Лекции 15-16

Тема: Фракталы.

Содержание:

Введение. Краткая историческая справка о фракталах.

Фракталы – молодой раздел дискретной математики.

В 1904 году швед Кох придумал непрерывную кривую, которая нигде не имеет касательной – кривая Коха.

В 1918 году француз Жюлиа описал целое семейство фракталов.

В 1938 году Пьер Леви опубликовал статью «Плоские и пространственные кривые и поверхности, состоящие из частей, подобных целому».

В 1982 Бенуа Мандельброта опубликовал книгу «Фрактальная геометрия природы».

С помощью простых конструкций и формул получаются изображения.

Появилась «фрактальная живопись».

С 1993 г. Из-во World Scientific издаёт журнал «Фракталы».

Фракталы – элементы геометрии в природе.

Фракталы - средства для описания таких объектов как модели горных хребтов, изрезанной береговой линии, систем кровообращения множества капилляров и сосудов, кроны деревьев, каскадных водопадов, морозные узоры на стекле.

Или такие: лист папоротника, облака, клякса.

Изображения таких предметов можно представить с помощью фрактальной графики.

Объекты, обладающие фрактальными свойствами, в природе.

- Кораллы
- Морские звезды и ежи
- Морские раковины
- Цветы и растения (брокколи, капуста)
- Плоды (ананас)
- Кроны деревьев и листья растений
- Кровеносная система и бронхи людей и животных

В неживой природе:

- Границы географических объектов (стран, областей, городов)
- Береговые линии
- Горные хребты
- Снежинки
- Облака
- Молнии
- Образующиеся на стеклах узоры
- Кристаллы
- Сталактиты, сталагмиты, геликтиты.

Определение терминологии «фракталы».

Фракталы - это геометрические фигуры, которые удовлетворяют одному или нескольким из следующих свойств:

- Обладает сложной нетривиальной структурой при любом увеличении (на всех масштабах);
- Является (приближённо) самоподобной.
- Обладает дробной хаусдорфовой (фрактальной) размерностью или превосходящей топологическую;
- Может быть построена рекурсивными процедурами.

Для регулярных фигур таких, как окружность, эллипс, график гладкой функции небольшой фрагмент в очень крупном масштабе похож на фрагмент прямой. Для фрактала увеличение масштаба не ведёт к упрощению структуры, для всех масштабов мы увидим одинаково сложные картины.

Классы фракталов

Фрактал – структура, состоящая из частей (субструктур), подобных целому.

Часть фракталов, как элементов природы, можно отнести к классу геометрических (конструктивных) фракталов.

Остальная часть может быть отнесена к классу динамических фракталов (алгебраических).

Описание фрактальных процессов.

Рекурсивный геометрический образ в виде древовидного графа лежит в основе большинства фрактальных структур. Используются итерационные алгоритмы для задания рекурсии.

Для описания фрактальных процессов и структур используется рекурсивная функция, имеющая своим аргументом саму себя:

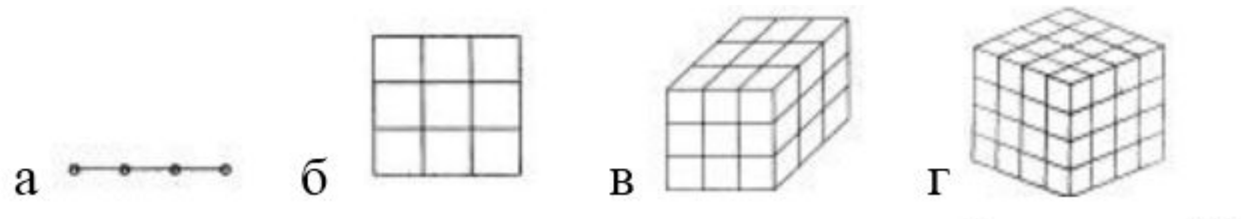
$$f(x), f\big(f(x)\big), f\Big(f\big(f(x)\big)\Big), \ldots$$

Дифференцируемые кривые и поверхности, изучаемые в курсе классического математического анализа, не используется для описания фрактальных процессов и структур.

Теория фракталов, несмотря на свою широту, тем не менее эффективно обслуживает довольно узкую прикладную область, тесно связанную с компьютерами – это фрактальная графика.

Процедуры получения фрактальных множеств.

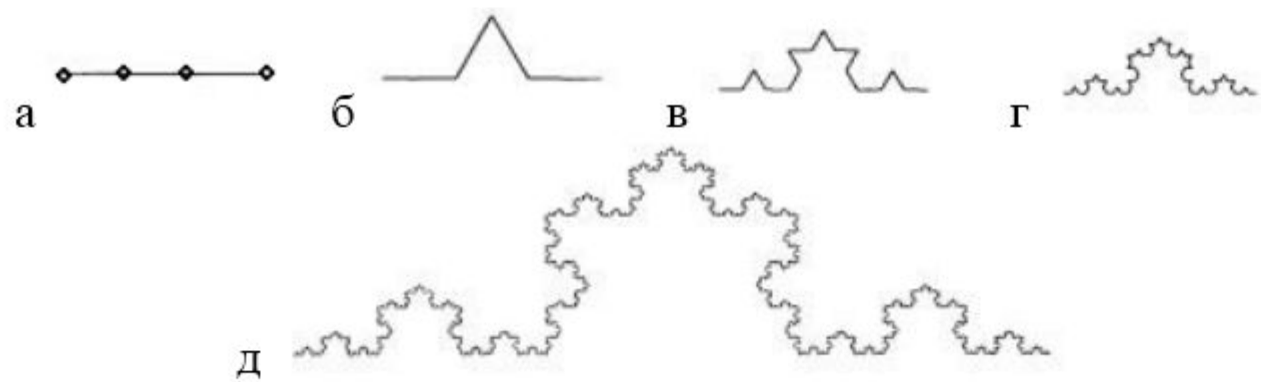
Это простая рекурсивная процедура получения фрактальных кривых: задают произвольную ломаную с конечным числом звеньев – генератор. Далее, заменяют в ней каждый отрезок генератор. Затем вновь заменяют в ней каждый отрезок генератором и так до бесконечности.



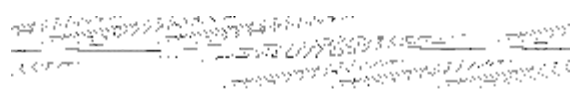
Изображено: деление единичного отрезка на 3 части (а), единичной квадратной площадки на 9 частей (б), единичного куба на 27 частей (в) и на 64 части (г). Число частей n, коэффициент масштабирования — k, а размерность пространства — d. Имеем следующие соотношения: n = kd,

если n = 3, k = 3, то d = 1; если n = 9, k = 3, то d = 2; если n = 27, k = 3, то d = 3.
если n = 4, k = 4, то d = 1; если n = 16, k = 4, то d = 2; если n = 64, k = 4, то d = 3. Размерность пространства выражается целыми числами: d = 1, 2, 3; для n = 64, величина d равна

Показано пять шагов построения ломаной Коха: отрезок единичной длины (а), делится на три части ($k = 3$), из четырех частей ($n = 4$) – ломаная (б); каждый прямой отрезок делится на три части ($k^2 = 9$) и из 16 частей ($n^2 = 16$) – ломаная (в); процедура повторяется для $k^3 = 27$ и $n^3 = 64$ – ломаная (г); для $k^5 = 243$ и $n^5 = 1024$ – ломаную (д).



Размерность



Это дробная, или фрактальная размерность.

Ломаная Коха, предложенная Гельгом фон Кохом в 1904 г., выступает в роли фрактала, который подходит для моделирования изрезанности береговой линии. Мандельброт в алгоритм построения береговой линии внес элемент случайности, который, однако, не повлиял на основной вывод в отношении длины береговой линии. Поскольку предел

длина береговой линии за счет бесконечной изрезанности берега стремится к бесконечности.

Процедура сглаживания береговой линии при переходе от более детального масштаба к менее детальному, т.е. согласно рис переходы от (д) к (г), от (г) к (в), от (в) к (б), дает одну и ту же величину: на три части длины — одну «бухту», а длина стремится к единичному значению.

Снежинка Коха (фрактал Коха)

В Качестве основы построения можно брать не отрезки единичной длины, а равносторонний треугольник, на каждую сторону которого распространить процедуру умножения изрезанности. В этом случае получим снежинку Коха (рис.), причем трех видов: вновь образующиеся треугольники направлены только наружу от предыдущего треугольника (а) и (б); только внутрь (в); случайным образом либо наружу, либо внутрь (г) и (д). Как можно задавать процедуру построения фрактала Коха.

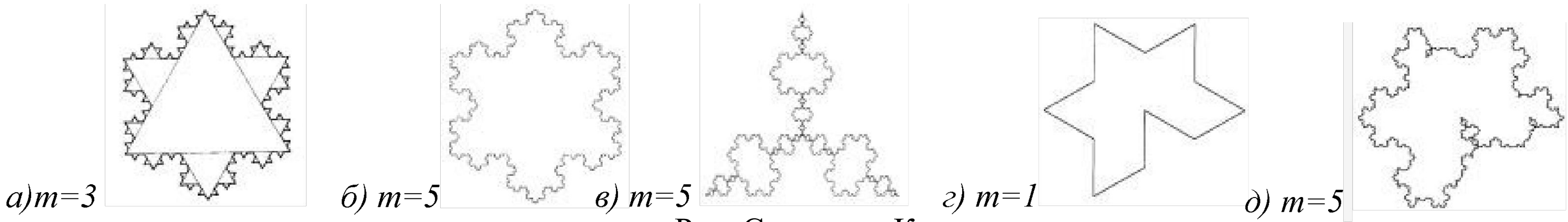
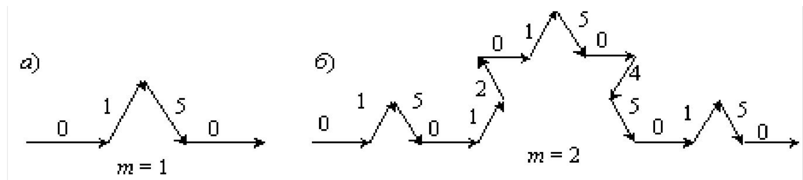


Рис. Снежинка Коха



Первый шаг рекурсивной процедуры

Второй шаг рекурсивной процедуры

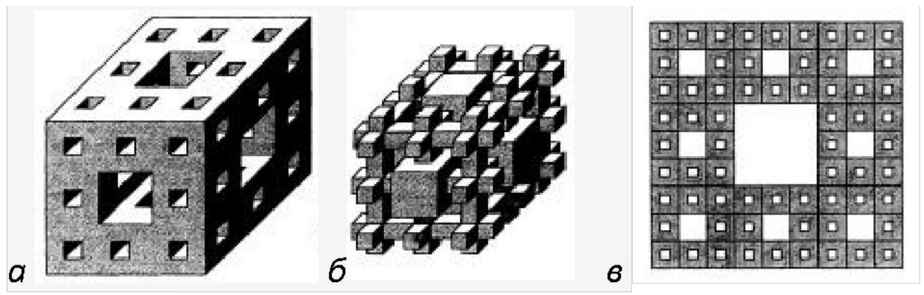
На рис. показаны две векторные диаграммы; числа, стоящие над стрелками, видимо, вызовут вопрос: что бы они значили? Вектор 0 совпадает с положительным направлением оси абсцисс, так как его фазовый множитель $\exp(i2\pi l/6)$ при $l = 0$ сохраняет его направление. Вектор 1 повернут относительно вектора 0 на угол $2\pi/6$, когда $l = 1$. Вектор 5 имеет фазовый множитель $\exp(i2\pi 5/6)$, $l = 5$. Последний вектор имеет тот же фазовый множитель, что и первый ($l = 0$). Целые числа l характеризуют угол фазового множителя единичного вектора.

Первый шаг (рис.), задает рекурсивную процедуру для всех последующих шагов и, в частности, для второго шага (рис.). Как перейти от набора чисел $\varphi 1 = \{0\ 1\ 5\ 0\}$ к $\varphi 2 = \{0\ 1\ 5\ 0\ 1\ 2\ 0\ 1\ 5\ 0\ 4\ 5\ 0\ 1\ 5\ 0\}$? Ответ: через прямое перемножение матриц, когда каждый элемент одной матрицы умножается на исходную матрицу. Поскольку в данном случае мы имеем дело с одномерным массивом, т.е. матрицы представляют собой векторы, то здесь производится умножение каждого элемента одной матрицы-вектора на все элементы другой матрицы-вектора. Кроме того, элементы матрицы-вектора $\varphi 1$ состоят из показательных функций $\exp(i2\pi l/6)$, следовательно, при перемножении числа h нужно будет складывать по mod (6), а не умножать.

Губки Менгера.

Кроме одномерных есть и трёхмерные фракталы.

На рис. в трехмерном пространстве изображена губка Менгера (а), и двумерный эквивалент (б). Она также является фракталом, для которого процедуру рекурсии можно отразить с помощью матриц. Для трехмерной губки пришлось бы иметь дело с трехмерными матрицами, действия с ними известны, но они слишком громоздки. Поставим темным участкам квадрата в соответствие 1, а светлым — 0 (рис.). В этом случае паттерн плоской губки φ1 с единственной дыркой внутри выглядит в виде матрицы 3 × 3.



$$\begin{pmatrix} 1 & 1 & 1 \\ 1 & 0 & 1 \\ 1 & 1 & 1 \end{pmatrix} \times \begin{pmatrix} 1 & 1 & 1 \\ 1 & 0 & 1 \\ 1 & 1 & 1 \end{pmatrix} = \left(\begin{array}{ccc|ccc|ccc} 1 & 1 & 1 & 1 & 1 & 1 & 1 & 1 & 1 \\ 1 & 0 & 1 & 1 & 0 & 1 & 1 & 0 & 1 \\ 1 & 1 & 1 & 1 & 1 & 1 & 1 & 1 & 1 \\ \hline 1 & 1 & 1 & 0 & 0 & 0 & 1 & 1 & 1 \\ 1 & 0 & 1 & 0 & 0 & 0 & 1 & 0 & 1 \\ 1 & 1 & 1 & 0 & 0 & 0 & 1 & 1 & 1 \\ \hline 1 & 1 & 1 & 1 & 1 & 1 & 1 & 1 & 1 \\ 1 & 0 & 1 & 1 & 0 & 1 & 1 & 0 & 1 \\ 1 & 1 & 1 & 1 & 1 & 1 & 1 & 1 & 1 \end{array}\right)$$

Губки Менгера используются как аналог множество Кантора в трёхмерном пространстве.

Краткое основное содержание лекции (двух лекций №15-16)

1) фракталы – это новый раздел дискретной математики, который не смотря на молодость уже нашёл применения во многих областях науки и техники.
2) Фракталы являются множествами.
3) Фракталы – это геометрические фигуры, характеризующиеся

- сложной нетривиальной структурой;
- самоподобием на всех масштабах;
- дробной размерностью;
- в основе лежат рекурсивные процедуры.

Теория фракталов, к сожалению, обслуживает эффективную узкую прикладную область – это фрактальная графика.