Лекция №9

Тема: Функционально полные наборы булевых функций.

Содержание:

1. Универсальность и полнота набора функций И, ИЛИ, НЕ.
2. Понятие «функционально полной системы».
3. Примеры функционально полных систем.
4. Доказательство полноты систем.
5. Установление функциональной полноты систем.

Универсальность и полнота набора функций И, ИЛИ, НЕ.

Теорема: Любая функция алгебры логики может быть выражена в виде формулы через отрицание, конъюнкцию и дизъюнкцию.

Доказательство:

1. Пусть $f(x_1, x_2, \dots, x_n) \equiv 0$. Тогда очевидно, что $f(x_1, x_2, \dots, x_n) = x_\text{i} * \overline{x_\text{i}}$.
2. Пусть $f(x_1, x_2, \dots, x_n) \not\equiv 0$ и $f(x_1, x_2, \dots, x_n) = 1$ тогда $f(x_1, \dots, x_n) = x_\text{i} + \overline{x_\text{i}}$.

Действительно, функция выражается в виде формулы через отрицание, конъюнкцию и дизъюнкцию: $\{(x_\text{i} * \overline{x_\text{i}}); (x_\text{i} + \overline{x_\text{i}}); \overline{x_\text{i}}\}$.

Понятия «функционально полной системы».

Определение. Система функций $\{f_1, f_2, \ldots, f_\text{x}\}$ из $P(f \in P)$ является функционально полной, если любая булева функция может быть представлена в виде формулы через функции этой системы.

Определение. Система функций $f(x_1, x_2, \ldots, x_n) \in \text{P}$, суперпозицией которых может быть представлена любая функция из некоторого множества булевых функций, называется функционально полной. Если в такой системе допускаются константы 0 и 1, то её называют ослаблено функционально полной. Функционально полная система функций образует базис в логическом пространстве. Система функций называется минимально полным базисом, если удаление из неё любой функции превращает эту систему в неполную.

Примеры функционально полных систем. (1)

1. Система Р – множество всех булевых функций двух переменных является полной системой. Количество функций $N_n = 2^{2^n}$. Так все 16 функций для двух переменных образуют полную систему.
2. Система функций $\{\bar{x}; (x_1 * x_2); (x_1 + x_2)\}$ представляет собой полную систему. Не каждая система является полной, например, система $\{0,1\}$ – неполная.

Доказательство полноты системы.

Теорема. Даны две системы функций:

$$\mathrm{A} = \{f_1, f_2, \dots, f_s\} \tag{1}$$

$$\mathrm{B} = \{g_1, g_2, \dots, g_s\} \tag{2}$$

причём система (1) полная и каждая её функция выражается в виде формулы через функции системы (2). Тогда система (2) также является полной.

Доказательство. Пусть h - произвольная система функций, $h \in P$. В силу полноты системы (1) h можно выразить через:

$$h = C(f_1, f_2, \dots, f_s).$$

По условию $$f_1 = C_1(g_1, g_2, \dots, g_s)$$

$$f_2 = C_2(g_1, g_2, \dots, g_s)$$

$$\dots$$

$$f_s = C_s(g_1, g_2, \dots, g_s)$$

Поэтому в формуле $h = C(f_1, f_2, \dots, f_s)$ можно исключить f_j, т.е.

$$C(f_1, f_2, \dots, f_s) = \mathrm{C}(C_1(g_1, g_2, \dots), C_2(g_1, g_2, \dots), \dots C_s(g_1, g_2, \dots, g_s))$$

Это выражение определяет формулу (2) со строением C':

$$\mathrm{C}(C_1(g_1, g_2, \dots), C_2(g_1, g_2, \dots), \dots C_s(g_1, g_2, \dots, g_s)) = \mathrm{C}'(g_1, g_2, \dots, g_s)$$

Следовательно:

$$h = \mathrm{C}'(g_1, g_2, \dots, g_s).$$

Теорема доказана: В принадлежит к полным системам.

Установление функциональной полноты систем.

Установим (докажем) полноту ряда системы.

3.Система функций $\{\bar{x}, (x_1 * x_2)\}$. Для доказательства возьмём за полную систему (1), а за систему (2) систему из нашего примера. Используем тождество $x_1 + x_2 = \overline{\overline{x_1} * \overline{x_2}}$, которое вытекает из тождеств элементарных функций, т.е. функцию $(x_1 + x_2)$ можно всегда выразить через логическое произведение $x_1 * x_2$, т.е. функцию $(x_1 + x_2)$ можно убрать из перечня полных систем.

4.Система $\{\bar{x}, (x_1 + x_2)\}$ доказывается аналогично предыдущему, т.е. $x_1 * x_2 = \overline{\overline{x_1} + \overline{x_2}}$.

5.Система $\{0,1,(x_1 * x_2), x_1 + x_2\}$ является полной.

Доказательство. За систему (1) возьмём систему из примера 3, а за (2) систему из нашего примера. Имеем $x_1 + 1 = \overline{x_1}$.

6.Функция Шеффера $\overline{x_1 * x_2}$.

7.Функция стрелка Пирса $\overline{x_1 + x_2}$.

Краткое содержание лекции

Понятие функционально полной системы является чрезвычайно важным, так как позволяет определять наборы функций, с помощью которых можно (логично) «строить», т.е. создавать ЭВМ, системы комплекты, сети, т.е. это так называемые «строительные кирпичи здания компьютеризированного мира».

Функционально полные наборы позволяют представлять любые переключательные функции.