Теория массового обслуживания

Рекомендуемая литература

1. Е.С. Вентцель. Исследование операций. М.: “Высшая школа”, 2001.
2. Г.П. Фомин. Системы и модели массового обслуживания в коммерческой деятельности. М.: “Финансы и статистика”, 2000.
3. В.П. Чернов, В.Б. Ивановский. Теория массового обслуживания. М.: Инфра-М, 2000.
4. Е.С. Вентцель., Л.А. Овчаров. Задачи и упражнения по теории вероятностей. М.: “Высшая школа”, 2000.
5. Е.С. Вентцель. Теория вероятностей. М.: Наука, 1969.
6. Б.В. Гвиденко., Коваленко И.Н. Введение в теорию массового обслуживания. М.: Наука, 1987.
7. Л. Клейнрок. Теория массового обслуживания. М.: “Машиностроение”, 1969.
8. Л.А. Овчаров. Прикладные задачи теории массового обслуживания М.: “Машиностроение”, 1969.
9.Т.Л. Саати. Элементы теории массового обслуживания. М.: Издательство Московского университета, 1973.

Основные понятия и классификация систем массового обслуживания

Простейший поток заявок

Заявкой (или требованием) называется спрос на удовлетворение какой либо потребности (далее потребности предполагаются однотипными). Выполнение заявки называется ***обслуживанием заявки.***

Системой массового обслуживания (СМО) называется любая система для выполнения заявок, поступающих в неё в случайные моменты времени.

Поступление заявки в СМО называется ***событием.***

Последовательность событий, заключающихся в поступлении заявок в СМО, называется ***входящим потоком заявок.***

Основные понятия и классификация систем массового обслуживания

Поток заявок называется ***простейшим, если он удовлетворяет следующим*** условиям:

1) ***отсутствие последействия, т.е. заявки поступают независимо друг от друга;***

2) ***стационарность, т.е. вероятность поступления данного числа заявок на любом*** временно́м отрезке [*t1, t2]* *зависит лишь от величины этого отрезка и не зависит от* значения *t1, что позволяет говорить о среднем числе заявок за единицу времени, λ,* называемом ***интенсивностью потока заявок;***

3) ***ординарность, т.е. в любой момент времени в СМО поступает лишь одна заявка,*** а поступление одновременно двух и более заявок пренебрежимо мало.

Основные понятия и классификация систем массового обслуживания

Для простейшего потока вероятность *pi(t) поступления в СМО ровно i заявок за* время *t вычисляется по формуле*

$$p_i(t) = \frac{(\lambda t)^i}{i!} e^{-\lambda t},$$

т.е. вероятности распределены по закону Пуассона с параметром λt*. По этой* причине простейший поток называется также ***пуассоновским потоком.***
Функция распределения *F(t) случайного интервала времени T между двумя* последовательными заявками по определению равна $F(t) = P(T < t)$. *Но* $P(T<t)=1 - P(T\geq t)$, где $P(T \geq t)$ *– вероятность того, что следующая после последней заявки поступит в СМО* по истечении времени *t, т.е. за время t в СМО не поступит ни одна заявка.*

Основные понятия и классификация систем массового обслуживания

Вероятность этого события находится при *i = 0*

$$P(T \geq t) = p_0(t) = e^{-\lambda t}$$

$$F(t) = 1 - e^{-\lambda t}.$$

Плотность вероятности f(t) случайной величины T определяется формулой $f(t) \equiv F_t'(t) = \lambda e^{-\lambda t}$,

а математическое ожидание, дисперсия и среднее квадратическое отклонение случайной величины T равны соответственно

$$M(T) = \frac{1}{\lambda}; \quad D(T) = \frac{1}{\lambda^2}; \quad \sigma(T) = \frac{1}{\lambda}.$$

Пример. В справочное бюро обращается в среднем 2 человека за 10 минут. Найти вероятность того, что за 30 минут за справкой обратится: а) 4 человека, б) не менее 3-х человек.

Решение. Интенсивность потока заявок равна *λ = 2/10 мин = 0,2[мин-1]. Для* решения используем формулу (4.1), где полагаем *t = T = 30 минут; для пункта (а) i = 4,*
для пункта (б) *i = 3, 4, 5,…* .

$$\text{а)}\ P_4(T) = \frac{(0,2\cdot 30)^4}{4!}e^{-0,2\cdot 30} = \frac{6^4}{24}e^{-6} \approx 0,134\ ;$$

б) при решении этого пункта целесообразно использовать противоположную вероятность:

$$P_{\geq 3}(T) = 1 - P_{<3}(T) = 1 - (P_0(T) + P_1(T) + P_2(T)) =$$

$$= 1 - (e^{-6} + \frac{6}{1!}e^{-6} + \frac{6^2}{2!}e^{-6}) \approx 1 - 0,062 = 0,938.$$

Пример. В приборе имеются два блока, работающих независимо друг от друга. Время безотказной работы определяется показательным законом. Среднее время безотказной работы 1-го блока – t1 = 2 года, 2-го – t2 = 1 год. Найти вероятность того, что за 1,5 года: а) не откажет ни один из блоков; б) откажет только 2-й блок; в) откажут оба блока.

Решение: В качестве события выступает неисправность какого-то блока. Вероятность p(i) (t) исправности i-го блока в течение времени t определяется формулой

$$p^{(1)}(t) = e^{-\lambda_1 t}, \quad p^{(2)}(t) = e^{-\lambda_2 t},$$

где $\lambda_1 = 1/t_1 = 0{,}5[\text{год}^{-1}]$, $\lambda_2 = 1/t_2 = 1[\text{год}^{-1}]$.

Вероятности исправности блоков по истечении времени t = T = 1,5 года будут равны соответственно

$$p^{(1)} = e^{-\lambda_1 T} = e^{-05\cdot 1,5} \approx 0,472,$$
$$p^{(2)} = e^{-\lambda_2 T} = e^{-1\cdot 1,5} \approx 0,223.$$

Вероятность того, что за время T i-й блок выйдет из строя, является противоположной вероятностью

$$\overline{p}^{(1)} = 1 - p^{(1)}(T) \approx 1 - 0,472 = 0,528,$$
$$\overline{p}^{(2)} = 1 - p^{(2)}(T) \approx 1 - 0,223 = 0,777.$$

Обозначим через A, B, C события, фигурирующие в пунктах (а), (б), (в) соответственно и учитывая, что блоки работают независимо друг от друга, найдём:

а) $p(A) = p^{(1)}(T) \cdot p^{(2)}(T) \approx 0,472 \cdot 0,223 \approx 0,1;$

б) $p(B) = p^{(1)}(T) \cdot \overline{p}^{(2)}(T) \approx 0,472 \cdot 0,777 \approx 0,367;$

в) $p(C) = \overline{p}^{(1)}(T) \cdot \overline{p}^{(2)}(T) \approx 0,528 \cdot 0,777 \approx 0,41.$

Каналом обслуживания называется устройство в СМО, обслуживающее заявку. СМО, содержащее один канал обслуживания, называется ***одноканальной***, а содержащее более одного канала обслуживания – ***многоканальной*** (например, 3 кассы на вокзале).

Если заявка, поступающая в СМО, может получить отказ в обслуживании (в силу занятости всех каналов обслуживания) и в случае отказа вынуждена покинуть СМО, то такая СМО называется СМО ***с отказами*** (примером такой СМО может служить АТС). Если в случае отказа в обслуживании заявки могут вставать в очередь, то такие СМО называются СМО ***с очередью*** (или с ожиданием). При этом различают СМО с ограниченной и неограниченной очередью.

Различают СМО открытого и замкнутого типа. В СМО ***открытого типа*** поток заявок не зависит от СМО (билетные кассы, очередь в булочной). В СМО ***замкнутого типа*** обслуживается ограниченный круг клиентов, а число заявок может существенно зависеть от состояния СМО (например, бригада слесарей – наладчиков, обслуживающих станки на заводе). СМО могут также различаться по дисциплине обслуживания: обслуживаются ли заявки в порядке поступления, случайным образом или вне очереди (с приоритетом). СМО описываются некоторыми параметрами, которые характеризуют эффективность работы системы.

n – число каналов в СМО;

λ – интенсивность поступления в СМО заявок;

μ– интенсивность обслуживания заявок;

$\rho = \lambda/\mu$ – коэффициент загрузки СМО;

m – число мест в очереди;

Различают СМО открытого и замкнутого типа. В СМО ***открытого типа*** поток заявок не зависит от СМО (билетные кассы, очередь в булочной). В СМО ***замкнутого типа*** обслуживается ограниченный круг клиентов, а число заявок может существенно зависеть от состояния СМО (например, бригада слесарей – наладчиков, обслуживающих станки на заводе). СМО могут также различаться по дисциплине обслуживания: обслуживаются ли заявки в порядке поступления, случайным образом или вне очереди (с приоритетом). СМО описываются некоторыми параметрами, которые характеризуют эффективность работы системы.

n – число каналов в СМО;

λ – интенсивность поступления в СМО заявок;

μ– интенсивность обслуживания заявок;

$\rho = \lambda/\mu$ – коэффициент загрузки СМО;

m – число мест в очереди;

$p_{отк}$- вероятность отказа в обслуживании поступившей в СМО заявки;

$Q \equiv p_{обс}$ - вероятность обслуживания поступившей в СМО заявки (относительная пропускная способность СМО);

$Q = p_{обс} = 1 - p_{отк}$;

A – среднее число заявок, обслуживаемых в СМО в единицу времени (абсолютная пропускная способность СМО) $A = \lambda \cdot Q$;

Lсмо - среднее число заявок, находящихся в СМО;

$\overline{n}_з$- среднее число каналов в СМО, занятых обслуживанием заявок.

Lобс - среднее число заявок, обслуживаемых СМО за единицу времени. Величина $\overline{n}_з$ определяется как математическое ожидание случайного числа занятых обслуживанием n каналов:

$$\overline{n}_з = M(n) = \sum_{k=1}^{n} k \cdot p_k + \sum_{i=1}^{m} n \cdot p_{n+i},$$

где p_k- вероятность системы находиться в S_k состоянии;

$K_з = \overline{n}_з / n$ - ***коэффициент занятости каналов;***

$t_{ож}$ - ***среднее время ожидания*** (обслуживания) заявки в очереди,

$v = 1/t_{ож}$ - ***интенсивность потока ухода*** заявок из очереди.

$L_{оч}$- среднее число заявок в очереди (если очередь есть); определяется как математическое ожидание случайной величины m – числа заявок, состоящих в очереди

$$L_{оч.} = M(m) = \sum_{i=1}^{m} i \cdot p_{n+i},$$

где p_{n+i} - вероятность нахождения в очереди i заявок;

$T_{смо} \equiv \bar{t}_{смо}$ - среднее время пребывания заявки в СМО;

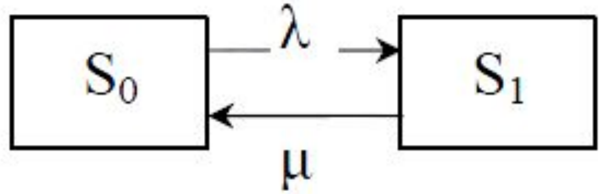
$T_{оч.} \equiv \bar{t}_{оч.}$ - среднее время пребывания заявки в очереди (если есть очередь); Для открытых СМО справедливы соотношения

$$\bar{t}_{смо} = \frac{L_{смо}}{\lambda} = \frac{L_{оч.}}{\lambda} + \frac{Q}{\mu},$$

$$\bar{t}_{оч.} = \frac{L_{оч.}}{\lambda},$$

Одноканальная СМО с отказами

Размеченный граф состояний одноканальной СМО



Здесь λ и μ – интенсивность потока заявок и выполнения заявок соответственно. Состояние системы S_0 обозначает. что канал свободен, а S_1 - что канал занят обслуживанием
Система дифференциальных уравнений Колмогорова для такой СМО имеет вид

$$\begin{cases} \dfrac{dp_0(t)}{dt} = -\lambda p_0(t) + \mu p_1(t), \\ \dfrac{dp_1(t)}{dt} = \lambda p_0(t) - \mu p_1(t), \\ p_0(t) + p_1(t) = 1, \end{cases}$$

где $p_0(t)$ и $p_1(t)$ - вероятности нахождения СМО в состояниях S_0 и S_1 соответственно.

Одноканальная СМО с отказами

Уравнения для финальных вероятностей p_0 и p_1 получим, приравнивая нулю производные в первых двух уравнениях системы. В результате получим:

$$p_0 = \frac{\mu}{\mu + \lambda} = \frac{1}{1 + \rho},$$

$$p_1 = \frac{\lambda}{\mu + \lambda} = \frac{\rho}{1 + \rho}.$$

Вероятность p_0 по своему смыслу есть вероятность обслуживания заявки $p_{обс}$, т.к. канал является свободным, а вероятность p_1 по своему смыслу является вероятностью отказа в обслуживании поступающей в СМО заявки $p_{отк}$, т.к. канал занят обслуживанием

Одноканальная СМО с отказами

Пример. Секретарю директора завода поступает в среднем 1,2 телефонных вызовов в минуту. Средняя продолжительность разговора составляет 2 минуты. Найти основные характеристики СМО и оценить эффективность её работы.

Решение: По условию $\lambda = 1{,}2\ (\text{мин})^{-1}$, $\mu = 2(\text{мин})^{-1}$, откуда $\rho = \lambda/\mu = 0{,}6$.

$$p_{обс.} = p_0 = \frac{1}{1+\rho} = 0{,}625\,; \quad p_{отк.} = p_1 = \frac{\rho}{1+\rho} = 0{,}375\,.$$

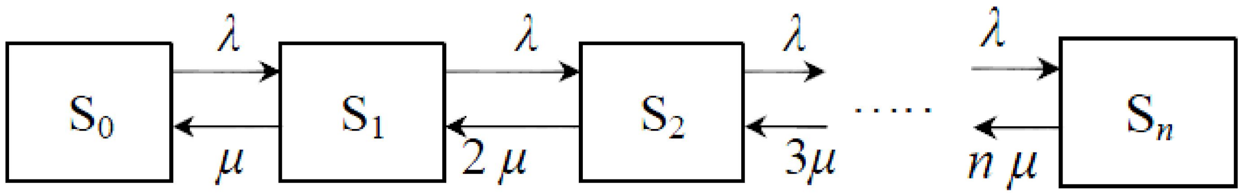
Таким образом, обслуживается лишь 62,5% звонков, что нельзя считать удовлетворительным. Абсолютная пропускная способность СМО

$A = \lambda Q = \lambda p_{обс} = 1{,}2 \cdot 0{,}625(\text{мин})^{-1} = 0{,}75(\text{мин})^{-1}$,

т.е. в среднем обслуживается 0,75 звонка в минуту.

Многоканальная СМО с отказами

Пусть СМО содержит n каналов, интенсивность входящего потока заявок равна λ, а интенсивность обслуживания заявки каждым каналом равна μ. Размеченный граф состояний системы



Состояние S_0 означает, что все каналы свободны, состояние S_k ($k=1,\overline{n}$) означает, что обслуживанием заявок заняты k каналов. Переход из одного состояния в другое соседнее правое происходит скачкообразно под воздействием входящего потока заявок интенсивностью λ независимо от числа работающих каналов (верхние стрелки). Для перехода системы из одного состояния в соседнее левое неважно, какой именно канал освободится. Величина kμ характеризует интенсивность обслуживания заявок при работе в СМО k каналов (нижние стрелки).

Многоканальная СМО с отказами

Многоканальная СМО с отказами

$$\begin{cases} \lambda_i = \lambda, & (i = \overline{0, n-1}); \\ \mu_k = (k+1)\mu, & (k = \overline{0, n-1}). \end{cases}$$

Формулы для финальных вероятностей

$$p_0 = \left(1 + \frac{\rho}{1!} + \frac{\rho^2}{2!} + \ldots + \frac{\rho^n}{n!}\right)^{-1};$$

$$p_k = \frac{\rho^k}{k!} \cdot p_0, \qquad (k = \overline{1, n})$$

формулы Эрланга – основателя теории массового обслуживания. Вероятность отказа в обслуживании заявки $p_{отк}$ равна вероятности того, что все каналы заняты, т.е. система находится в состоянии S_n.

$$p_{отк} = p_n = \frac{\rho^n}{n!} \cdot p_0.$$

Многоканальная СМО с отказами

Относительная пропускная способность СМО

$$Q = p_{обс} = 1 - p_{отк} = 1 - \frac{\rho^n}{n!} \cdot p_0 .$$

Абсолютная пропускная способность

$$A = \lambda \cdot Q = \lambda \cdot \left(1 - \frac{\rho^n}{n!} \cdot p_0\right).$$

Так как каждый занятый канал в единицу времени обслуживает в среднем μ заявок, то $\overline{n}_{з}$ можно найти по формуле:

$$\overline{n}_{з} = \frac{A}{\mu} = \rho\left(1 - \frac{\rho^n}{n!} p_0\right).$$

Пример Найти оптимальное число телефонных номеров на предприятии, если заявки на переговоры поступают с интенсивностью 1,2 заявки в минуту, а средняя продолжительность разговора по телефону составляет $\overline{t_{обс}} = 2$ минуты. Найти также вероятность того, что в СМО за 3 минуты поступит: а) точно 2 заявки, б) не более 2-х заявок.

Решение. Имеем: $\lambda = 1{,}2$ мин$^{-1}$, $\mu = 1/t = 0{,}5$ мин$^{-1}$, $\rho = \lambda/\mu = 2{,}4$. Оптимальное число каналов n неизвестно. Используя формулы (6.2) – (6.7) найдём характеристики СМО при различных значениях n и заполним таблицу .

Таблица

n	1	2	3	4	5	6
p_0	0,294	0,159	0,116	0,1	0,094	0,092
$p_{отк}$	0,706	0,847	0,677	0,406	0,195	0,024
$p_{обс}$	0,294	0,153	0,323	0,594	0,805	0,976
$\overline{n_3}$	0,706	0,367	0,775	1,426	1,932	2,342
K_3	0,706	0,184	0,258	0,357	0,386	0,391
A [мин$^{-1}$]	0,353	0,184	0,388	0,713	0,966	1,171

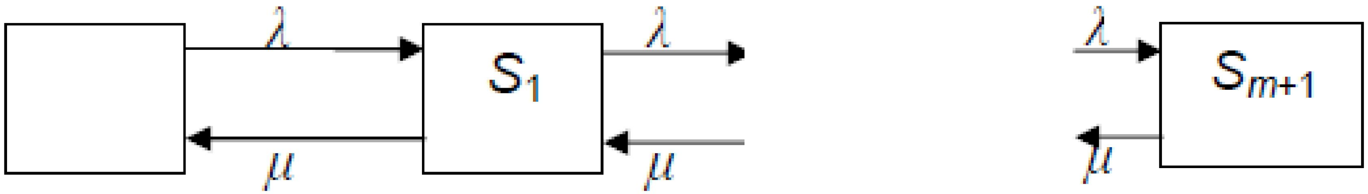
Оптимальным числом телефонных номеров можно считать $n = 6$, когда выполняется 97,6% заявок. При этом за каждую минуту обслуживается в среднем 1,171 заявки. Для решения 2-го и 3-го пунктов задачи воспользуемся формулой (4.1). Имеем:

а) $p_2(3) = \dfrac{(1{,}2 \cdot 3)^2}{2!} e^{-1{,}2 \cdot 3} \approx 0{,}177$,

б) $p_{\le 2}(3) = p_0(3) + p_1(3) + p_2(3) = \left(1 + \dfrac{1{,}2 \cdot 3}{1!} + \dfrac{(1{,}2 \cdot 3)^2}{2!}\right) e^{-1{,}2 \cdot 3} \approx 0{,}03$.

Одноканальная СМО с ограниченной длиной очереди

В СМО с ограниченной очередью число мест m в очереди ограничено. Следовательно, заявка, поступившая в момент времени, когда все места в очереди заняты, отклоняется и покидает СМО.



Состояния СМО представляются следующим образом:

S_0 - канал обслуживания свободен,

S_1 – канал обслуживания занят, но очереди нет,

S_2 – канал обслуживания занят, в очереди одна заявка,

S_{k+1} – канал обслуживания занят, в очереди k заявок,

S_{m+1} – канал обслуживания занят, все m мест в очереди заняты.

Поступившая в СМО заявка получает отказ в обслуживании, если СМО находится в состоянии S_{m+1}, т.е. вероятность отказа в обслуживании заявки равна

$$p_{\text{отк}} = p_{m+1} = \rho^{m+1} p_0.$$

Относительная пропускная способность СМО равна

$$Q = p_{\text{обс}} = 1 - p_{\text{отк}} = \rho^{m+1} p_0,$$

а абсолютная пропускная способность равна

$$A = \lambda \cdot Q = \lambda \cdot (1 - \rho^{m+1} p_0).$$

Среднее число заявок, стоящих в очереди $L_{\text{оч}}$, находится по формуле

$$L_{\text{оч}} = 1 \cdot p_2 + 2 \cdot p_3 + \ldots + m \cdot p_{m+1}$$

и может быть записано в виде

$$L_{\text{оч}} = \rho^2 \cdot \frac{1 - \rho^m [m \cdot (1-\rho) + 1]}{(1-\rho)^2} \cdot p_0.$$

При $\rho = 1$ формула принимает вид

$$L'_{\text{оч}} = \frac{m(m+1)}{2(m+2)}, \quad (\rho = 1).$$

$L_{\text{обс}}$- среднее число заявок, находящихся в СМО, находится по формуле

$$L_{\text{обс}} = 1 \cdot p_1 + 1 \cdot p_2 + 2 \cdot p_3 + \ldots + m \cdot p_{m+1} = p_1 + L_{\text{оч}}$$

и может быть записано в виде

$$L_{\text{обс}} = \rho \left\{ 1 + \rho \cdot \frac{1 - \rho^m [m(1-\rho) + 1]}{(1-\rho)^2} \right\} p_0.$$

При $\rho = 1$, из получим:

$$L'_{\text{обс}} = \frac{m^2 + m + 2}{2(m+2)}, \quad (\rho = 1).$$

Пример Магазин посещает в среднем 90 человек в час. Имеющийся один кассир обслуживает в среднем одного покупателя в минуту. Очередь в зал обслуживания ограничена 5 покупателями. Оценить эффективность работы СМО.

Решение. Имеем: $\lambda = 90$ час$^{-1}$ = 1,5 мин$^{-1}$, $\mu = 1$ мин$^{-1}$, $\rho = \lambda/\mu = 1{,}5$, $m = 5$. По находим p_0 и $p_{отк}$:

$$p_0 = \frac{1-\rho}{1-\rho^{m+2}} = \frac{1-1{,}5}{1-(1{,}5)^7} = 0{,}031,$$

$$p_{отк} = \rho^{m+1} \cdot p_0 \approx (1{,}5)^6 \cdot 0{,}031 \approx 0{,}354,$$

т.е. 35,4% покупателей получают отказ в обслуживании, что недопустимо много. Среднее число людей, стоящих в очереди, находим по формуле

$$L_{оч} \approx (1{,}5)^2 \cdot \frac{1-(1{,}5)^5\left[5(1-1{,}5)+1\right]}{(1-1{,}5)^2} \cdot 0{,}031 \approx 3{,}457.$$

Среднее время пребывания в очереди находим по формуле

$$\overline{t_{оч}} = \frac{L_{оч}}{\lambda} = \frac{3{,}457}{1{,}5}\ мин \approx 2{,}3\ мин,$$

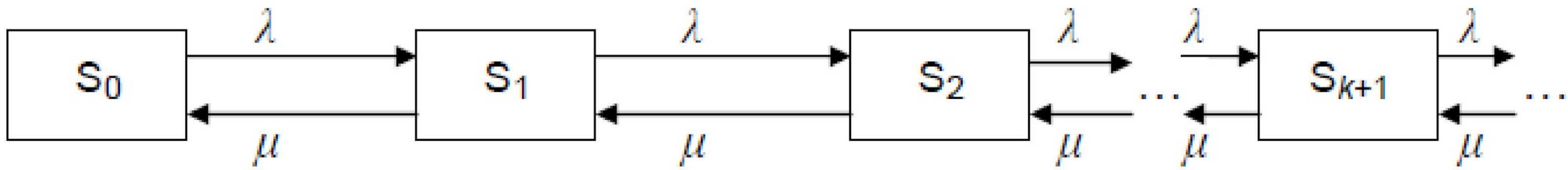
т.е. $\overline{t_{оч}}$ не очень большое. Увеличение очереди до $m = 10$ даёт

$$p_0 \approx 0{,}0039,\ p_{отк} \approx 0{,}0336,$$

т.е. не приводит к заметному уменьшению отказов в обслуживании. Вывод: необходимо посадить ещё одного кассира, либо уменьшить время обслуживания каждого покупателя.

Одноканальная СМО с неограниченной очередью

Примером такой СМО может служить директор предприятия, вынужденный рано или поздно решать вопросы, относящиеся к его компетенции, или, например, очередь в булочной с одним кассиром.



Все характеристики такой СМО можно получить полагая в них $m \to \infty$. При этом необходимо различать два существенно разных случая: а) $\rho \geq 1$; б) $\rho < 1$. В первом случае $p_0 = 0$ и $p_k = 0$ (при всех конечных значениях k). Это означает, что при $t \to \infty$ очередь неограниченно возрастает, т.е. этот случай практического интереса не представляет. Рассмотрим случай, когда $\rho < 1$. При этом

$p_0 = 1 - \rho$, $p_k = \rho^k \cdot (1 - \rho)$, $k = 1, 2, \ldots$

Поскольку в СМО отсутствует ограничение на длину очереди, то любая заявка может быть обслужена, т.е. относительная пропускная способность равна

$Q = p_{обс} = 1$.

Абсолютная пропускная способность равна

$A = \lambda \cdot Q = \lambda$.

Среднее число заявок в очереди получим из формулы при $m \to \infty$

$$L_{оч} = \frac{\rho^2}{1-\rho}.$$

Среднее число обслуживаемых заявок есть $L = \rho \cdot Q = \rho_{обс}$, а среднее число заявок, находящихся в СМО, равно

$$L_{смо} = L_{оч} + L_{обс} = \frac{\rho}{1-\rho}.$$

Пример В билетной кассе работает один кассир, обслуживающий в среднем двух покупателей за одну минуту. Каждый час в среднем приходят покупать билеты 90 посетителей. Провести анализ работы СМО.

Решение. Имеем: $\lambda = 90$ час$^{-1}$ $=1{,}5$ мин$^{-1}$, $\mu = 2$ мин$^{-1}$, $\rho = \lambda/\mu = 0{,}75$. По формуле найдём p_0

$$p_0 = 1 - \rho = 1 - 0{,}75 = 0{,}25,$$

т.е. 25% времени кассир не занимается продажей билетов. Средняя длина очереди равна

$$L_{оч} = \frac{\rho^2}{1-\rho} = \frac{(0{,}75)^2}{1-0{,}75} = 2{,}25 \text{ покупателя},$$

а среднее число покупателей, находящихся в СМО (т.е. у кассы), равно

$$L_{смо} = \frac{\rho}{1-\rho} = \frac{0{,}75}{1-0{,}75} = 3.$$

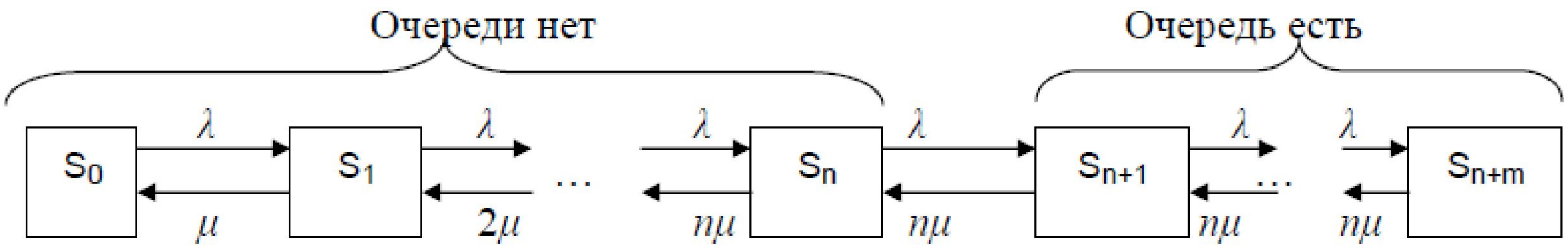
Среднее время нахождения покупателя в СМО найдём по формуле

$$\bar{t}_{смо} = \frac{L_{смо}}{\lambda} = \frac{3}{1{,}5\, мин^{-1}} = 2\, мин,$$

что вполне приемлемо.

Многоканальная СМО с ограниченной очередью

Пусть на вход СМО, имеющей n каналов обслуживания, поступает пуассоновский поток заявок с интенсивностью λ. Интенсивность обслуживания заявки каждым каналом равна μ, а максимальное число мест в очереди равно m.



S_0 - все каналы свободны, очереди нет;

S_l- заняты l каналов ($l = 1, n$), очереди нет;

S_{n+i}- заняты все n каналов, в очереди находится i заявок ($i = 1,m$).

Выражения для финальных вероятностей

$$p_0 = \left(1 + \frac{\rho}{1!} + \frac{\rho^2}{2!} + \ldots + \frac{\rho^n}{n!} + \frac{\rho^{n+1}}{n \cdot n!} + \frac{\rho^{n+2}}{n^2 \cdot n!} + \ldots + \frac{\rho^{n+m}}{n^m \cdot n!}\right)^{-1} =$$

$$= \left(1 + \frac{\rho}{1!} + \frac{\rho^2}{2!} + \ldots + \frac{\rho^n}{n!} + \frac{\rho^{n+1}}{n \cdot n!} \cdot \frac{1-(\rho/n)^m}{1-\rho/n}\right)^{-1};$$

$$p_k = \frac{\rho^x}{k}\rho_0,\ \left(k = \overline{1,n}\right); \qquad p_{n+1} = \frac{\rho^{n+1}}{n^i \cdot n!}p_0,\left(i = \overline{1,m}\right).$$

Образование очереди происходит, когда в момент поступления в СМО очередной заявки все n каналов заняты, т.е. когда в системе будет находиться либо n, либо n + 1,…, либо (n + m – 1)заявок. Так как эти события несовместимы, то вероятность образования очереди $p_{оч}$ равна сумме соответствующих вероятностей

$$p_{оч} = \sum_{i=0}^{m-1} p_{n+i} = \frac{\rho^n}{n!} \cdot \frac{1-(\rho/n)^m}{1-\rho/n} p_0.$$

Отказ в обслуживании заявки происходит, когда все m мест в очереди заняты, т.е.

$$p_{отк} = p_{n+m} = \frac{\rho^{n+m}}{n^m n!} p_0 .$$

Относительная пропускная способность равна

$$Q = p_{обс} = 1 - p_{отк} = 1 - \frac{\rho^{n+m}}{n^m n!} p_0 ,$$

Абсолютная пропускная способность

$$A = \lambda \cdot Q = \lambda \cdot \left(1 - \frac{\rho^{n+m}}{n^m \cdot n!} p_0\right).$$

Среднее число заявок, находящихся в очереди

$$L_{оч} = \sum_{i=1}^{m} i p_{n+i} = \frac{\rho^{n+1}}{n \cdot n!} \cdot \frac{1 - (\rho / n)^m \left[1 + m(1 - \rho / n)\right]}{(1 - \rho / n)^2} p_0 .$$

Среднее число заявок, обслуживаемых в СМО

$$L_{обс} = \frac{A}{\mu} = \rho \cdot \left(1 - \frac{\rho^{n+m}}{n^m \cdot n!} \cdot p_0\right)$$

Среднее число заявок, находящихся в СМО $L_{СМО} = L_{оч} + L_{обс}$

При ρ = n возникает неопределённость типа 0/0. В этом случае, раскрывая неопределённость можно получить:

$$p_0 \to p_0' = \left(1 + \frac{n}{1!} + \frac{n^2}{2!} + \ldots + \frac{n^n}{n!} + \frac{n^n}{n!} m\right)^{-1};$$

$$p_k = \frac{n^k}{k!} p_0', \quad \left(k = \overline{1, n}\right); \qquad p_{n+i} = \frac{n^n}{n!} p_0', \quad \left(i = \overline{1, m}\right),$$

$$p_{оч} \to p_{оч}' = m \cdot \frac{n^n}{n!} p_0',$$

$$L_{оч} \to L_{оч}' = \frac{n^n}{n!} \cdot \frac{m(m+1)}{2} p_0',$$

$$L_{обс} \to L_{обс}' = n \cdot \left(1 - \frac{n^n}{n\,!} \cdot p_0'\right).$$

Пример На склад в среднем прибывает 3 машины в час. Разгрузку осуществляют 3 бригады грузчиков. Среднее время разгрузки машины - 1час. В очереди в ожидании разгрузки могут находиться не более 4-х машин. Дать оценку работы СМО.

Решение. Имеем: $n = 3$, $\lambda = 3$ час$^{-1}$, $\mu = 1$ час$^{-1}$, $\rho = \lambda/\mu = 3$, $m = 4$. Так как $\rho = n$, то p_0 - вероятность отсутствия машин на складе, находим по формуле

$$p_0 = \left(1 + \frac{3}{1!} + \frac{3^2}{2!} + \frac{3^3}{3!} + \frac{3^3}{3!}\cdot 4\right)^{-1} = \frac{1}{31} \approx 0{,}032,$$

т.е. грузчики работают практически без отдыха.

По формуле находим вероятность отказа в обслуживании прибывшей на склад машины:

$$p_{отк} = \frac{3^{3+4}}{3^4 \cdot 3!}\cdot\frac{1}{31} = \frac{9}{62} \approx 0{,}145.$$

Т.е. вероятность отказа не столь велика. Относительная пропускная способность равна

$$Q = p_{\text{обс}} = 1 - p_{\text{отк}} \approx 1 - 0{,}145 = 0{,}855.$$

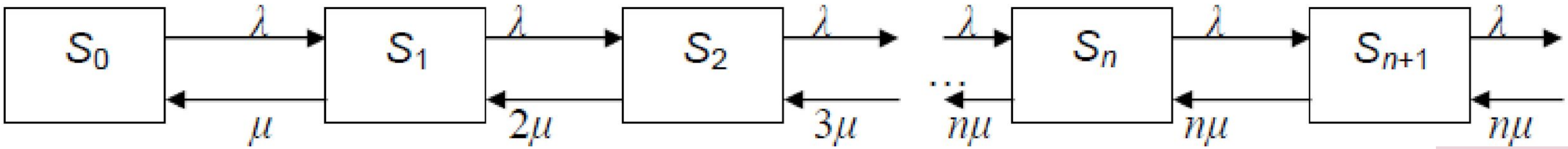
Среднее число машин в очереди находим

$L_{оч} = \frac{3^3}{3!}\cdot\frac{4\cdot 5}{2}\cdot\frac{1}{31} = \frac{45}{31} \approx 1{,}45$ машин, т.е. существенно меньше $m = 4$.

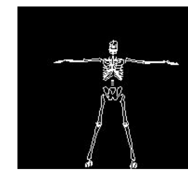
Среднее время пребывания машины на складе находим по формуле

$\bar{t}_{смо} = \frac{L_{оч}}{\lambda} + \frac{Q}{\mu} \approx \left(\frac{45}{31}\cdot\frac{1}{3} + \frac{0{,}855}{1}\right) час \approx 1{,}34\ часа$, что сравнимо со средним временем разгрузки машины. Можно сделать вывод, что разгрузка машин на складе организована эффективно.

Многоканальная СМО с неограниченной очередью



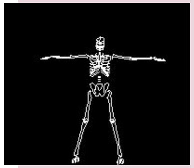
Формулы для финальных вероятностей можно получить из формул для n-канальной СМО с ограниченной очередью при $m \to \infty$. При этом следует иметь в виду, что при $\rho/n \geq 1$ вероятность $p_0 = p_1 = \ldots = p_n = 0$, т.е. очередь неограниченно возрастает. Следовательно, этот случай практического интереса не представляет и ниже рассматривается лишь случай $\rho/n < 1$.



$$p_0 = \left(1 + \frac{\rho}{1!} + \frac{\rho^2}{2!} + \ldots + \frac{\rho^{n-1}}{(n-1)!} + \frac{\rho^n}{(n-1)!} \cdot \frac{1}{n-\rho}\right)^{-1}.$$

Многоканальная СМО с неограниченной очередью

Формулы для остальных вероятностей имеют тот же вид, что и для СМО с ограниченной очередью:



$$p_k = \frac{\rho^k}{k!} p_0, \ \left(k = \overline{1,n}\right); \ p_{n+i} = \frac{\rho^{n+i}}{n^i n!} p_0, \ (i = 1, 2\ldots).$$

выражение для вероятности образования очереди заявок

$$p_{оч} = \frac{\rho^n}{n!} \cdot \frac{n}{n-\rho} \cdot p_0.$$

Поскольку очередь не ограничена, то вероятность отказа в обслуживании заявки ротк равна нулю $p_{отк} = 0$, а относительная пропускная способность Q равна единице: $Q = p_{обс} = 1 – p_{отк} = 1$.
Абсолютная пропускная способность А равна $A = \lambda \cdot Q = \lambda$.
При $m \to \infty$ получим выражение для среднего числа заявок в очереди:

$$L_{оч} = \frac{\rho^{n+1}}{n!} \cdot \frac{n}{(n-\rho)^2} p_0.$$

Среднее число обслуживаемых заявок $L_{обс}$ определяется формулой $L_{обс} = \rho$.

Многоканальная СМО с неограниченной очередью

Пример. Интенсивность потока посетителей столовой составляет 150 человек в час. Имеется 3 кассира, каждый из которых обслуживает в среднем 1 посетителя за минуту. Найти характеристики СМО.

Решение. Имеем: $n = 3$, $\lambda = 150$ час$^{-1}$ = 2,5 мин$^{-1}$, $\mu = 1$мин$^{-1}$, $\rho = \lambda/\mu = 2{,}5$. Вероятность отсутствия посетителей в столовой находим по формуле (10.1):

$$p_o = \left(1 + \frac{2{,}5}{1!} + \frac{(2{,}5)^2}{2!} + \frac{(2{,}5)^3}{2!} \cdot \frac{1}{3 - 2{,}5}\right)^{-1} \approx 0{,}0555,$$

Многоканальная СМО с неограниченной очередью

т.е. работники столовой практически всё время заняты.

Вероятность образования очереди

$$p_{оч} = \frac{(2,5)^3}{3!} \cdot \frac{3}{3-0,5} \cdot 0,0555 \approx 0,87.$$

Среднее число посетителей в очереди

$$L_{оч} \approx \frac{(2,5)^{3+1}}{3!} \cdot \frac{3}{(3-2,5)^2} \cdot 0,0555 \approx 4,35 \text{ человека},$$

а среднее число обслуживаемых посетителей

$$L_{обс} \approx 2,5 \text{ человек}.$$

Среднее число посетителей (обслуживаемых и в очереди) равно

$$L_{смо} = L_{оч} + L_{обс} \approx 6,35 \text{ человек},$$

т.е. чуть больше одного посетителя на каждого кассира, что оптимально.

Среднее время, затрачиваемое посетителем на получение обеда, находим по формуле (4.9):

$$\bar{t}_{смо} = \frac{L_{оч}}{\lambda} + \frac{Q}{\mu} \approx \left(\frac{4,35}{2,9} + \frac{1}{1}\right) мин \approx 2,16 мин,$$

что совсем немного. Можно сделать вывод, что работа столовой организована эффективно.