Лекция №6

Тема: Булева алгебра. Функции двух переменных.

Содержание лекции:

1. Функции двух переменных.
2. Таблица функций двух переменных.
3. Булево пространство.
4. Свойства функций алгебры логики.
5. Понятия формулы в алгебре логики.
6. Реализация булевых функций формулами.

Далее представлены функции двух переменных. Из представленных 16 функций, 6 функций

$$f_{16}(a,b) = 0, f_{11}(a,b) = a, f_{10}(a,b) = b,$$
$$f_{12}(a,b) = \bar{a}, f_{14}(a,b) = \bar{b}, f_{15}(a,b) = 1$$

Являются константами или функциями одного аргумента. Остальные 10 функций зависят от двух аргументов и имеют свои общепринятые обозначения. Рассмотреть таким же образом все функции, зависящие от тех трёх аргументов трудно, так как их число составляет $2^{2^3} = 256$.

Функция $f_1(a,b)$ – конъюнкция (логическое умножение) истина тогда, когда a и b истины. Конъюнкцию называют также функцией «И»; условно обозначают $f_1(a,b)$=a*b=a&b=$a \wedge b$.

Функция $f_2(a,b)$ – дизъюнкция (логическое сложение) истина тогда, когда истинны a, или b, или обе переменные.

Дизъюнкцию часто называют также функцией «ИЛИ» и условно обозначают так: $f_2(a,b)$=a+b=$a \vee b$.

Функция $f_6(a,b)$ называется функцией сложения по модулю 2 (функцией неравнозначности или разноимённости) и является истинной, когда истинны или a или b в отдельности. Условное обозначение этой функции $f_6(a,b)$=$a \oplus b = a \cong b$.

Обозначения функции	Наименование функции	a	0	0	1	1	Примечания	Сохраняет 0	Сохраняет 1	Самодвойственная	Монотонная	Линейная
		b	0	1	0	1						
	Конъюнкция (логическое умножение)		0	0	0	1		X	X		X	
	Дизъюнкция (логическое сложение)		0	1	1	1		X	X		X	
	Импликация от a к b		1	1	0	1			X			
	Обратная импликация от a к b		1	0	1	1			X			
	Равнозначность		1	0	0	1			X			X
	Неравнозначность (сумма по модулю 2)		0	1	1	0		X				X
	Функция Шеффера (инверсия конъюнкции)		1	1	1	0	Универсальная					
	Функция Пирса (инверсия дизъюнкции)		1	0	0	0	Универсальная					
	Инверсия импликации (функция запрета по b)		0	0	1	0		X				
	Инвер. обрат. Импликации (фун. запрета по a		0	1	0	0		X				
	Повторение a (переменная a)		0	0	1	1	Тривиальная	X	X	X	X	X
	Инверсия a (функция НЕ)		1	1	0	0				X		X
	Повторение b (переменная b)		0	1		1	Тривиальная	X	X	X	X	X
	Инверсия b (функция НЕ)		1	0	1	0				X		X
	Единичная функция (константа 1)		1	1	1	1	Тривиальная		X		X	X
	Нулевая функция (константа 0)		0	0	0	0	Тривиальная	X			X	X

Функция Шеффера (штрих Шеффера) – функция $f_7(a,b)$, которая ложна только тогда, когда a и b истинны. Условное обозначение Шеффера: $f_7(a,b) = a \overline{\wedge} b = a/b$.

Немецкий математик Д. Шеффер на основе этой функции создал алгебру, названную алгеброй Шеффера. Функция $f_7(a,b)$ является универсальной функцией.

Функция (стрелка) Пирса (Вебба) – функция $f_8(a,b)$, которая истинна только тогда, когда a и b ложны. Условное обозначение этой функции $f_8(a,b) = a \overline{\vee} b = a \downarrow b$.

Математики Ч. Пирс и Д Вебб создали алгебру, названную алгеброй Пирса (Вебба). Функция $f_8(a,b)$ является также универсальной функцией.

Импликация – функция $f_3(a,b)$, которая ложна тогда и только тогда, когда a истинна и b ложна. Условное обозначение: $f_3(a,b) = a \rightarrow b$.

Булево пространство

Булевым пространством называется множество всех наборов – булевых векторов: М={Х}.

Вместо полного перечисления термов используют номера термов наборов, для которых функция принимает единичные значения. Например:

$$f(x_1, x_2, x_3) = \bigvee_1^3 F(1,4,7),$$

что означает, что функция принимает единичные значения на наборах 1,4 и 7.

0	0	0	0	0
1	0	0	1	1
2	0	1	0	0
3	0	1	1	0
4	1	0	0	1
5	1	0	1	0
6	1	1	0	0
7	1	1	1	1

Упорядоченную совокупность двоичных переменных $x_1, x_2, \dots, x_n$ можно рассматривать как некоторый переменный вектор Х=($x_1, x_2, \dots, x_n$), принимающий значение из множества М всех постоянных n-компонентных булевых векторов. Совокупность значений вектора Х, на которых булева функция принимает значение «1», обозначим через M^1, А совокупность значений, на которых функция обращается в «0» - через M^0. Очевидно, что $\text{M}^1 \cap \text{M}^0$(для полностью определённой булевой функции),

$$f_1(x_1, x_2, \dots, x_n) \in \text{M}^1, f_1(x_1, x_2, \dots, x_n) \in \text{M}^0.$$

Перечисление этих элементов можно осуществить с помощью булевой матрицы, каждая строка которой задаёт один из элементов множества M^1. Например, функция $f_1(x_1, x_2, x_3, x_4)$ принимает значение «1» на трёх кортежах. Булева матрица имеет вид:

$$\|\text{M}^1 \in \text{X}\| = \begin{vmatrix} 0 & 0 & 1 & 1 \\ 1 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 1 & 1 & 0 \end{vmatrix}$$

$$-\text{кортежи, на которых функция принимает значение "1"}$$

Свойства функций алгебры логики

Определение: Функция f$(x_1, x_2, \dots, x_n)$ зависит существенным образом от аргумента x_i, если существуют такие значения $\lambda_1, \lambda_2, \dots, \lambda_n$, переменных $x_{i1}, x_{i2}, \dots, x_{in}$ что $f(\lambda_1, \lambda_2, \lambda_{i-1}, 0, \lambda_{i1}, \dots, \lambda_n) \neq f(\lambda_1, \lambda_2, \lambda_{i-1}, 1, \lambda_{i1}, \dots, \lambda_n)$.

Переменная x_i называется существенной. Если x_i не является существенной переменной, то она называется несущественной или фиктивной.

Определение: Функции f_1 и f_2 называются равными, если функцию f_2 можно получить из f_1 путём добавления и изъятия фиктивных аргументов.

Можно считать, что, если задана функция f_1, то и задана функция f_2.

Существуют два типа функций , которые не имеют существенных переменных:

- Функция тождественный «0» (константа «0»);
- Функция тождественная «1» (константа «1»).

Константы «1» и «0» можно рассматривать как функции от пустого множества переменных.

Понятие формулы в алгебре логики

Формула – комбинация математических знаков, выражающая какое-то утверждение – алгебраическая формула.

$a^2+b^2=c^2$ - связь длины «с» гипотенузы прямоугольного треугольника с его катетами a и b.

Как и в элементарной алгебре, в алгебре логики, исходя из «элементарных» функций, можно строить формулы. Пусть L – некоторое (не обязательно конечное) подмножество функций из P,L⊂P. Каждая функция $f_1(x_1, x_2, \dots, x_m)$ из L($f \in L$) называется формулой.

Пусть $f_0(x_1, x_2, \dots, x_m)$ – функция из $L(f_0 \in L)$ и $A_1, A_2, \dots, A_m$ – выражения, являющиеся либо формулами, либо символами переменных из U($A_i \in U$). Тогда выражение $f_0(A_1, A_2, \dots, A_m)$ также называется формулой.

Всякое сложное высказывание, составленное из некоторых исходных высказываний посредством применения логических операций (из 16 функций – 14, кроме «0» и «1») также называется формулой алгебры логики.

При образовании (построении) формул используются знаки (символы) трёх категорий:

- *Символы первой категории обозначают переменные: x,y,a,b,c,...*
- *Символы логических операций* $(\wedge), (\vee), (\oplus), () \to$ *и т.д.*
- *Пары символов (),[], {} – скобки.*

Пример формулы: Пусть L – множество «элементарных» функций. Следующие выражения являются формулами:

1. $\{[(x_1x_2)+x_1]+x_2\}$
2. $[\overline{x_1}(x_1+x_3)]$
3. $\overline{\{x_1 \vee [(x_2 \to x_3)(x_3 \to x_2)]\}}$

А эти выражения не являются формулами:

1. (A*B(x*y – не закрыты скобки;
2. $\wedge$ B $\wedge$ y – отсутствует символ;
3. A $\to$ B x $\to$ y – операция импликации обязательно должна быть заключена в скобки.

На практике разделяют скобки на внутренние и внешние. Формула $F = A \wedge B$ без скобок в силу определения формулой не является. Однако для сокращения записи внешние скобки зачастую опускают и данное выражение определяется как формула.

Реализация функций формулами

Определение: Пусть F – произвольная формула. Формулы, которые использовались для её построения, называются подформулами формулы F.

Определение: Если формула $F(x_1, x_2, \dots, x_n)$ описывает функцию $f(x_1, x_2, \dots, x_n)$, т.е. формула F для переменных $x_1, x_2, \dots, x_n$ где $f \in L$, то говорят, что формуле $F(x_1, x_2, \dots, x_n)$ сопоставлена функция $f(x_1, x_2, \dots, x_n)$ или формуле F соответствует функция *f*. Если функция f соответствует формуле F , то говорят также, что формула F реализует функцию f. Поскольку функции рассматриваются с точностью до фиктивных переменных, мы считаем, что формула F реализует и любую функцию, равную f.

Если функция $f(x_1, x_2, \dots, x_n)$, реализуемая формулой $F(x_1, x_2, \dots, x_n)$ имеет несущественную переменную x_{i} , то переменную x_{i} можно удалить, заменив функцию f равной ей функцией f’, а формулу F – формулой F’, получающейся из F в результате отождествления переменной x_{i} с любой из оставшихся переменных. Формула F’ является формулой, реализующей функцию f’.

Основное содержание лекции.

1. Функции двух переменных играют важнейшую роль в алгебре логики, являются основной для построения компьютеризированных систем и технологий.
2. На основе функций 2х переменных строятся формулы.
3. Функции 2х переменных – это «кирпичи здания вычислительной техники».