Лекция №14

Тема: Геометрическое представление переключательных функций – функции алгебры логики.

Содержание:

1. Общие положения.
2. Геометрическое представление функции 2х переменных.
3. Геометрическое представление функций 3х переменных.
4. Геометрическое представление функции 4х переменных.
5. Геометрическое представление функции 5и переменных.
6. Минимизация булевых функций в геометрической форме.
7. Примеры задания функции.
8. Примеры минимизации булевой функции в геометрической форме.

Общие положения о геометрическом представлении функции алгебры логики.

Преобразования над функциями алгебры логики можно выполнять с помощью геометрического представления.

Тогда $E^n = \{(x_1, x_2, \dots, x_n) \dots (x_1, x_2, \dots, x_n)\}$, где $x_i = 0 \vee 1$ – множество наборов функций.

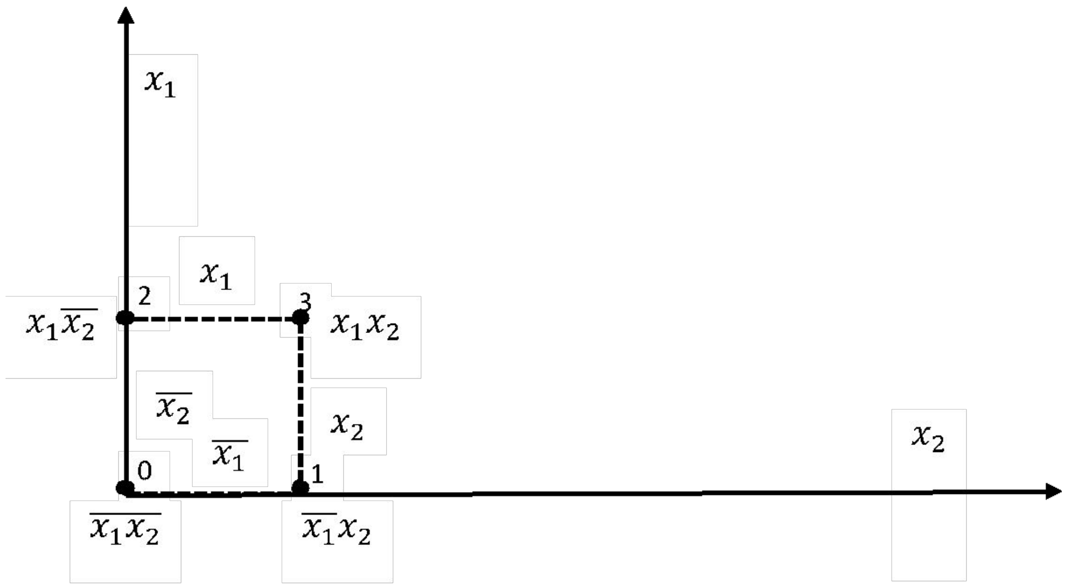
Множество наборов – множества вершин n-мерного куба.

E^n - n-мерный куб;

$(x_1, x_2, \dots, x_n)$ – вершины куба.

Геометрическое представление функций 2х переменных.

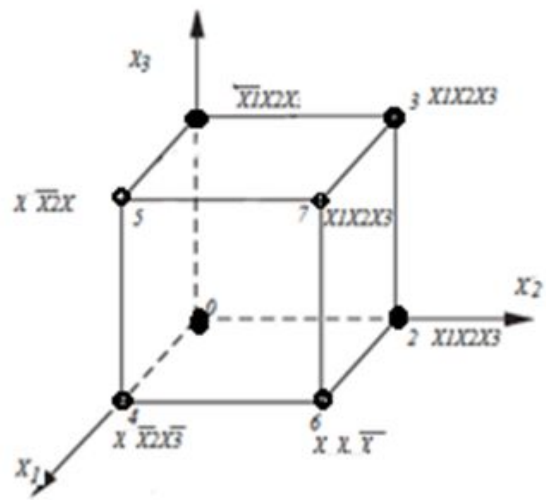
Функцию двух переменных можно интерпретировать с помощью квадрата в системе координат x_1 и x_2.



Две вершины, принадлежащие одному и тому же ребру, называются соседними и они «склеиваются» по переменной, изменяющейся вдоль этого ребра $x_1x_2 \vee \overline{x_1}x_2 = x_2(x_1 + \overline{x_1}) = x_2$

Геометрическое представление функции 3х переменных.

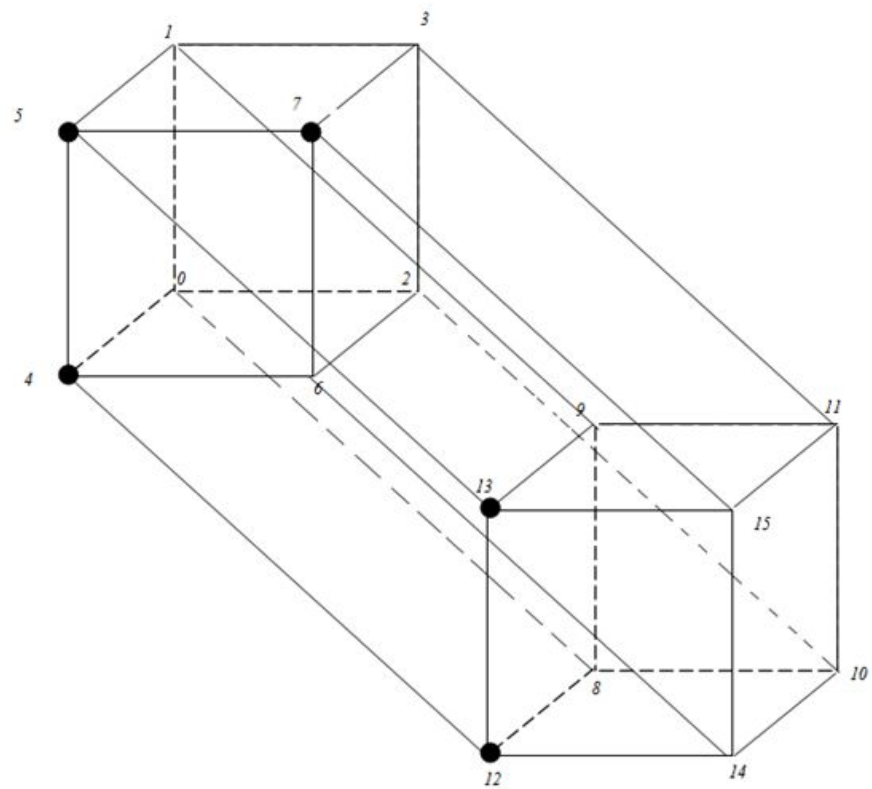
Для функций 3-х переменных геометрическое представление – куб, вершины которого обозначены десятичными, двоичными цифрами и произвольными переменными x. Рёбра куба поглощают вершины, грани поглощают свои рёбра и, следовательно, вершины.



Булева функция отображается на n-мерном кубе путём выделения вершин, соответствующих векторам $(x_1, x_2, \dots, x_n)$ на которых функция принимает значения «1». В геометрическом смысле каждый набор $(\widetilde{x_1}, \widetilde{x_2}, \dots, \widetilde{x_n})$, т.е. каждая вершина может рассматриваться как n-мерный вектор, определяющий точку n-мерного пространства.

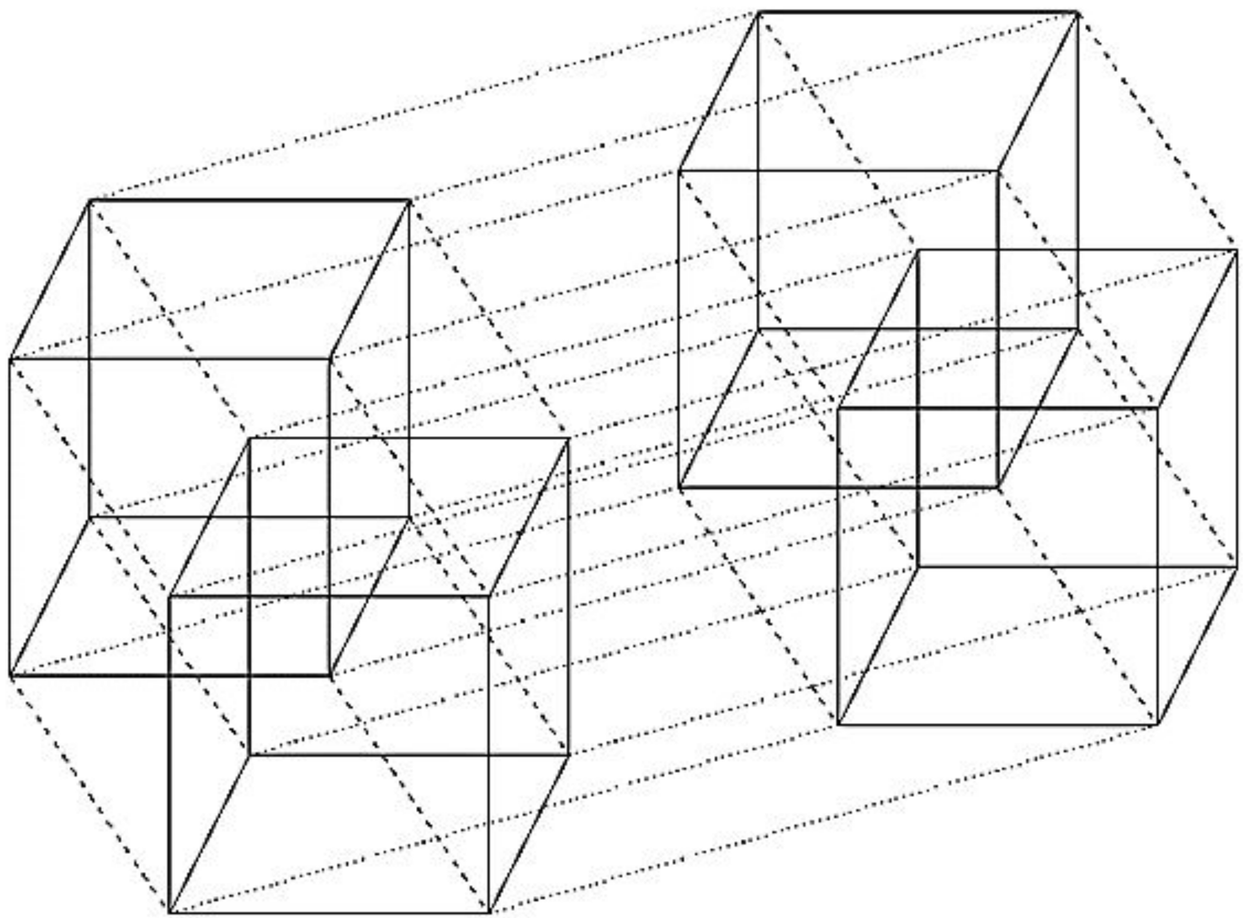
Геометрическое представление функции 4х переменных.

Функция 4-х переменных геометрически представляется в виде четырёхмерного куба.



Геометрическое представление функции 5и переменных.

Функция 5-и переменных – 5-мерный куб и т.д.



Минимизация булевой функции в геометрической форме.

Формулировка геометрической задачи (задачи о покрытии): необходимо найти для данного множества N такое покрытие гранями, принадлежащими N_f

$N_f = N_{k1} \vee N_{k2} \vee \cdots \vee N_{ks}$, чтобы ранг был наименьшим.

r_i означает ранг грани N_{ki} (он равен рангу конъюнкции). Ранг покрытия сумм

$$r = \sum_{i=1}^{s} r_i.$$

Задача эквивалентна задаче минимизации булевой функции в геометрической форме.

Задача минимизации булевых функций имеет две постановки:

- в аналитической форме
- в геометрической форме (задача о покрытии).

Употребляется два языка: аналитический и геометрический.

Координаты вершин куба указываются в порядке, соответствующем порядку перечисления переменных в записи функции. Геометрическое представление может использоваться при разработке методов минимизации

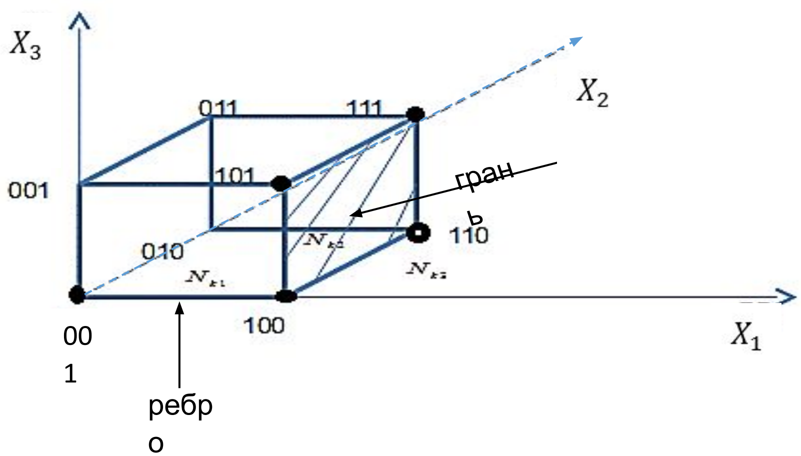
Пример задания функции.

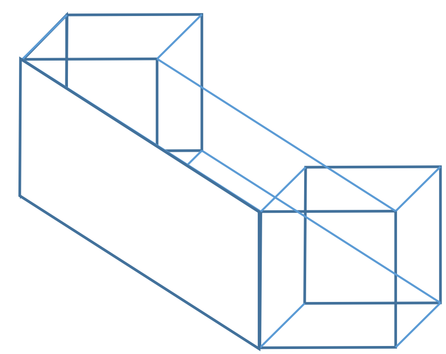
Функция $f(x_1, x_2, \dots, x_n)$ задана таблицей.

Минтермы: $N = \{(000), (100), (101), (110), (111)\}$.

000	1	100	1
001	0	101	1
010	0	110	1
011	0	111	1

Геометрически минтермы отображены в виде





Функции соответствуют грани.

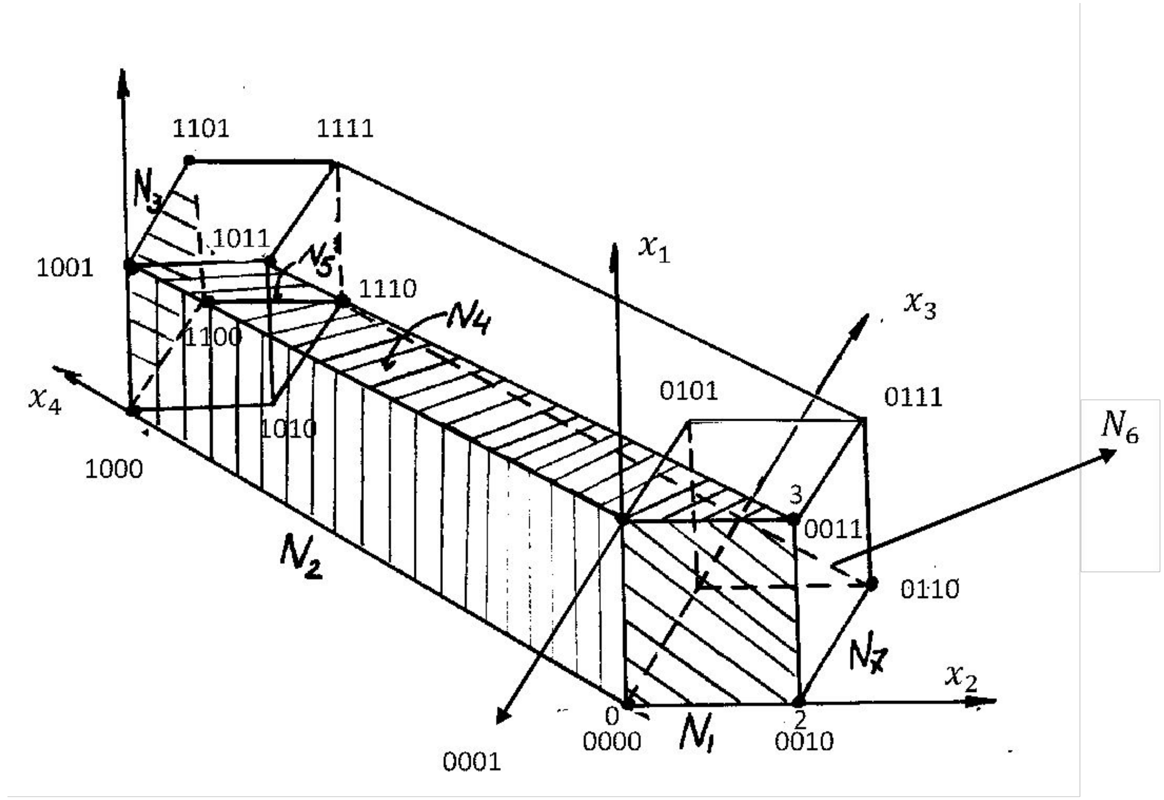
$N_{k1} = \{(0,0,0), (1,0,0)\}, N_{k2} = \{(1,0,0), (1,0,1), (1,1,0), (1,1,1)\}$,

имеющие соответственно ранги 1 и 2. Эти грани являются соответственно одномерной гранью (ребром) и двумерной гранью (плоскостью).

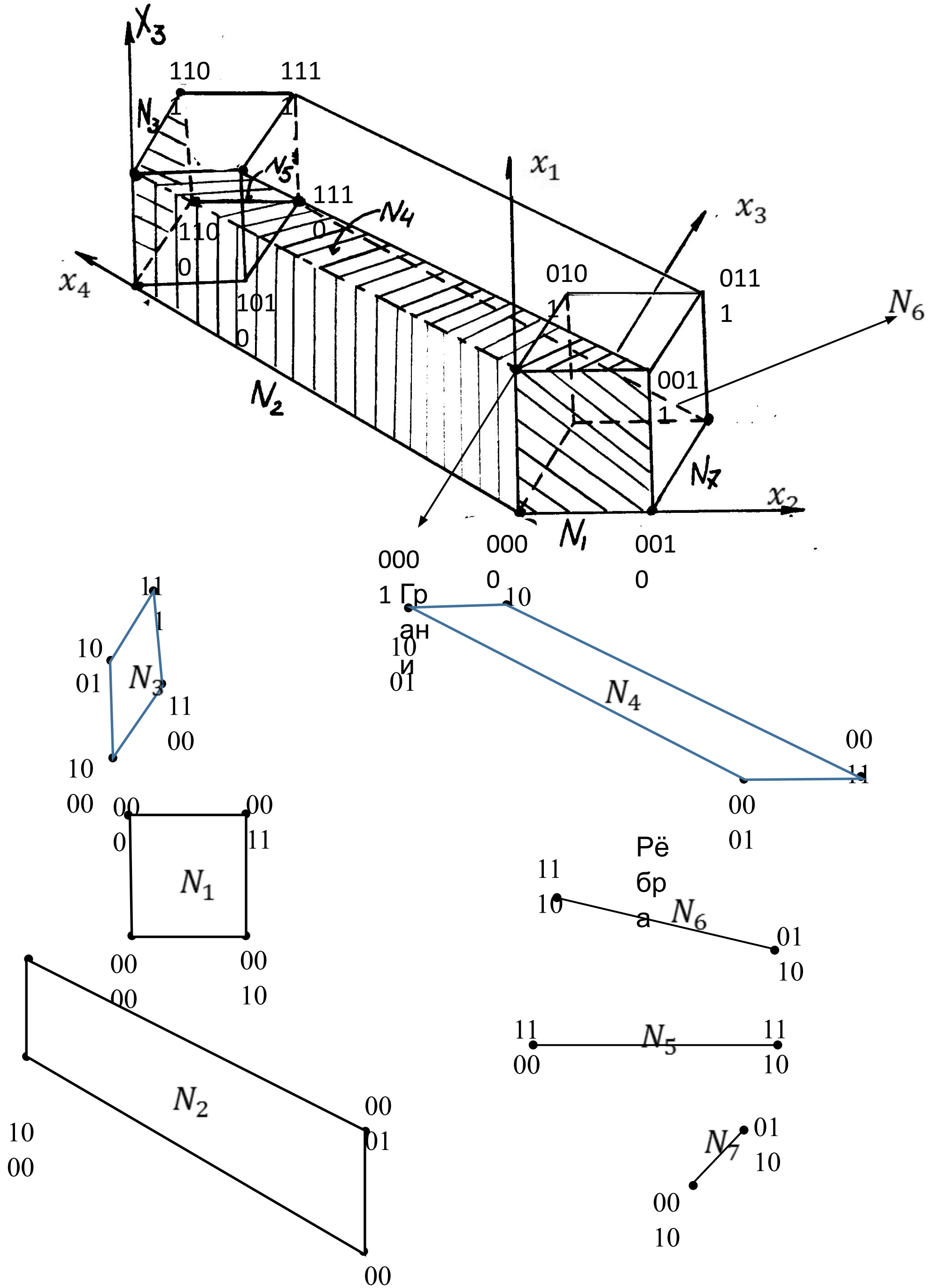
Грани N_{k1} и N_{k2} расположены внутри множества: $N = N_{k1} \cup N_{k2}$

Пример минимизации булевой функции в геометрической форме.

0	0	0	0	1
0	0	0	1	1
0	0	1	0	1
0	0	1	1	1
0	1	0	0	0
0	1	0	1	0
0	1	1	0	0
0	1	1	1	0
1	0	0	0	1
1	0	0	1	0
1	0	1	0	0
1	0	1	1	1
1	1	0	0	1
1	1	0	1	1
1	1	1	0	1
1	1	1	1	0



Вершины, отмеченные кружками - конституенты единицы.
Множество N_f имеет следующие грани: N_1, N_2, N_3, N_4 - грани двумерные
N_5, N_6, N_7 - рёбра



x_3
x_1
x_3
x_4
x_2
N_1
N_2
N_3
N_4
N_5
N_6
N_7
1101
1111
1110
1100
1010
0101
0111
0011
0001
0000
0010
Грани
Рёбра

Для N_1

$$\underbrace{\overline{x_1}\,\overline{x_2}\,\overline{x_3}\,\overline{x_4} + \overline{x_1}\,\overline{x_2}\,\overline{x_3}\,x_4}_{\overline{x_1}\,\overline{x_2}\,\overline{x_3}} + \underbrace{\overline{x_1}\,\overline{x_2}\,x_3x_4 + \overline{x_1}\,\overline{x_2}\,x_3\overline{x_4}}_{\overline{x_1}\,\overline{x_2}\,x_3}$$

$$\overline{x_1}\,\overline{x_2}$$

ДНФ соответствует покрытию

$N_f = N_1 \cup N_2 \cup N_3 \cup N_4 \cup N_5 \cup N_6 \cup N_7$

Варианты минимальных тупиковых ДНФ

a) $N_1 \cup N_3 \cup N_4 \cup N_5 \cup N_7$

b) $N_1 \cup N_3 \cup N_4 \cup N_6$

c) $N_2 \cup N_3 \cup N_4 \cup N_5 \cup N_7$

d) $N_2 \cup N_3 \cup N_4 \cup N_6 \cup N_7$

Имеем 4 минимальных (тупиковых) ДНФ: (a,b,c,d). Вариант b – минимальный

Основное краткое содержание лекции

1. Представление в геометрической форме функций алгебры логики характеризуется хорошей наглядностью.
2. Минимизация булевых функций в геометрической форме также обладает хорошей наглядностью.