахождения удвоения P – точки R = (x_3, y_3) строится касательная к эллиптической кривой в точке P. Эта линия пересечёт эллиптическую кривую во второй точке. Тогда R - отражение этой точки на ось X





Удвоение точки

R=P + P = 2 × P



$$x_3 = \lambda^2 - 2x_1 = \left(\frac{3x_1^2 + a}{2y_1}\right)^2 - 2x_1$$

$$y_3 = \lambda(x_1 - x_3) - y_1 = -y_1 + \left(\frac{3x_1^2 + a}{2y_1}\right)(x_1 - x_3)$$

Открытые и личные ключи

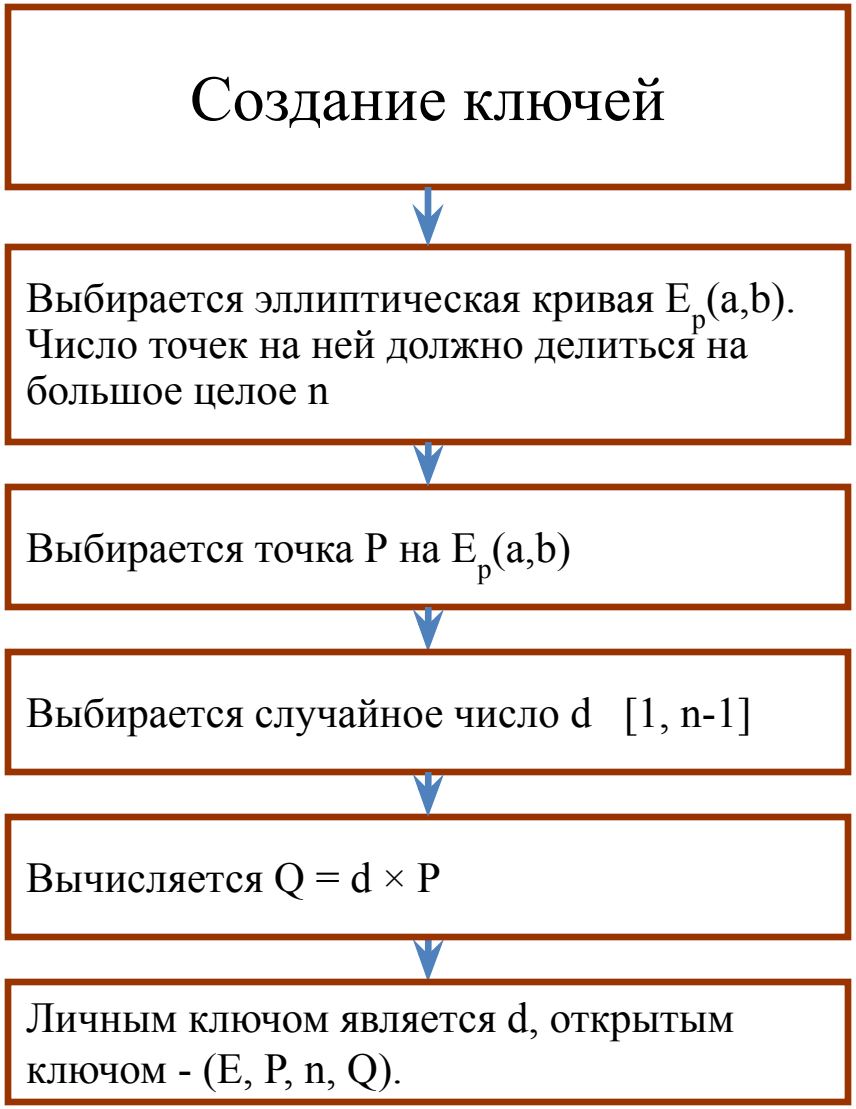
В российском ГОСТ используется эллиптическая кривая E над полем Fp $y^2=x^3+ax+b$, задаваемая коэффициентами a и b и содержащая также бесконечно удаленную точку, обозначаемую *O*

Личным ключом, как и раньше, положим некоторое случайное число x.

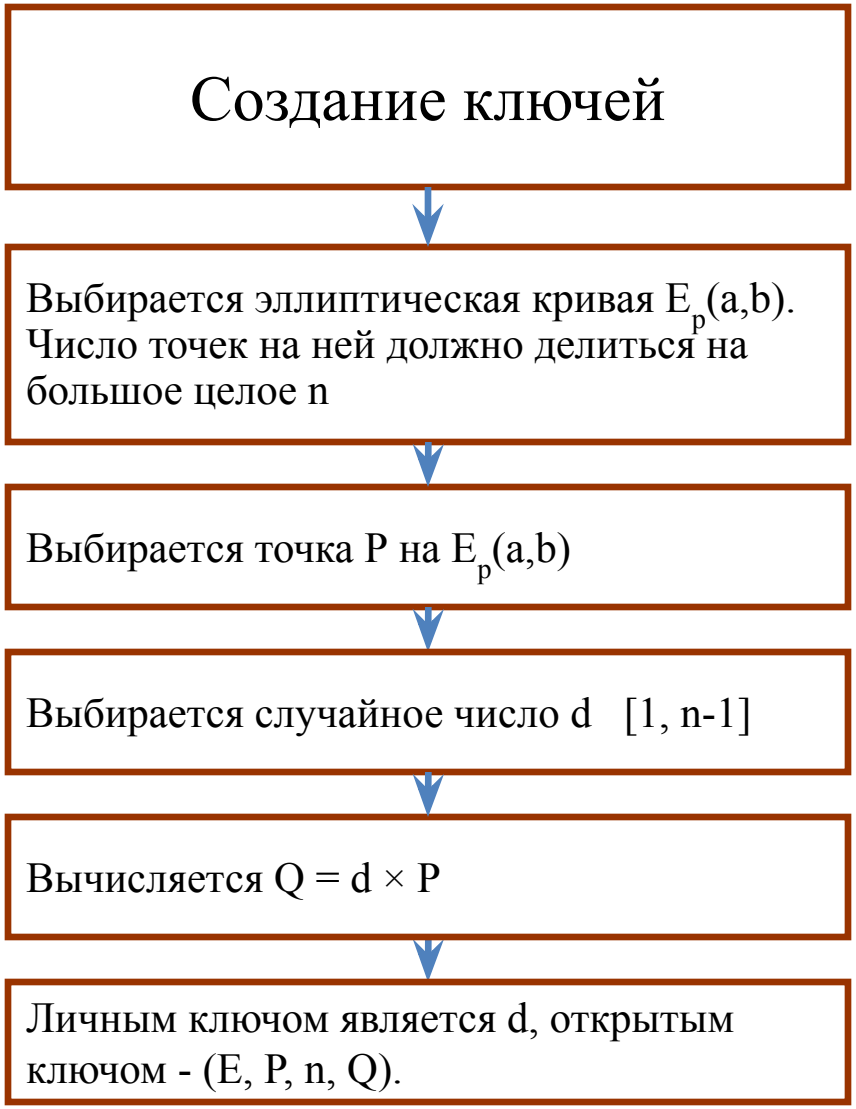
Открытым ключом будем считать координаты точки P = xG на эллиптической кривой P, где G — специальным образом выбранная точка эллиптической кривой («**базовая точка**»)

Координаты точки G вместе с коэффициентами уравнения, задающего кривую, являются параметрами схемы подписи и должны быть известны всем участникам обмена сообщениями. точка G должна иметь порядок q ($2^{254} < q < 2^{256}$).

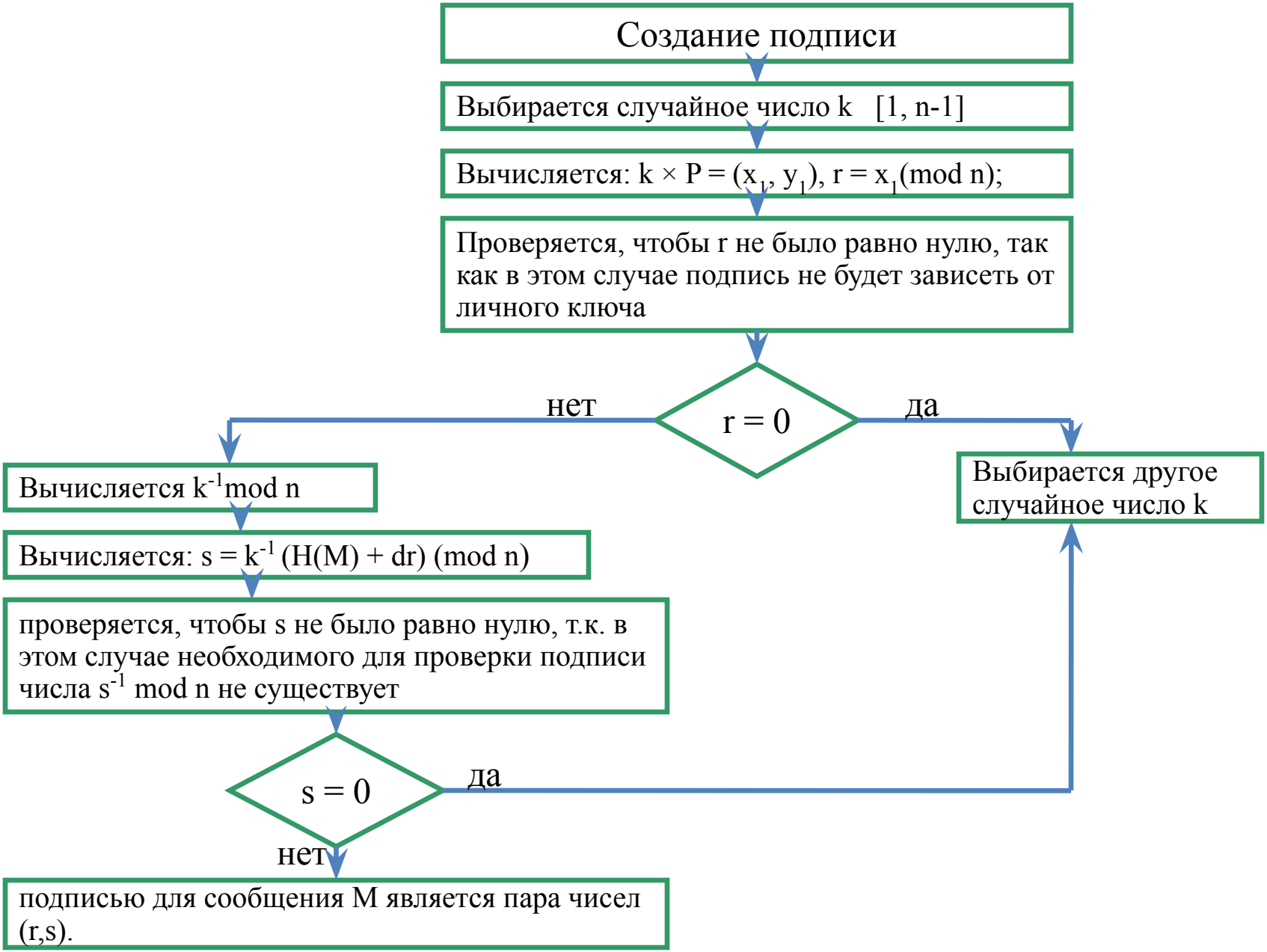
Алгоритм цифровой подписи на основе эллиптических кривых ECDSA.



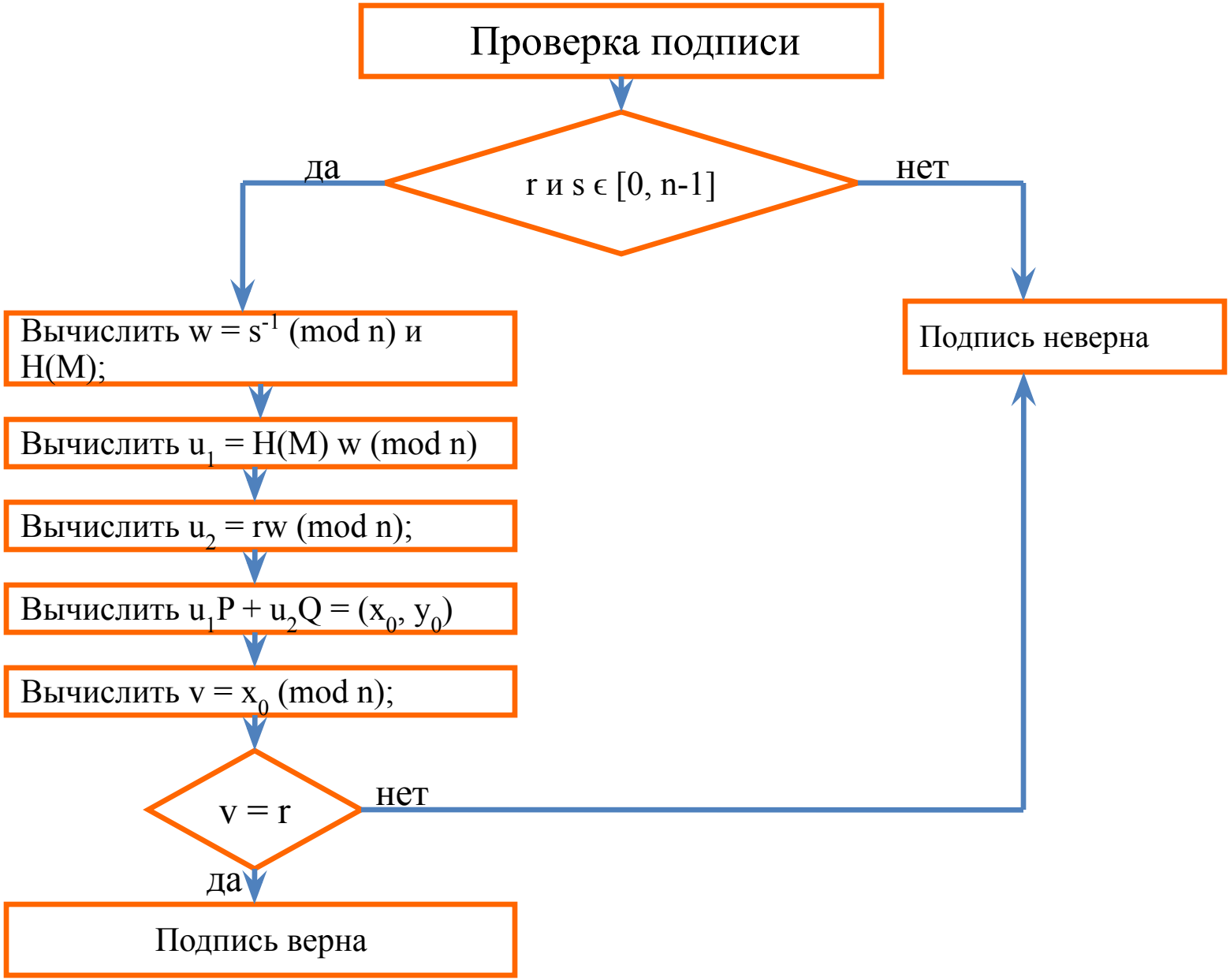
Алгоритм цифровой подписи на основе эллиптических кривых ECDSA.



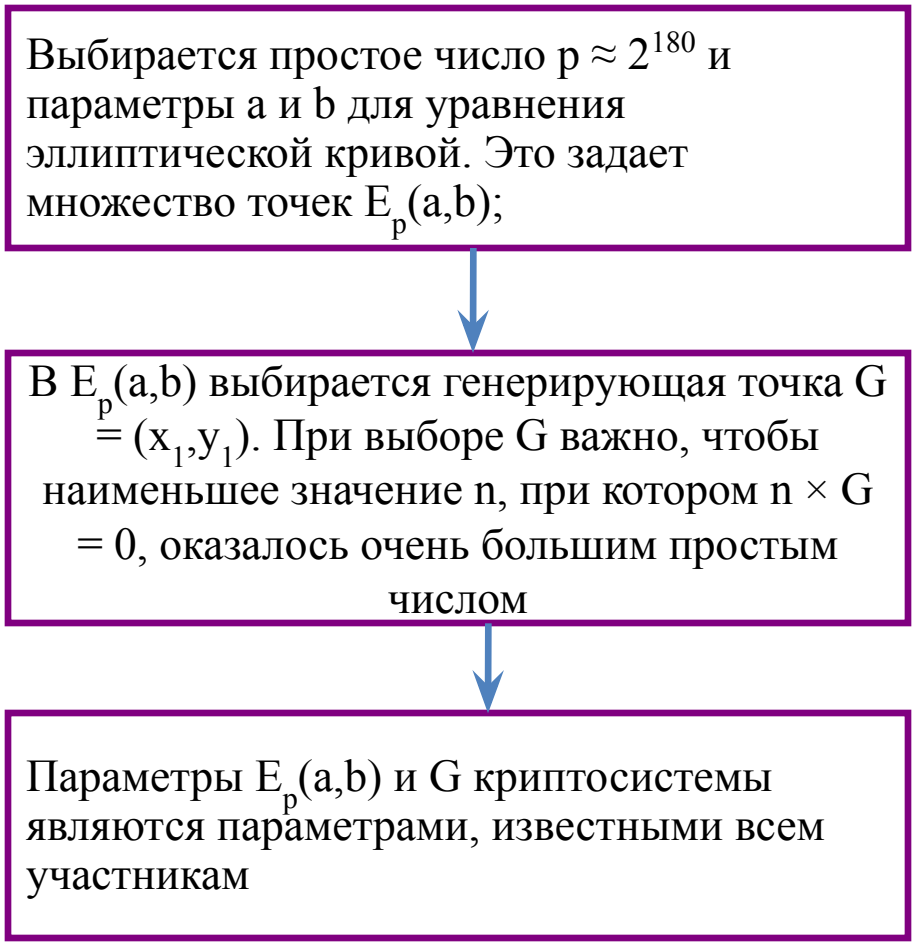
Алгоритм цифровой подписи на основе эллиптических кривых ECDSA.



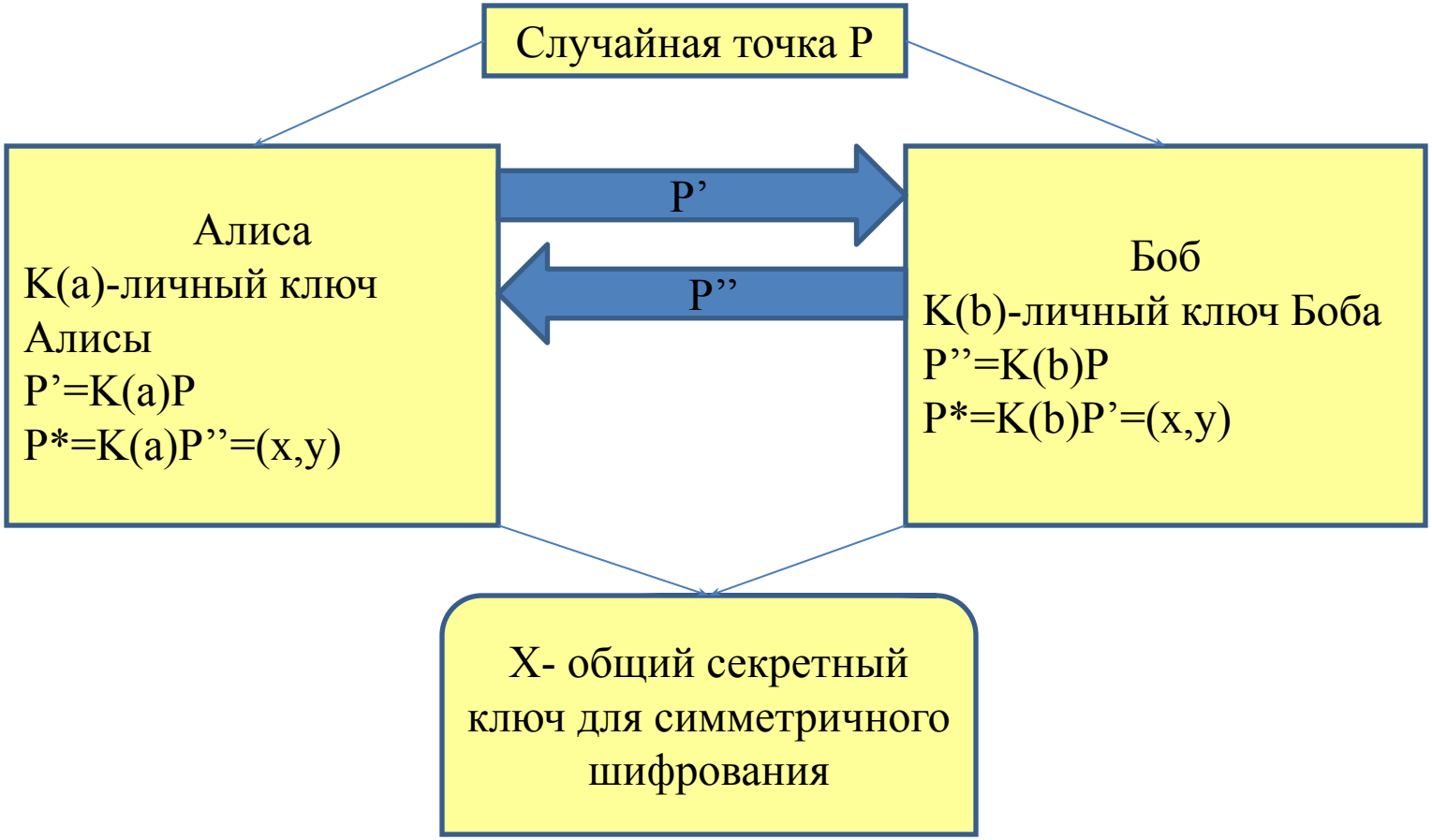
Алгоритм цифровой подписи на основе эллиптических кривых ECDSA.



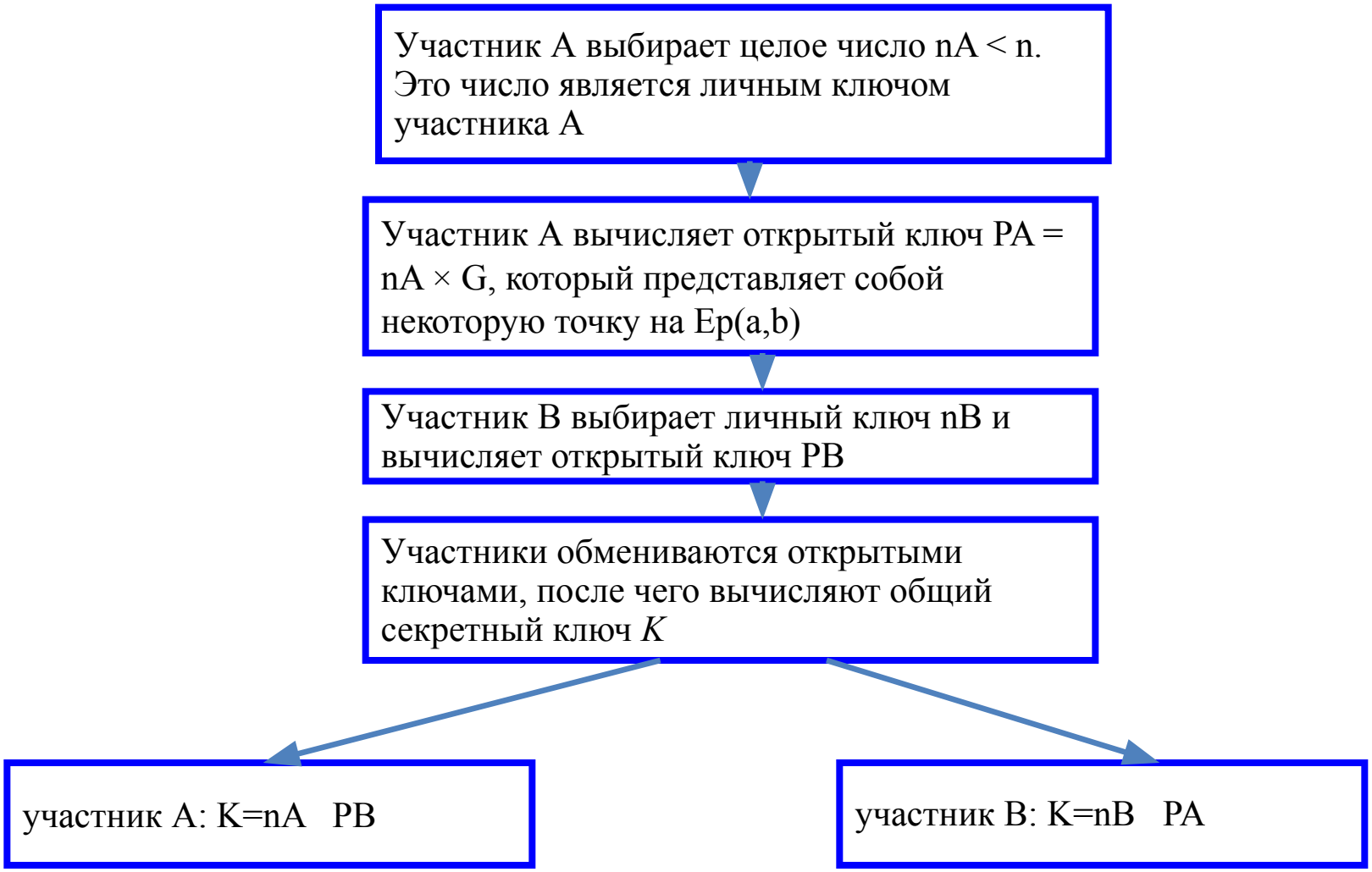
Криптография с использованием эллиптических кривых. Аналог алгоритма Диффи-Хеллмена обмена ключами



Пример алгоритма Диффи-Хеллмена на ЭК



Обмен ключами между пользователями A и B



Криптография с использованием эллиптических кривых. Шифрование.

Зашифровать сообщение M, которое может быть представлено в виде точки на эллиптической кривой Pm (x,y);

↓

В качестве параметров рассматривается эллиптическая кривая Ep(a,b) и точка G на ней

↓

участник B выбирает личный ключ nB и вычисляет открытый ключ PB = nB × G

↓

Чтобы зашифровать сообщение Pm используется открытый ключ получателя B PB

↓

Участник A выбирает случайное целое положительное число k и вычисляет зашифрованное сообщение Cm, являющееся точкой на эллиптической кривой:

$$Cm = \{k \times G, Pm + k \times PB\}$$

Криптография с использованием эллиптических кривых. Дешифрование.

Участник B умножает первую координату точки на свой ЛК и вычитает результат из второй координаты:
$Pm + k \times PB - nB \times (k \times G) = Pm + k \times (nB \times G) - nB \times (k \times G) = Pm$

↓

Участник A зашифровал сообщение Pm добавлением к нему kxPB. Противнику для восстановления сообщения придется вычислить k, зная G и $k \times G$

↓

Получатель также не знает k, но ему в качестве подсказки посылается $k \times G$

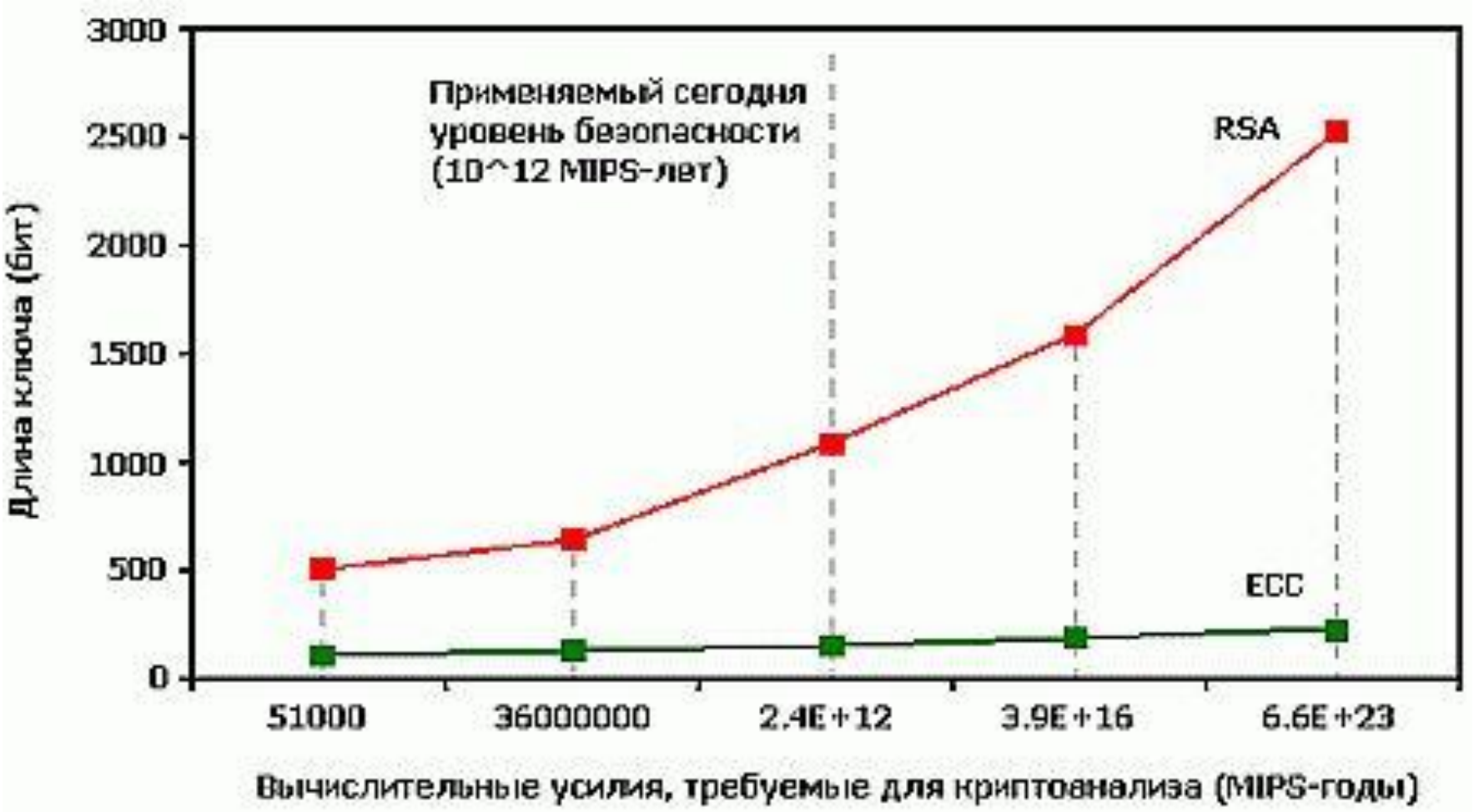
↓

Умножив $\boldsymbol{k \times G}$ на свой личный ключ, получатель получит значение, которое было добавлено отправителем к незашифрованному сообщению

↓

Тем самым получатель, не зная k, но имея свой личный ключ, может восстановить незашифрованное сообщение.

Сравнение криптостойкости с RSA



Сравнительные длины ключей

- При соответствующей криптостойкости

Симметричные алгоритмы	ECC	RSA / DH / DSA
80	163	1024
128	283	3072
192	409	7680
256	571	15360