

Лекция №2

Тема лекции: Множества.

Содержание:

1. Основные понятия и определения.
2. Способы задания множеств.
3. Пустое множество.
4. Операции над множествами.
5. Универсум множества.
6. Свойства множеств.
7. Множество подмножеств.
8. Алгебра множеств.
9. Обобщение операций над множествами.

Основные понятия теории множеств

Множество – объединение объектов, хорошо различаемых нашей интуицией или нашей мыслью, в единое целое.

Георг Кантор.

«Множество образуется из элементов, обладающих некоторыми свойствами и находящихся в некоторых отношениях между собой или с элементами других множеств»

Н. Бурбаки.

Объекты, образующие множество, называются элементами множества.

Обозначение конкретных множеств таково:

$A, B, S, X \dots$ или $A_1, A_2, A_3 \dots$

Обозначение элементов множеств:

$a, b, s, x \dots$ или $a_1, a_2, a_3 \dots$

Примеры множеств:

- Множество натуральных чисел.
- Множество цифр десятичной системы.
- Множество цифр двоичной системы.
- Множество чётных чисел.
- Множество страниц книги.
- Множество студентов университета.

Способы задания множеств

1. Вербальный (словесный) – путём описания характеристических свойств, которыми должны обладать элементы множеств. Например, «множество цифр двоичной системы».
2. Задание списком (перечислением) всех элементов. Дается в фигурных скобках.

$$\{1,2,3, \dots\}$$

$$\{0,1,2,3,4,5,6,7,8,9\}$$

$$\{0,1\}$$

$$\{2,4,6 \dots\}$$

1. Предикатный (высказывательный, порождающий). Задаётся с помощью предиката, т.е. множество задаётся в виде $\{x:P(x)\}$ или $\{x|P(x)\}$, где $P(x)$ принимает значение «истина» для элементов множества.

$$\{1,2,3, \dots\} = \{x|x - \text{натуральное число}\}$$

$$\{0,1,2, \dots, 9\} = \{x|x - \text{цифра десятичной системы}\}$$

$$\{0,1\} = \{x|x - \text{цифра двоичной системы}\}$$

$$\{2,4,6, \dots\} = \{x|x - \text{чётное число}\}$$

1. Анатомический – с помощью аналитического выражения, формулы.

$$x \in S \text{ (} x \text{ принадлежит множеству } S)$$

$$x \notin S \text{ (} x \text{ – не принадлежит множеству } S)$$

\in - символ принадлежности элемента к множеству.

Пустое множество

Множество, которое не содержит элементов, пустое \emptyset .

$$S = \{x \mid x - \text{нечётное число, делящееся на } 2\} = \emptyset$$

Пустое множество – совокупность объектов, ни один из которых не принадлежит множеству \emptyset .

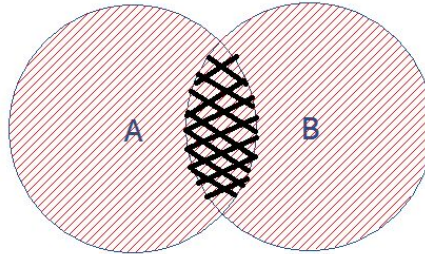
Для любого A справедливо

$$\emptyset \subseteq A$$

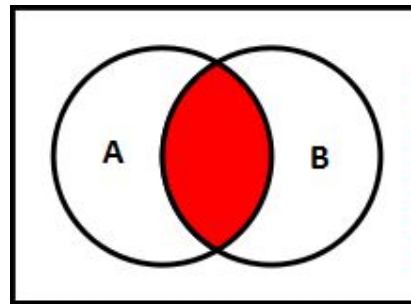
Множество \emptyset включено в множество A .

Операции над множествами

Объединение A и B ($A \cup B$) – это множество, состоящее из всех элементов множества A , всех элементов множества B и не содержащее никаких других элементов, т.е. $A \cup B = \{x | x \in A \vee x \in B\}$, где знак \vee обозначает логическую операцию дизъюнкция (логическое «или»).

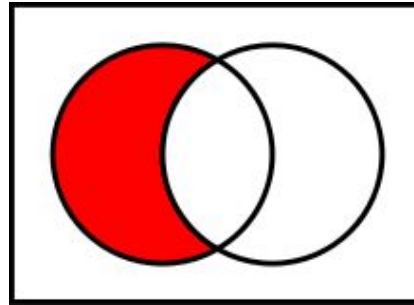


Пересечение A и B ($A \cap B$) – это множество, состоящее из тех и только тех элементов, которые принадлежат одновременно множеству A и множеству B , т.е. $A \cap B = \{x | x \in A \wedge x \in B\}$, где знак \wedge обозначает логическую операцию конъюнкция ("логическое и").

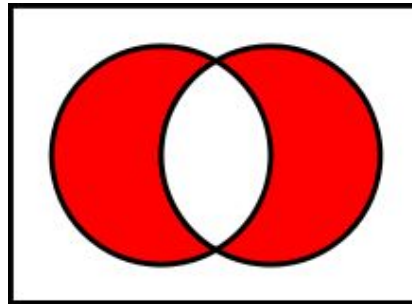


Операции над множествами 2

Разность A и B (относительное дополнение) – это множество, состоящее из тех и только тех элементов, которые принадлежат A и не принадлежат B , т.е. $A - B = \{x | x \in A \wedge x \notin B\}$



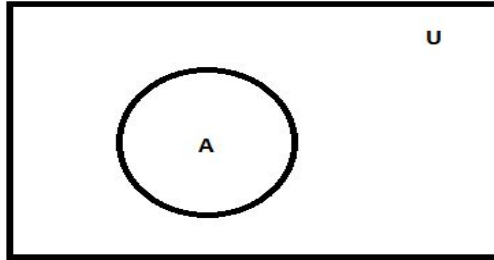
Дизъюнктивная сумма A и B (или симметричная разность) – это множество, состоящее из всех элементов A , не принадлежащих B , а так же всех элементов B , не принадлежащих A , и не содержащее никаких других элементов, т.е. $A \oplus B = \{x | x \in A \oplus x \in B\}$



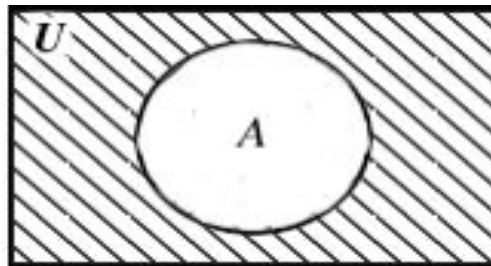
Универсум

Совокупность всех допустимых объектов называется основным множеством (универсумом) и обозначается U .

Универсум U арифметики – числа, универсум U зоологии – животные и т.д.



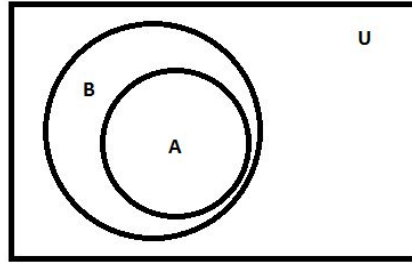
Любое множество будем рассматривать в связи с универсумом, который на кругах Эйлера будем ассоциировать с прямоугольником на плоскости, внутри которого будем изображать множества



Новая операция $U - A = \bar{A}$ (абсолютное дополнение A) – это множество, которое содержит все элементы универсума. За исключением элементов A .

Множество подмножеств

Определение. Множество A называется подмножеством B , если каждый элемент A является элементом B .



Для обозначения этого факта вводится значок « \subset » - символ включения (или « \subseteq ») $A \subset B$ другими словами $A \subset B \Leftrightarrow \forall x(x \in A \Rightarrow x \in B)$.

Определение. Два множества равны, если они состоят из одних и тех же элементов $A=B$.

Определение. Множество, элементами которого являются все подмножества множества A , называют множеством подмножеств (множеством - степенью) множества A и обозначается $P(A)$. Так, для трехэлементного множества $A = \{a, b, c\}$ имеем $P(A) = \{\emptyset, \{a\}, \{b\}, \{c\}, \{a, b\}, \{a, c\}, \{b, c\}, \{a, b, c\}\}$.

Основные свойства операций над множествами

Коммутативный закон	
Ассоциативный закон	
Дистрибутивный закон	
Закон идемпотентности (самопоглощения)	
Закон поглощения	
Теорема де Моргана	
Свойства дополнения, разности и равенства	

Основное содержание лекции

Множество образуется из элементов, обладающих некоторыми свойствами и находящихся в некоторых отношениях между собой или с элементами других множеств.

Н. Бурбаки