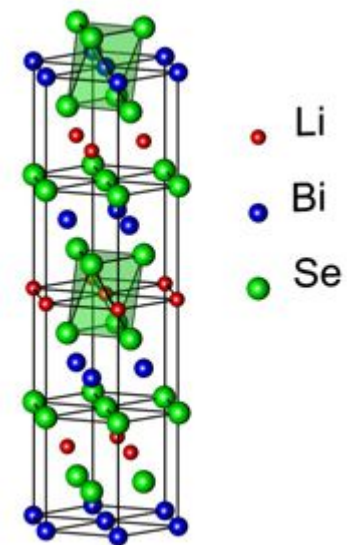
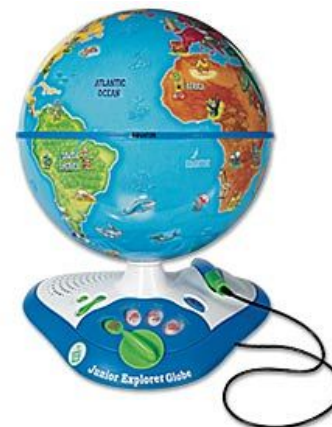


Модели и моделирование

Тема 1. Модели и их типы

Модели в нашей жизни

2

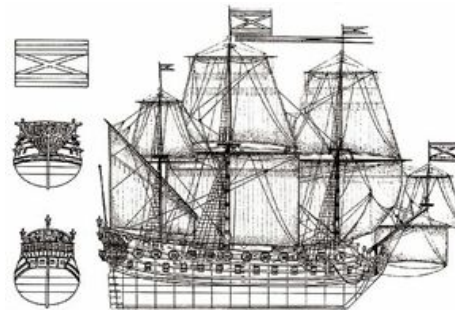
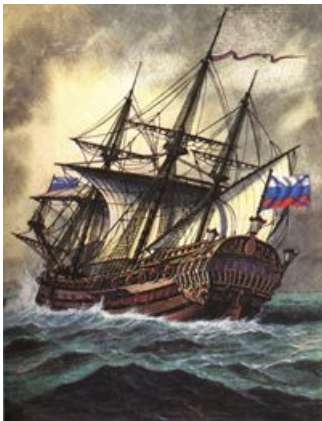
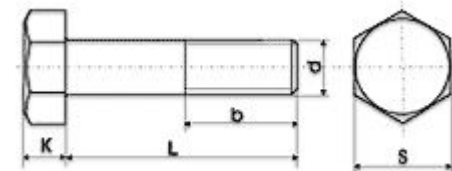
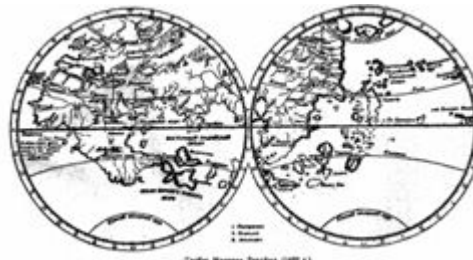


Что такое модель?

Модель – это объект, который обладает некоторыми свойствами другого объекта (*оригинала*) и используется вместо него.

Оригиналы и модели

Модели без оригинала не существует!



Первый линейный русский корабль «Гото Предестинация»

Что можно моделировать?

Модели объектов:

- уменьшенные копии зданий, кораблей, самолетов, ...
- модели ядра атома, кристаллических решеток
- чертежи
- ...

Модели процессов:

- изменение экологической обстановки
- экономические модели
- исторические модели
- ...

Модели явлений:

- землетрясение
- солнечное затмение
- цунами
- ...

Моделирование

Моделирование – это создание и использование моделей для изучения оригиналов.

Когда используют моделирование:

- **оригинал не существует**
 - древний Египет
 - последствия ядерной войны (Н.Н. Моисеев, 1966)
- **исследование оригинала опасно для жизни или дорого:**
 - управление ядерным реактором (Чернобыль, 1986)
 - испытание нового скафандра для космонавтов
 - разработка нового самолета или корабля
- **оригинал сложно исследовать непосредственно:**
 - Солнечная система, галактика (большие размеры)
 - атом, нейтрон (маленькие размеры)
 - процессы в двигателе внутреннего сгорания (очень быстрые)
 - геологические явления (очень медленные)
- **интересуют только некоторые свойства оригинала**
 - проверка краски для фюзеляжа самолета

Цели моделирования

- **исследование оригинала**

изучение сущности объекта или явления

«Наука есть удовлетворение собственного любопытства за казенный счет» (Л.А. Арцимович)

- **анализ («что будет, если ...»)**

научиться прогнозировать последствия различных воздействиях на оригинал

- **синтез («как сделать, чтобы ...»)**

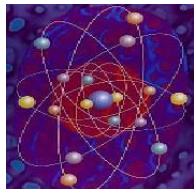
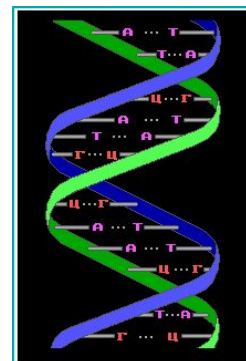
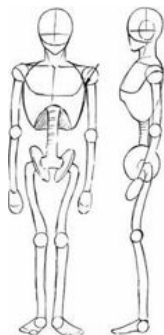
научиться управлять оригиналом, оказывая на него воздействия

- **оптимизация («как сделать лучше»)**

выбор наилучшего решения в заданных условиях

Один оригинал – одна модель?

7



- материальная точка

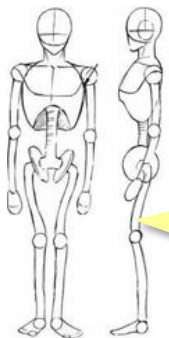


Оригинулу может соответствовать несколько разных моделей и наоборот!

Зачем нужно много моделей?



Тип модели определяется целями моделирования!



изучение
строения
тела



изучение
наследственности

учет граждан
страны

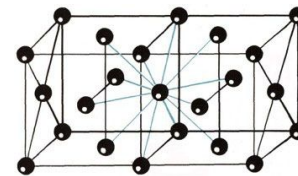


примерка
одежды

тренировка
спасателей



- **материальные (физические, предметные) модели:**

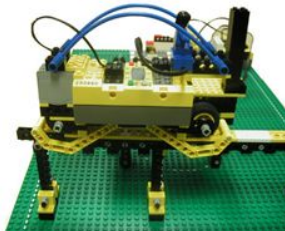
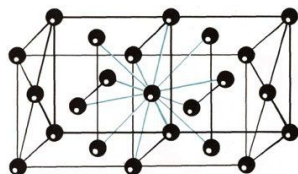
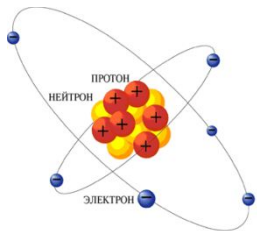


- **Информационные модели** представляют собой информацию о свойствах и состоянии объекта, процесса, явления, и его взаимосвязи с внешним миром:
- **вербальные** – словесные или мысленные
- **знаковые** – выраженные с помощью формального языка
 - **графические** (рисунки, схемы, карты, ...)
 - **табличные**
 - **математические** (формулы)
 - **логические** (различные варианты выбора действий на основе анализа условий)
 - **специальные** (ноты, химические формулы)

Классификация моделей

1. Модели по области применения

• учебные (в т.ч. тренажеры)



• опытные — при создании новых технических средств



• научно-технические

аэродинамическая труба

испытания в опытном бассейне



имитатор солнечного излучения



вакуумная камера в Институте космических исследований



вибростенд
НПО «Энергия»

2. Модели по фактору времени

- **статические** – описывают оригинал в заданный момент времени
 - ❑ силы, действующие на тело в состоянии покоя
 - ❑ результаты осмотра врача
 - ❑ фотография
- **динамические**
 - ❑ модель движения тела
 - ❑ явления природы (молния, землетрясение, цунами)
 - ❑ история болезни
 - ❑ видеозапись события

3. Модели по характеру связей

- **детерминированные**

- связи между входными и выходными величинами жестко заданы
- при одинаковых входных данных каждый раз получаются одинаковые результаты

Примеры

- движение тела без учета ветра
- расчеты по известным формулам

- **вероятностные (стохастические)**

- учитывают случайность событий в реальном мире
- при одинаковых входных данных каждый раз получаются немного разные результаты

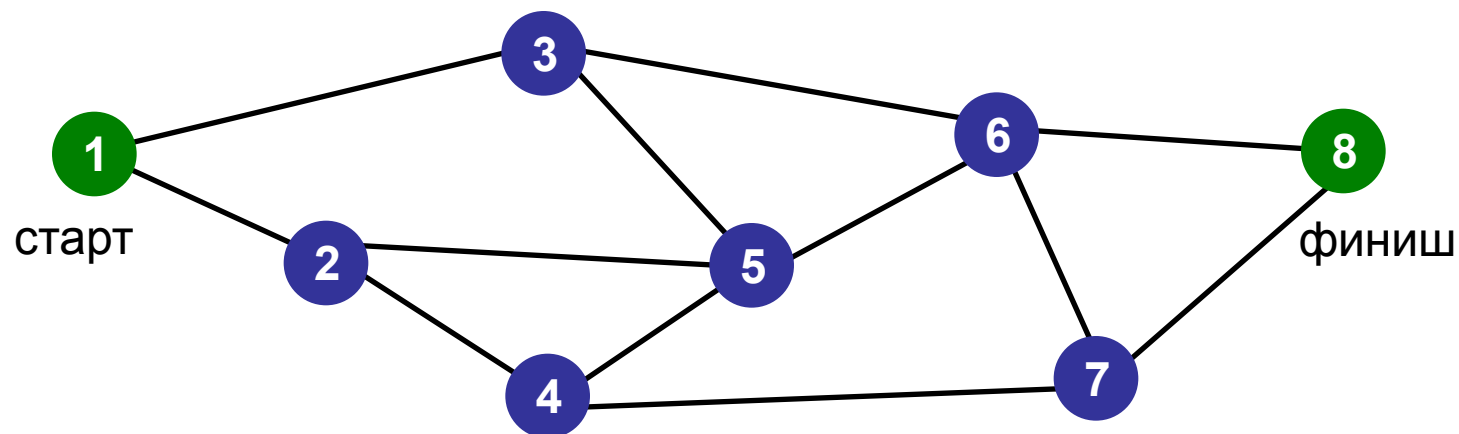
Примеры

- движение тела с учетом ветра
- броуновское движение частиц
- модель движения судна на волнении
- модели поведения человека

4. Модели по структуре

- табличные модели (пары соответствия)
- иерархические (многоуровневые) модели

- сетевые модели (графы)



Типы моделей

Словесные модели

Словесные модели - это описания предметов, явлений, событий, процессов на естественных языках



**Словесная
модель**



Учебник

**Исторические
события**

**Географические
объекты**

**Художественная
литература**

Роман

Басня

**Перенос отношений
между людьми на отношения
между персонажами басни**



Компьютерные математические модели

Компьютерными математическими моделями называются математические модели, реализованные с помощью систем программирования, электронных таблиц, специализированных математических пакетов и программных средств для моделирования.

Математическая модель



Ôàëë "SWF"

Имитационные модели

- нельзя заранее вычислить или предсказать поведение системы, но можно имитировать её реакцию на внешние воздействия;
- максимальный учет всех факторов;
- только численные результаты;



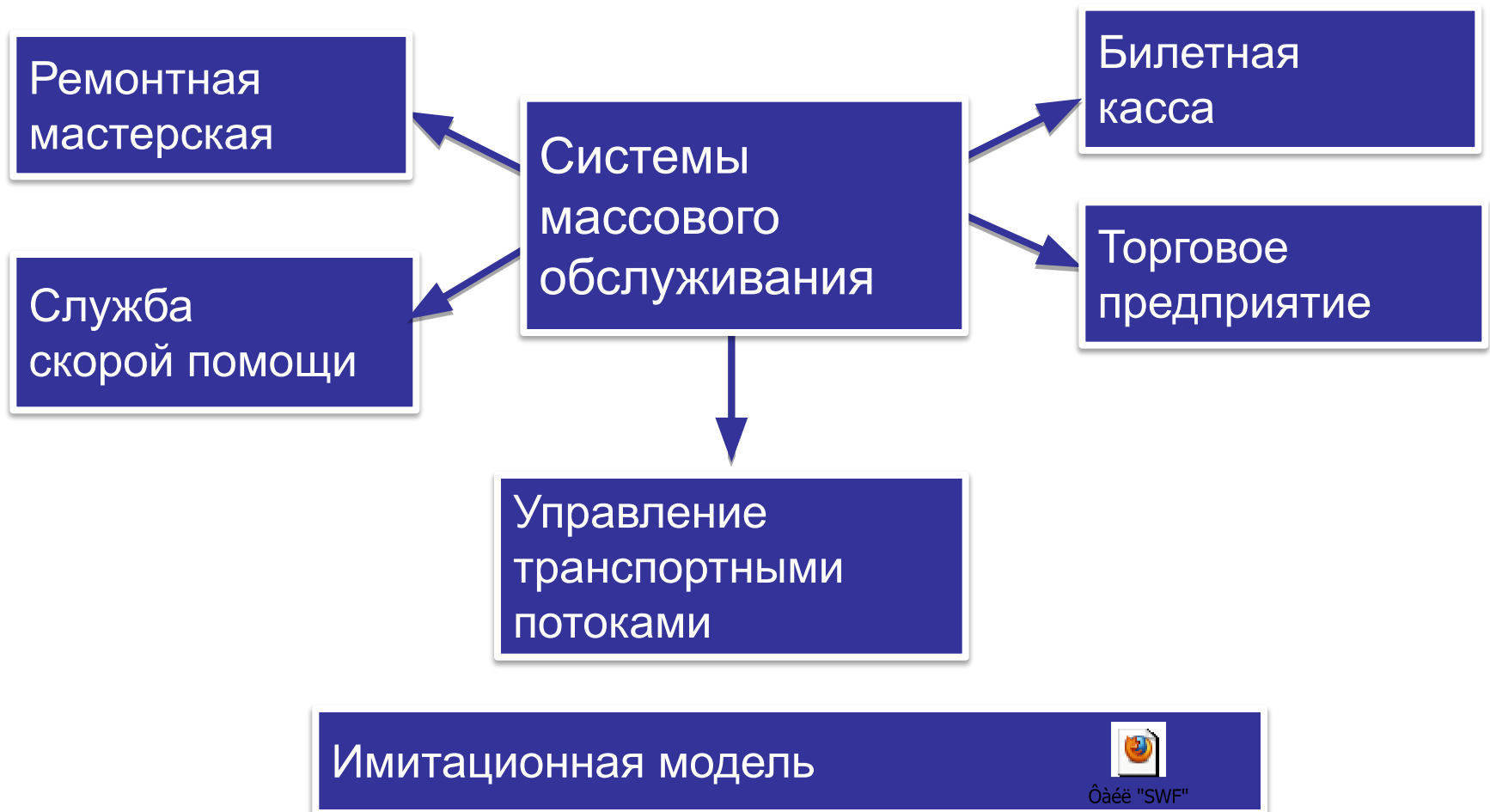
Задача – найти лучшее решение **методом проб и ошибок** (многократные эксперименты)!

Примеры:

- ❑ испытания лекарств на мышах, обезьянах, ...
- ❑ математическое моделирование биологических систем
- ❑ модели бизнеса и управления
- ❑ модели процесса обучения

Имитационные модели

Имитационные модели воспроизводят поведение сложных систем, элементы которых могут вести себя случайным образом.



Игровые модели

Игровые модели учитывают действия **противников**.

Примеры:

- ❑ модели экономических ситуаций
- ❑ модели военных действий
- ❑ спортивные игры
- ❑ тренинги персонала



Задача – найти **лучший вариант действий в самом худшем случае!**

Адекватность

Адекватность – это совпадение существенных свойств модели и оригинала в данной задаче.

- результаты моделирования согласуются с выводами **теории** (законы сохранения и т.п.)

- подтверждаются **экспериментом**

X – моделирование
 X^* – эксперимент

относительная ошибка $\delta X = \frac{|X - X^*|}{X^*} \cdot 100\% < 10\%$



Адекватность модели можно доказать только экспериментом!

Модель всегда отличается от оригинала



Любая модель адекватна только при определенных условиях!

Пересчёт «модель-оригинал»



Сколько на местности?

$$\frac{7,6 \text{ см} \cdot 500000}{1000} = 38 \text{ км}$$

В более сложных случаях используют теорию подобия.

Тема 2. Этапы моделирования

I. Постановка задачи

Хорошо поставленная задача:

- описаны все связи между исходными данными и результатом
- известны все исходные данные
- решение существует
- задача имеет единственное решение

Примеры плохо поставленных задач:

- Винни Пух и Пятачок построили ловушку для слонопотама. Удастся ли его поймать?
- Малыш и Карлсон решили по-братски разделить два орешка – большой и маленький. Как это сделать?
- Найти максимальное значение функции $y = x^2$ (нет решений).
- Найти функцию, которая проходит через точки (0,1) и (1,0) (неединственное решение).

II. Разработка модели

- **выбрать тип модели**
- **определить *существенные* свойства оригинала**,
которые нужно включить в модель, отбросить
несущественные (для данной задачи)
- **построить формальную модель**
это модель, записанная на *формальном языке*
(математика, логика, ...) и отражающая только
существенные свойства оригинала
- **разработать алгоритм работы модели**
алгоритм – это четко определенный порядок
действий, которые нужно выполнить для решения
задачи

III. Тестирование модели

Тестирование – это проверка модели на простых исходных данных с известным результатом.

Примеры:

- устройство для сложения многозначных чисел – проверка на однозначных числах
- модель движения корабля – если руль стоит ровно, курс не должен меняться; если руль повернуть влево, корабль должен идти вправо
- модель накопления денег в банке – при ставке 0% сумма не должна изменяться



Модель прошла тестирование. Гарантирует ли это ее правильность?

IV. Эксперимент с моделью

Эксперимент – это исследование модели в интересующих нас условиях.

Примеры:

- устройство для сложения чисел – работа с многозначными числами
- модель движения корабля – исследование в условиях морского волнения
- модель накопления денег в банке – расчеты при ненулевой ставке

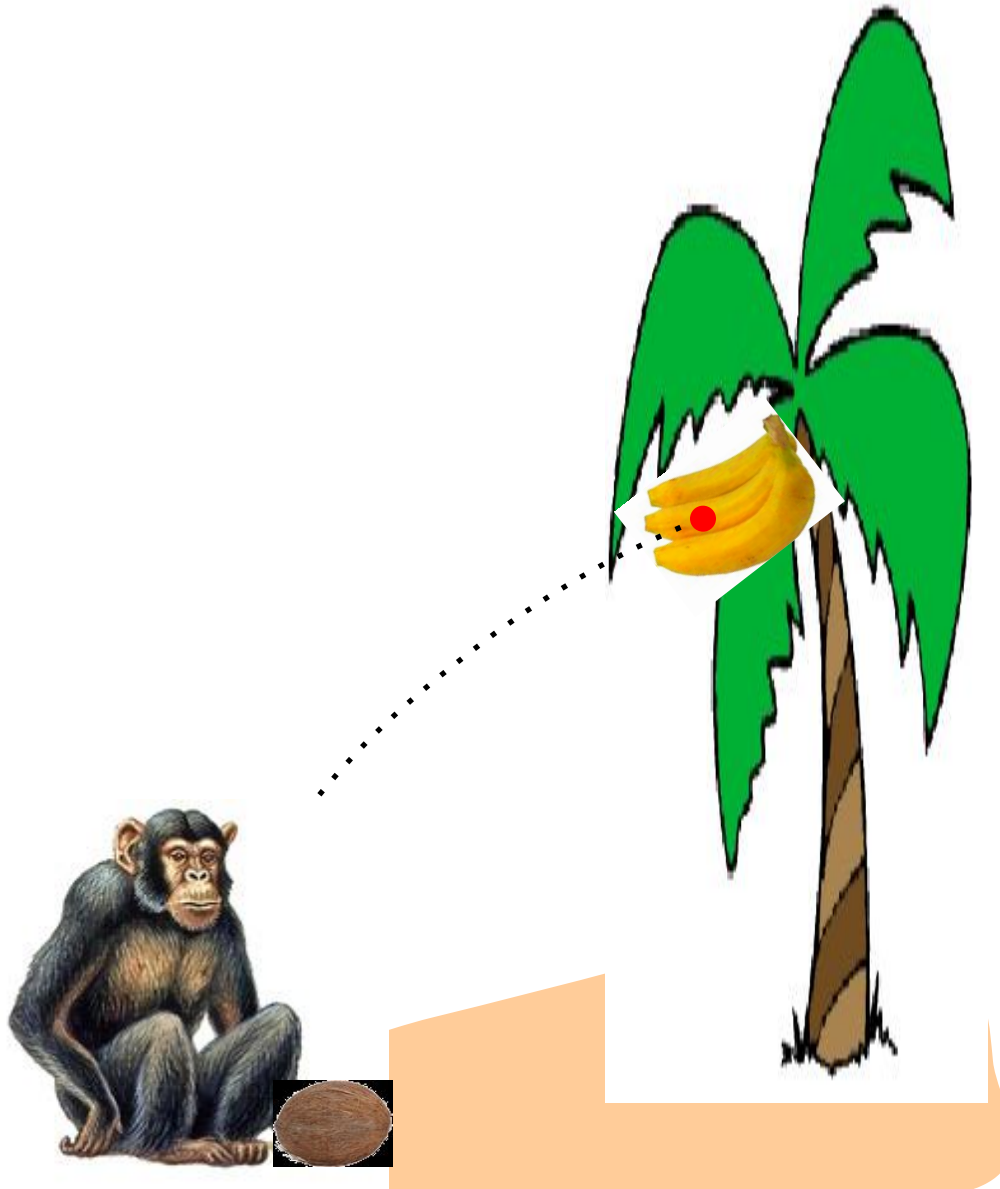


Можно ли 100%-но верить результатам?

V. Проверка практикой, анализ результатов

Возможные выводы:

- задача решена, модель адекватна
- необходимо изменить алгоритм или условия моделирования
- необходимо изменить модель (например, учесть дополнительные свойства)
- необходимо изменить постановку задачи



Задача. Обезьяна хочет сбить бананы на пальме. Как ей надо кинуть кокос, чтобы попасть им в бананы.

Анализ задачи:

- все ли исходные данные известны?
- есть ли решение?
- единственно ли решение?

I. Постановка задачи

Допущения:

- кокос и банан считаем материальными точками
- расстояние до пальмы известно
- рост обезьяны известен
- высота, на которой висит банан, известна
- обезьяна бросает кокос с известной начальной скоростью
- сопротивление воздуха не учитываем

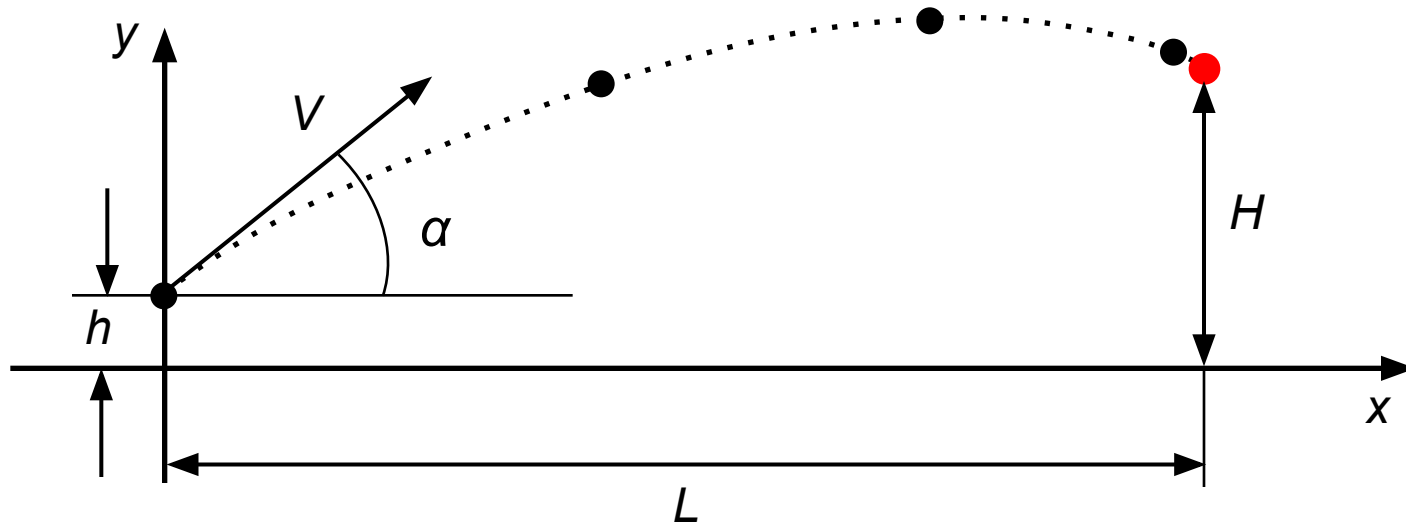
При этих условиях требуется найти начальный угол, под которым надо бросить кокос.



Всегда ли есть решение?

II. Разработка модели

Графическая модель



Формальная (математическая) модель

$$x = V \cos \alpha \cdot t, \quad y = h + V \sin \alpha \cdot t - \frac{gt^2}{2}$$

Задача: найти t , α , при которых

$$V \cos \alpha \cdot t = L, \quad h + V \sin \alpha \cdot t - \frac{gt^2}{2} = H$$

III. Тестирование модели

Математическая модель

$$x = V \cos \alpha \cdot t$$

$$y = h + V \sin \alpha \cdot t - \frac{gt^2}{2}$$

- при нулевой скорости кокос падает вертикально вниз
- при $t=0$ координаты равны $(0, h)$
- при броске вертикально вверх ($\alpha=90^\circ$) координата x не меняется
- при некотором t координата y начинает уменьшаться (ветви параболы вниз)



Противоречий не обнаружено!

IV. Эксперимент

Метод I.

Меняем угол α . Для выбранного угла α строим траекторию полета ореха. Если она проходит выше банана, уменьшаем угол, если ниже – увеличиваем.

Метод II.

Из первого равенства выражаем время полета:

$$V \cos \alpha \cdot t = L \quad \Rightarrow \quad t = \frac{L}{V \cos \alpha}$$

Меняем угол α . Для выбранного угла α считаем t , а затем – значение y при этом t . Если оно больше H , уменьшаем угол, если меньше – увеличиваем.



не надо строить всю траекторию для каждого α

V. Анализ результатов

1. Всегда ли обезьяна может сбить банан?
2. Что изменится, если обезьяна может бросать кокос с разной силой (с разной начальной скоростью)?
3. Что изменится, если кокос и бананы не считать материальными точками?
4. Что изменится, если требуется учесть сопротивление воздуха?
5. Что изменится, если дерево качается?

Моделирование

Математическое моделирование

I. Постановка задачи

Мальчик Вася в синей кепке бросает белый мяч со скоростью 12 м/с. Когда мяч впервые ударится о землю?



Хорошо поставлена?

Допущения:

- Вася бросает мяч вертикально вверх.
- В момент броска мяч находится на высоте 1,5 м.



Всегда ли есть решение?



Решение единственно?

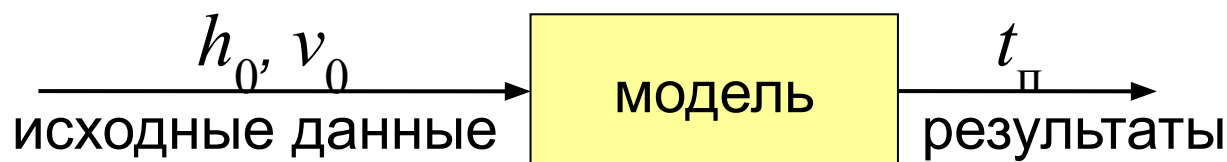
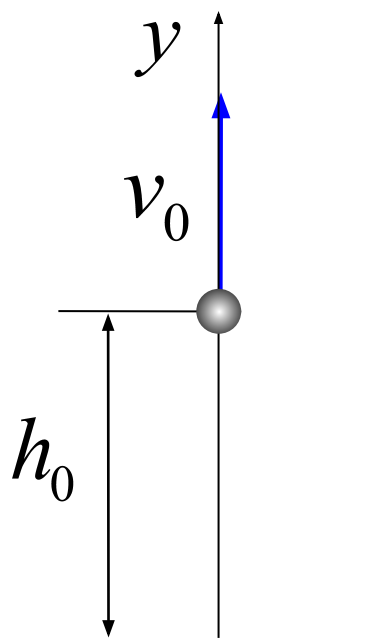
II. Разработка математической модели

1) выделить **существенные** исходные данные:

- начальная скорость 12 м/с
- бросок вертикально вверх
- ускорение свободного падения 9,81 м/с²

2) построить математическую модель

Графическая модель:



Такой модели достаточно?

II. Разработка математической модели

Ещё **допущения**:

- мяч – материальная точка
- нет сопротивления воздуха

Формализация:

$$y = h_0 + v_0 \cdot t - \frac{g \cdot t^2}{2}$$

где h_0 – начальная высота

v_0 – начальная скорость

t – время

Мяч упал:

$$0 = h_0 + v_0 \cdot t_n - \frac{g \cdot t_n^2}{2}$$



Связали исходные данные и результат!

III. Тестирование модели

Тестирование – это проверка модели на простых исходных данных с известным результатом.

$$y = h_0 + v_0 \cdot t - \frac{g \cdot t^2}{2}$$

- при $t = 0 \Rightarrow y = h_0$ (в начальной точке)
- при $v_0 = 0 \Rightarrow$ падение вниз



Доказывает ли успешное тестирование правильность модели?

IV. Построение компьютерной модели

$$0 = h_0 + v_0 \cdot t_n - \frac{g \cdot t_n^2}{2}$$



Что такое a, b, c, D?

```
program Polet;  
var h0, v0, g: real;  
    a, b, c, D, t1, t2: real;  
begin  
    h0 := 1.5; v0 := 12; g := 9.81;  
    a := -g/2; b := v0; c := h0;  
    D := b*b - 4*a*c;  
    t1 := (-b+sqrt(D))/(2*a);  
    t2 := (-b-sqrt(D))/(2*a);  
    writeln(t1);  
    writeln(t2);  
end.
```

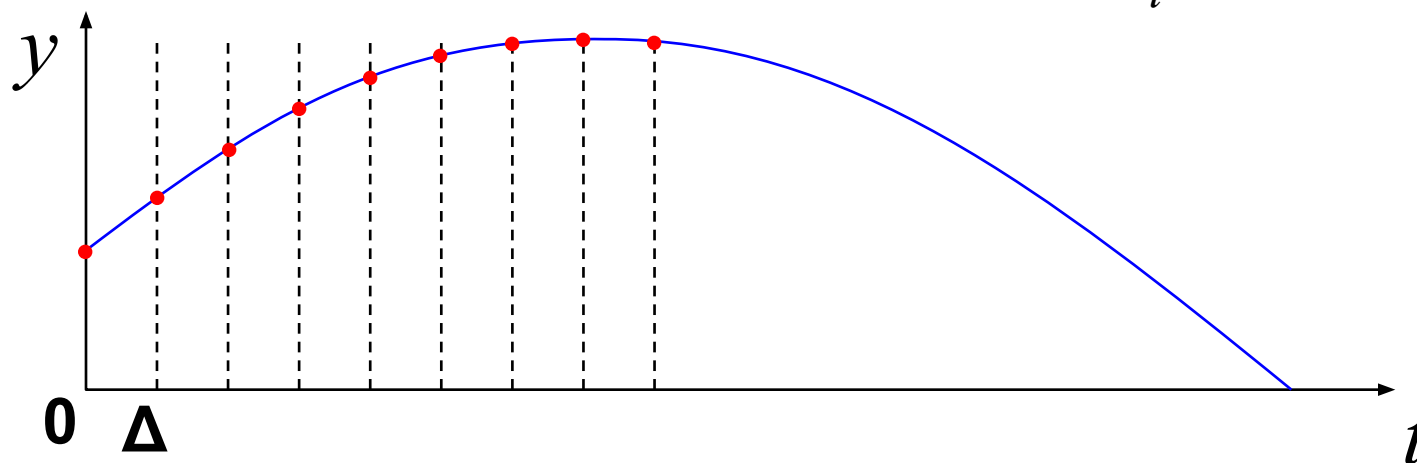

Компьютерная имитационная модель

если нельзя просто решить уравнение...

Дискретизация задачи:

интервал
дискретизации

моменты времени: $0, \Delta t, 2\Delta t, 3\Delta t, \dots, t_i = i \cdot \Delta t$



Рассматриваем $[t_i, t_{i+1}]$

Знаем y_i и v_i при $t = t_i \Rightarrow$ получить y_{i+1} и v_{i+1} при $t = t_{i+1}$



Считаем, что скорость
меняется скачком!

$$\begin{aligned} y_{i+1} &= y_i + v_i \cdot \Delta t \\ v_{i+1} &= v_i - g \cdot \Delta t \end{aligned}$$

Компьютерная имитационная модель

алг Полёт-2

нач

вещ $h0=1.5$, $v0=12$, $g=9.81$

вещ y , v , t , $dt=0.01$

$y := h0$; $v := v0$; $t := 0$

нц пока $y \geq 0$

$y := y + v*dt$

$v := v - g*dt$

$t := t + dt$

кц

вывод t

кон



Что такое y , v , t ,
 dt ?

Компьютерная имитационная модель

```
program Polet_2;  
var h0, v0, g: real;  
    y, v, t, dt: real;  
begin  
    h0:= 1.5; v0:= 12; g:= 9.81;  
    dt:= 0.01;  
    y:= h0; v:= v0; t:= 0;  
    while y>=0 do begin  
        y:= y + v*dt;  
        v:= v - g*dt;  
        t:= t + dt;  
    end;  
    writeln(t);  
end.
```



Что такое y , v , t , dt ?

V. Эксперимент с моделью

Эксперимент – это исследование модели при тех исходных данных, которые нас интересуют (результат заранее неизвестен).



Можно ли верить результатам?

VI. Анализ результатов



Необходима проверка на оригинале!

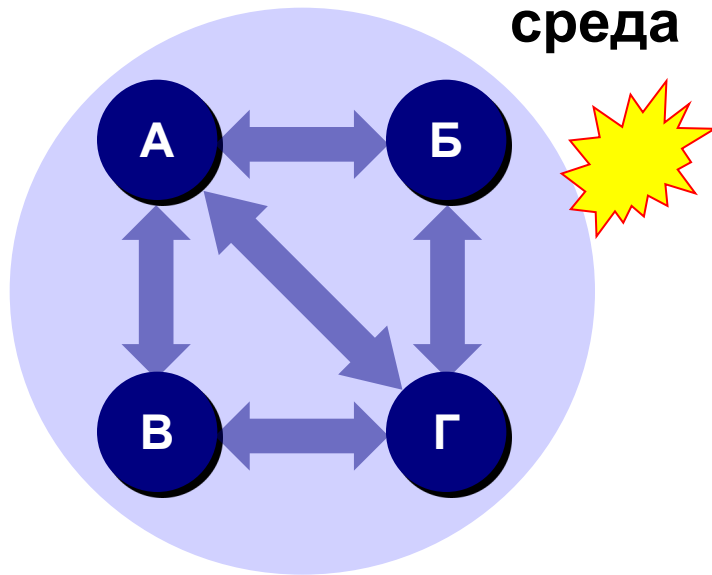
Возможные выводы:

- задача решена, модель адекватна
- необходимо изменить алгоритм или условия моделирования
- необходимо изменить модель (учесть дополнительные свойства)
- необходимо изменить постановку задачи

Системный подход

Системный подход

Система – группа объектов и связей между ними, выделенных из среды и рассматриваемых как одно целое.



Примеры:

- семья
- экологическая система
- компьютер
- техническая система
- общество



Система обладает (за счет связей!) особыми свойствами, которыми не обладает ни один объект в отдельности!

Модель-не-система:

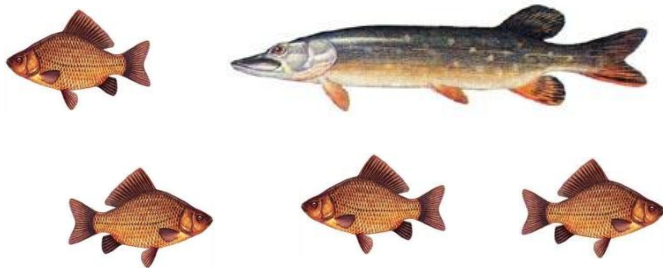


1-я линия:

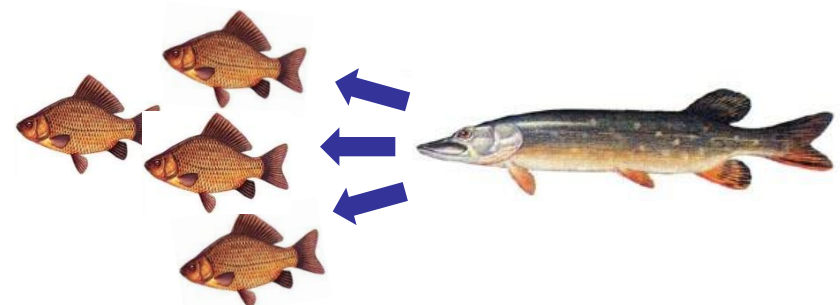
Пр. Ветеранов
Ленинский пр.
Автово
Кировский завод
Нарвская
...

2-я линия:

Купчино
Звездная
Московская
Парк Победы
Электросила
...

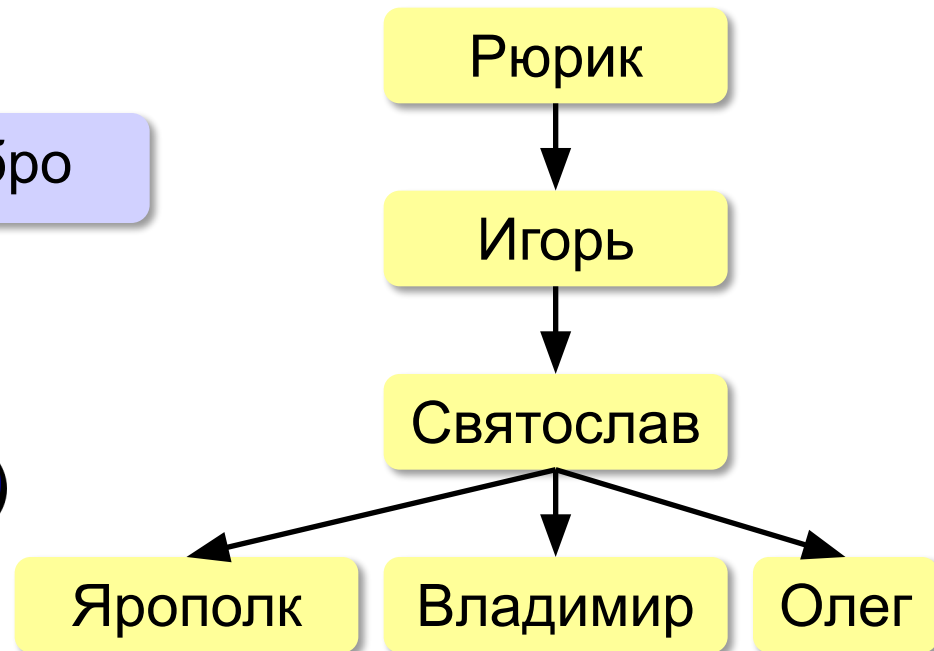
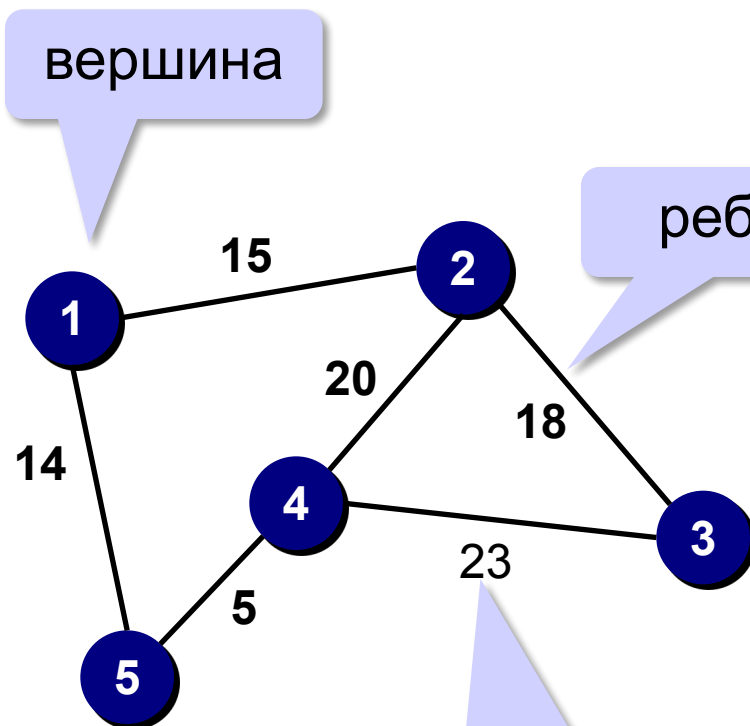


Модель-система:

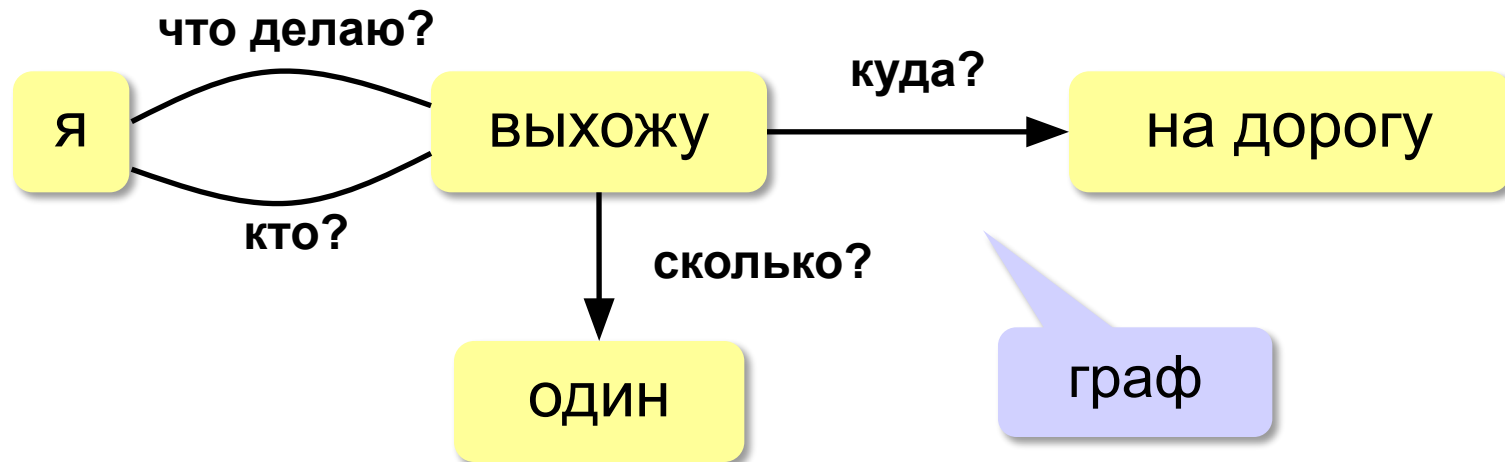


Системный подход

Граф – это набор вершин и соединяющих их ребер.



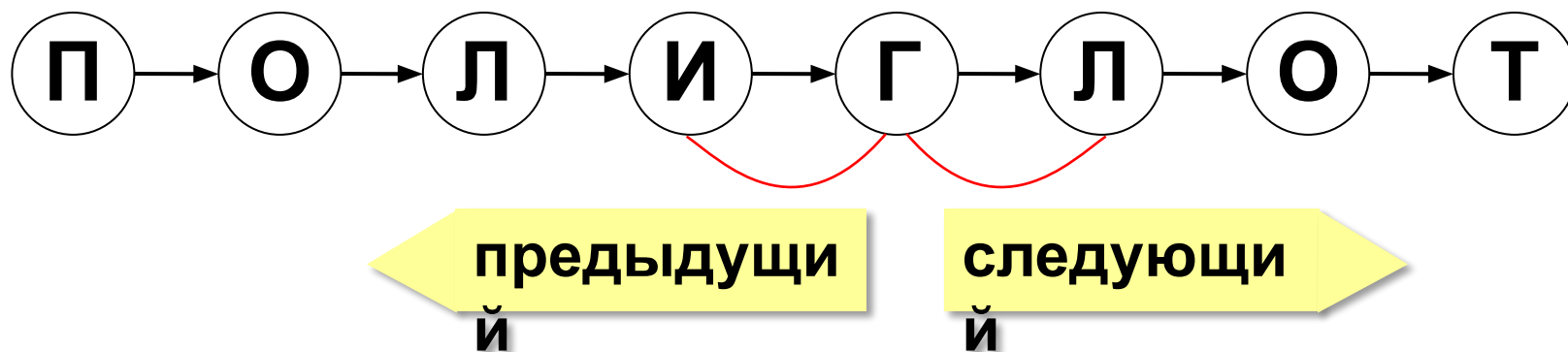
Семантическая (смысловая) модель предложения: *«Выхожу один я на дорогу...»*



Списки и деревья

Что такое список?

Список – последовательность элементов, в которой важен порядок их расположения.



Список как модель:

слово = список букв, текст = список абзацев

Запись:

['Amicus', 'Socrates', 'sed', 'magis', 'amica', 'veritas']



Что это значит?

Операции со списком

- замена элемента
- удаление элемента
- вставка нового элемента



Какие операции на каждом шаге?

КРАН → КОАН → КОРН → КОРО → КОРОН → КОРОНА



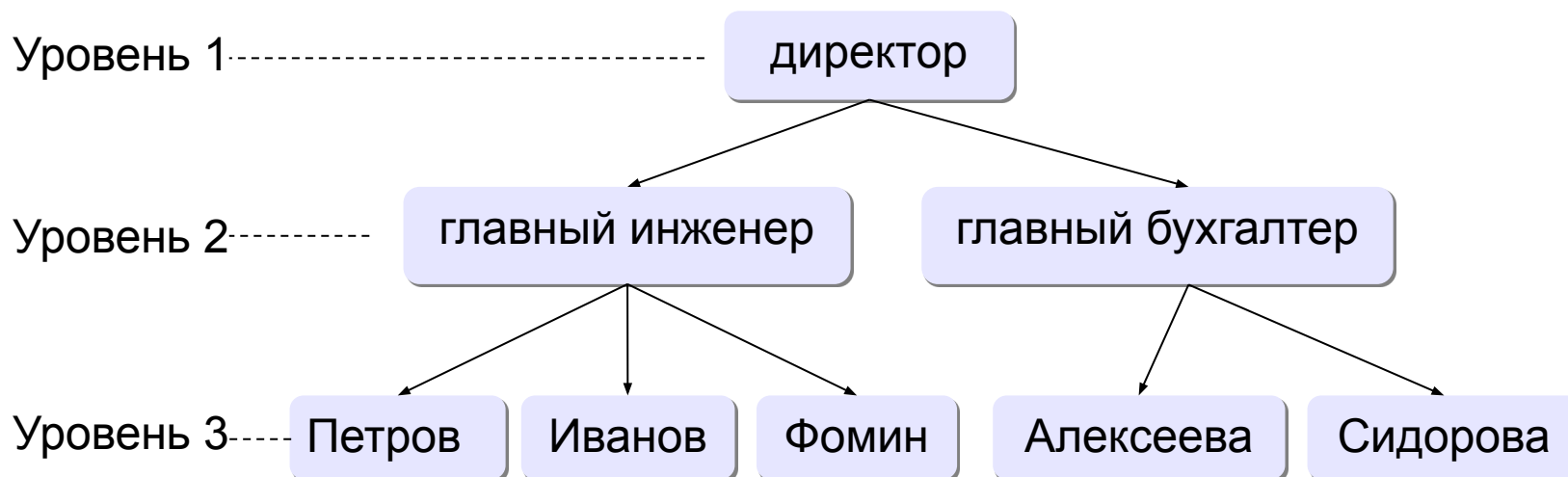
Более короткие варианты?

Операция	Цена
Замена гласной буквы на гласную или согласной на согласную.	1
Замена гласной на согласную или согласной на гласную.	2
Вставка или удаление буквы.	5



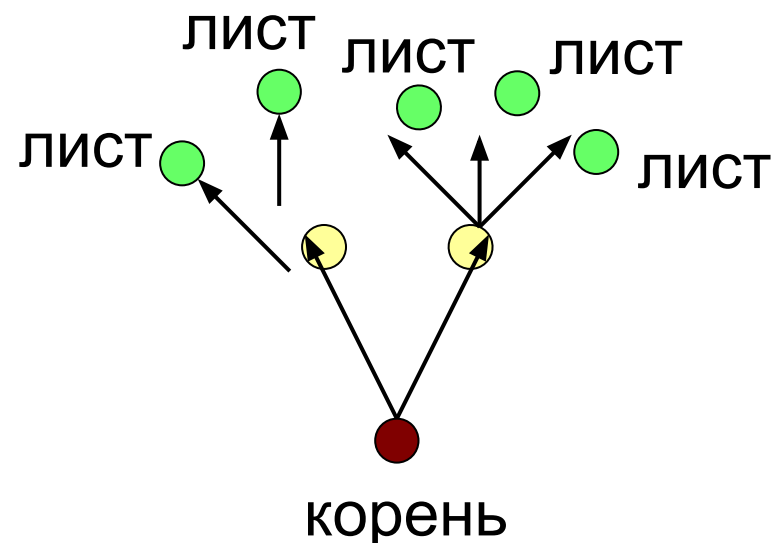
СКАНЕР → ПРИНТЕР с наименьшей стоимостью?

Что такое дерево?

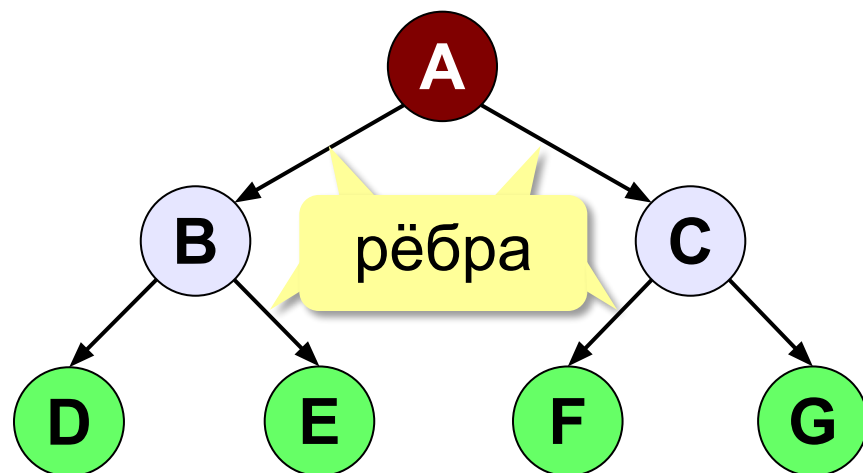


Дерево – это структура данных, которая служит моделью многоуровневой структуры (*иерархии*).

Лес – это несколько деревьев.



Из чего состоит дерево?



A – корень

D, E, F, G – листья

B, C – промежуточные узлы

Путь — это последовательность узлов, где каждый следующий связан с предыдущим.

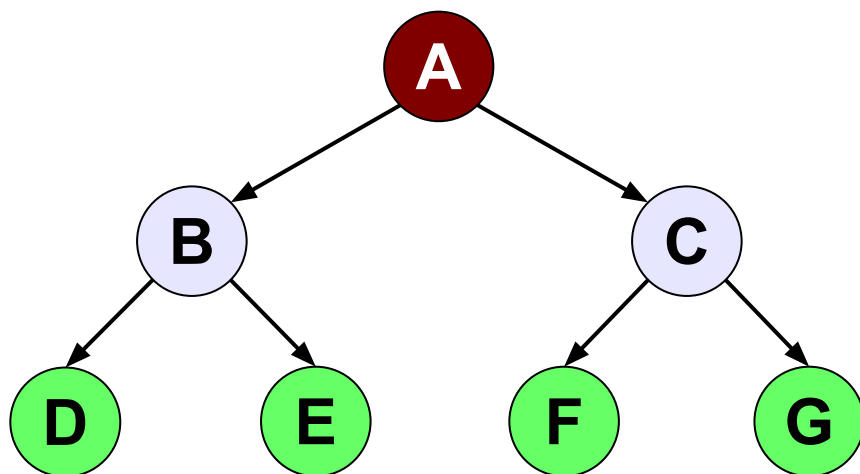
Высота дерева — это наибольшая длина пути от корня дерева к листу.

Поддерево — это часть дерева, которая тоже представляет собой дерево.

? Какие есть поддеревья?

Родители и дети

Родитель – сын: между ними есть ребро.



В – родитель для D и E
D и E – сыновья для В

? Если нет родителей?

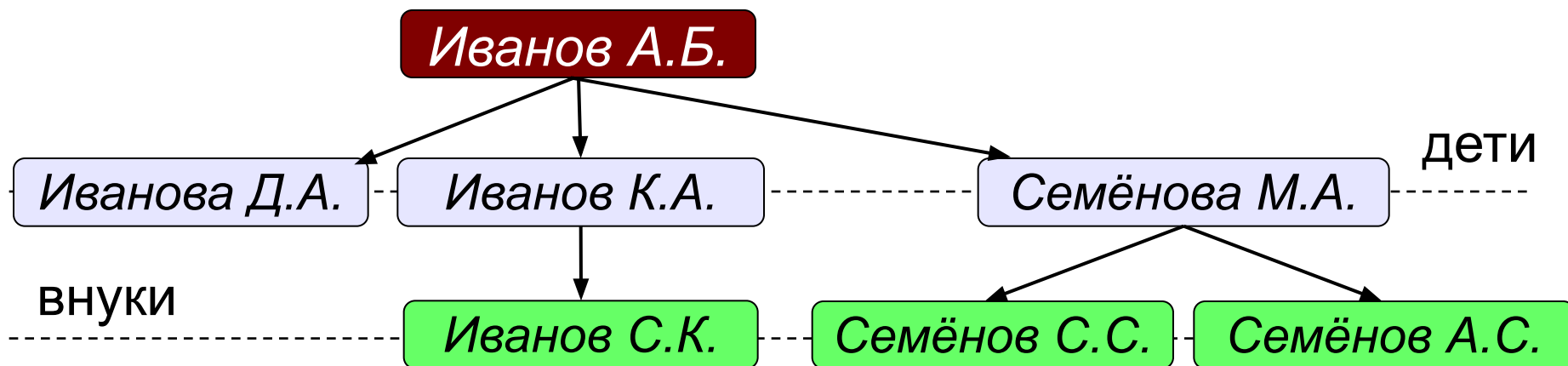
? Если нет сыновей?

Предок – потомок: между ними есть **путь**.

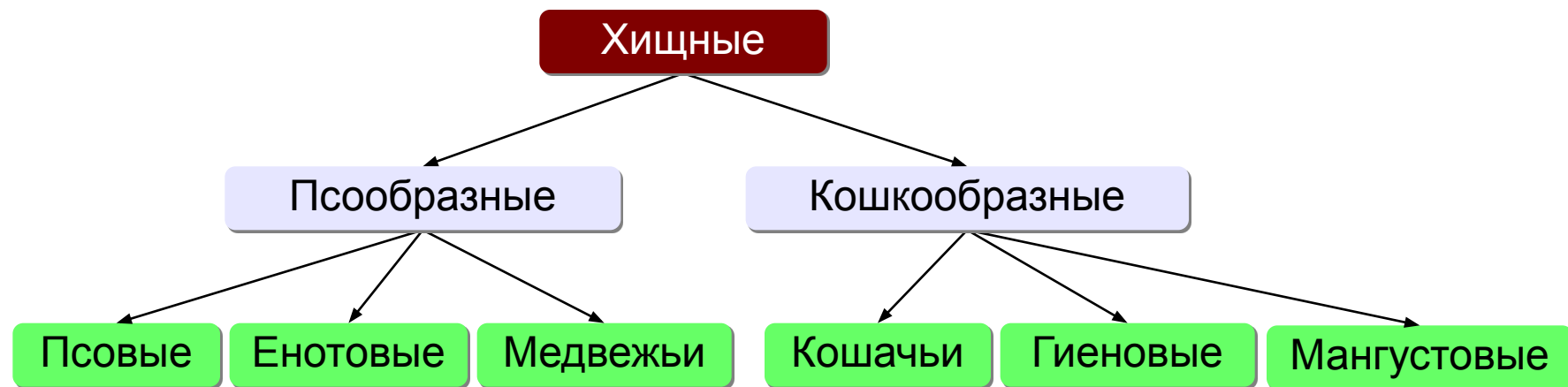
А и В – предки для D и E

В, D и E – потомки для А

Генеалогическое дерево



Классификации



Глава 1. Псообразные

1.1. Псовые

1.2. Енотовые

1.3. Медвежьи

...

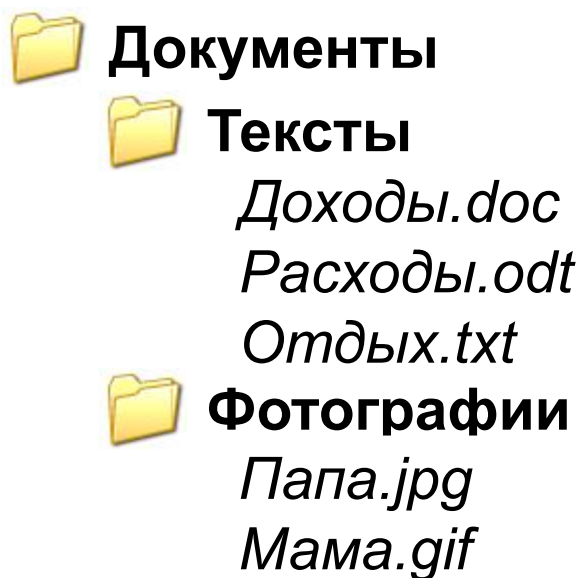
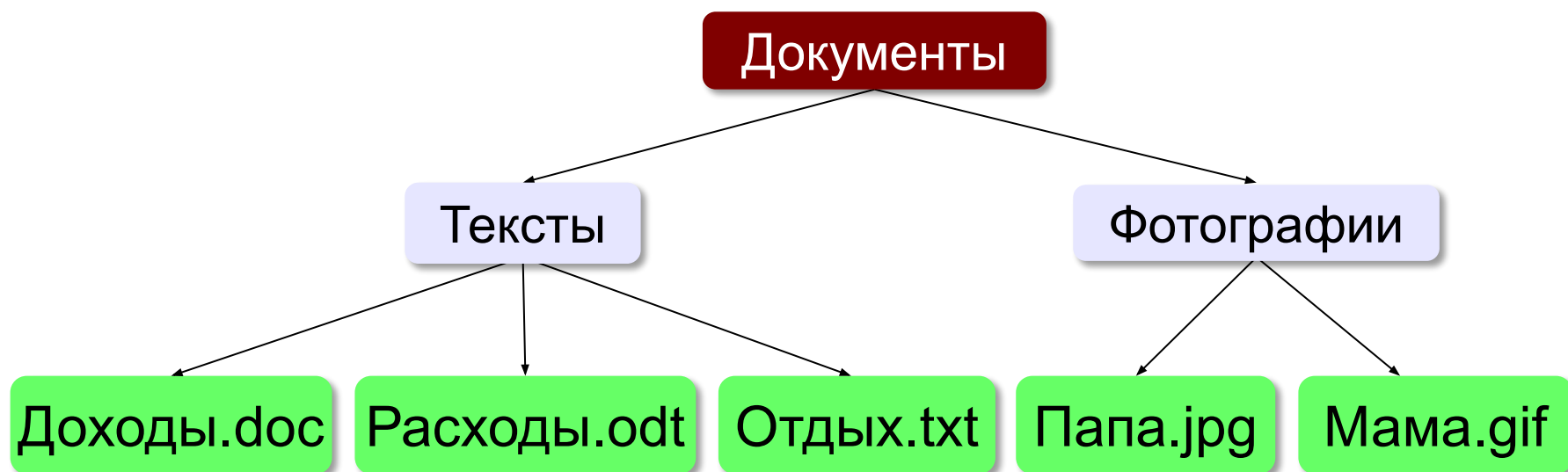
Глава 2. Кошкообразные

2.1. Кошачьи

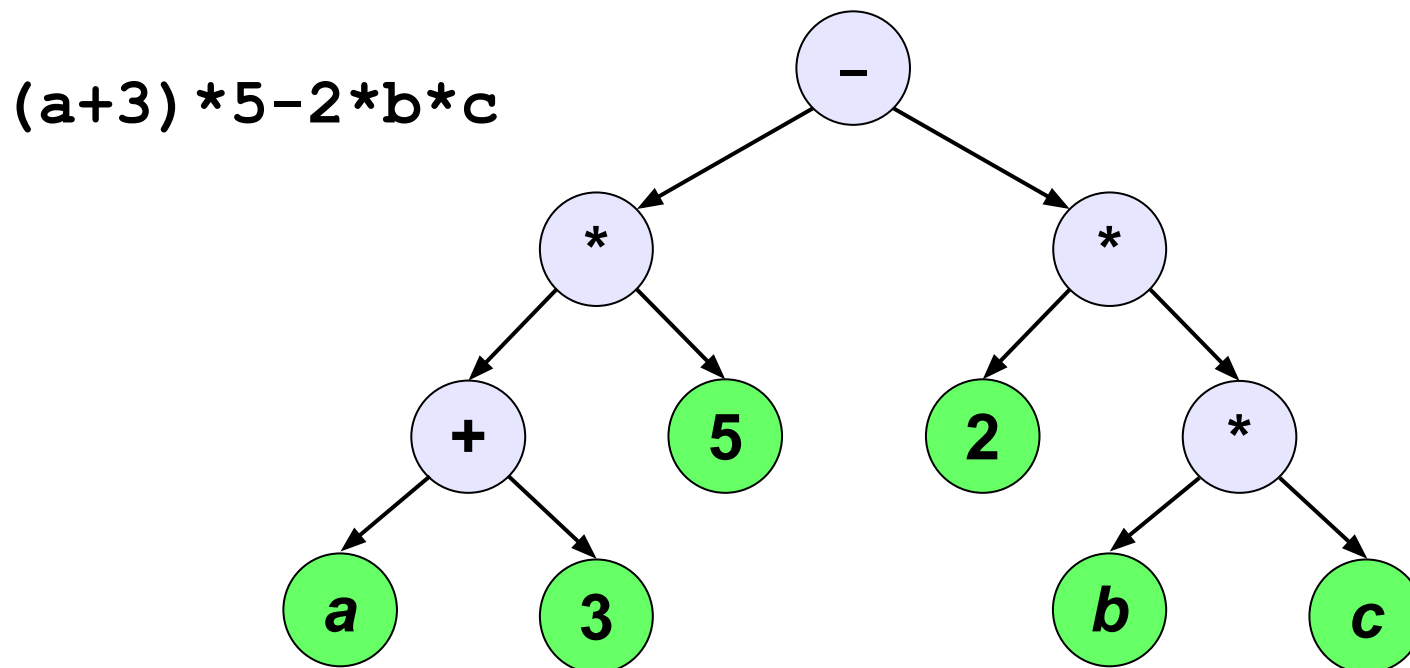
2.2. Гиеновые

2.3. Мангустовые

Файловая система



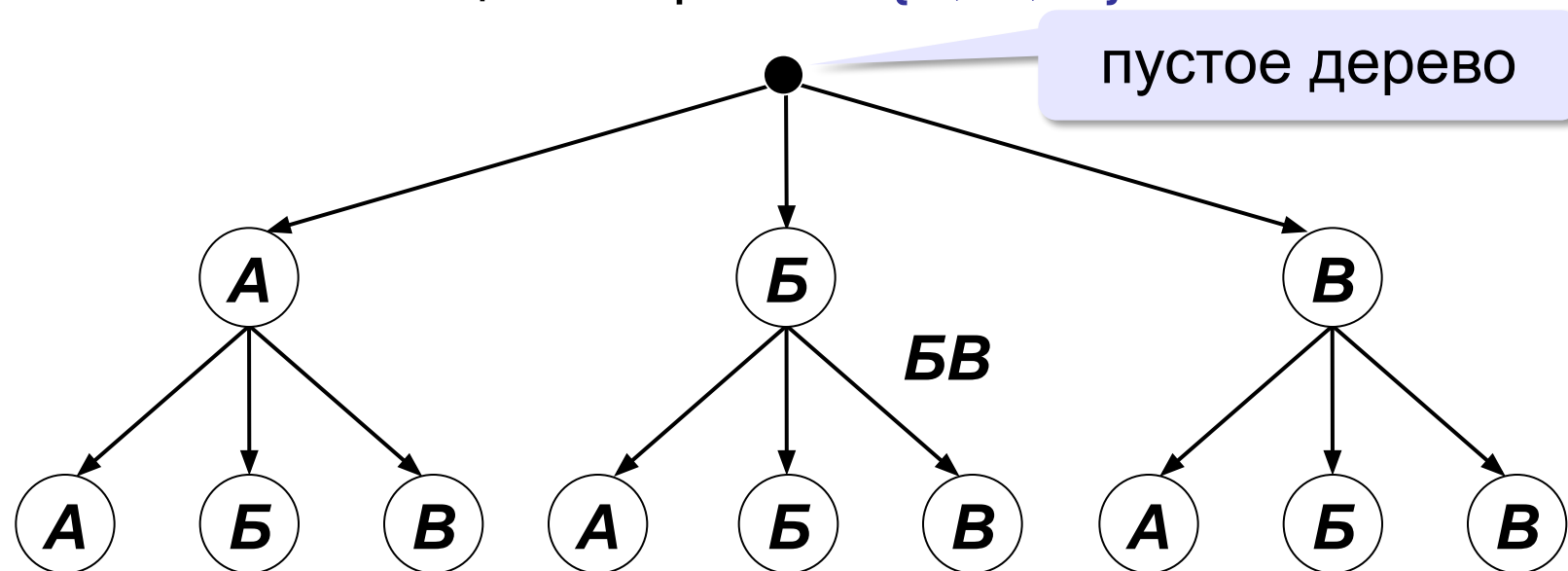
Арифметические выражения



Двоичное (бинарное) дерево – это дерево, в котором каждый узел может иметь не более двух сыновей.

Перебор вариантов

Составить все двухбуквенные слова, которые можно записать с помощью алфавита $\{A, B, C\}$.



Перебор вариантов

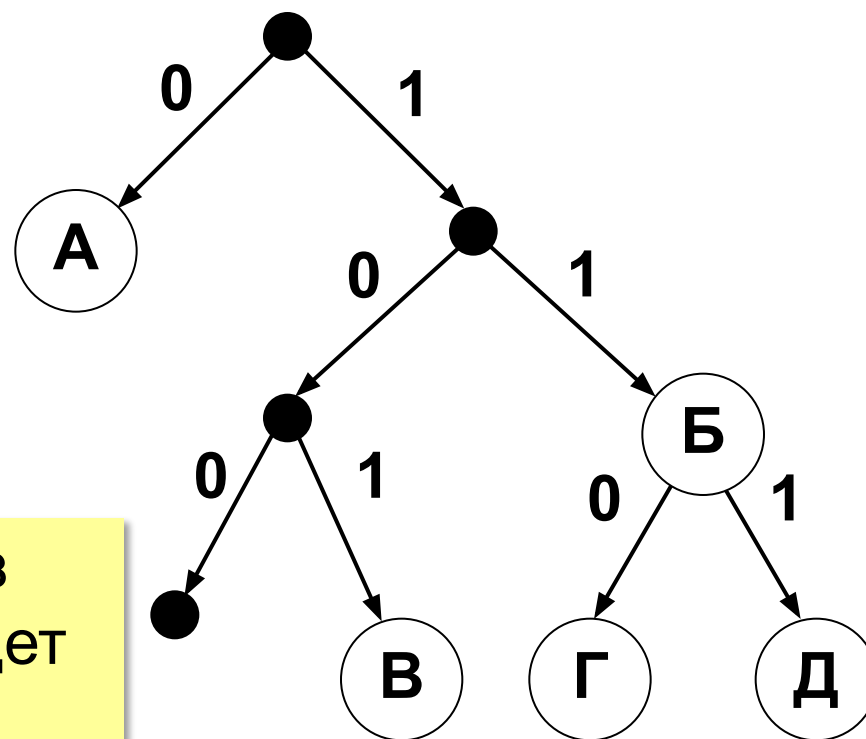
Разведчик выяснил, что ключ к замку от сейфа состоит из трёх символов, причём могут использоваться буквы из алфавита {А, В, С, D}. Две одинаковые буквы не могут стоять рядом. Рядом с буквой D обязательно должна стоять буква А. Если в ключе есть буква В, то там не может быть буквы С.



Сколько возможных ключей?

Дерево для двоичного кода

А	Б	В	Г	Д
0	11	101	110	111



Можно однозначно декодировать?

Условие Фано: ни одно из кодовых слов не совпадает с началом другого кодового слова.



Все буквы должны быть в листьях!

тогда однозначно декодируется!

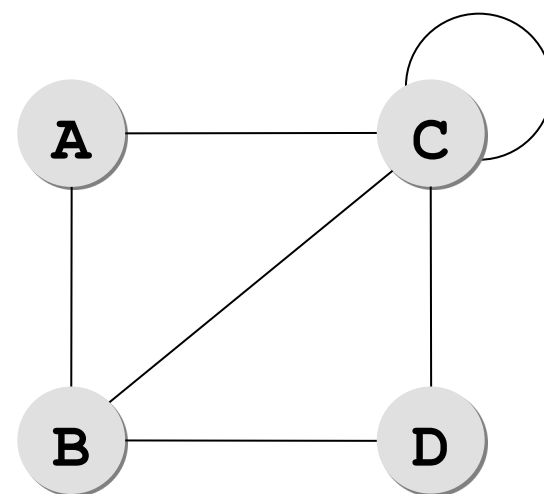
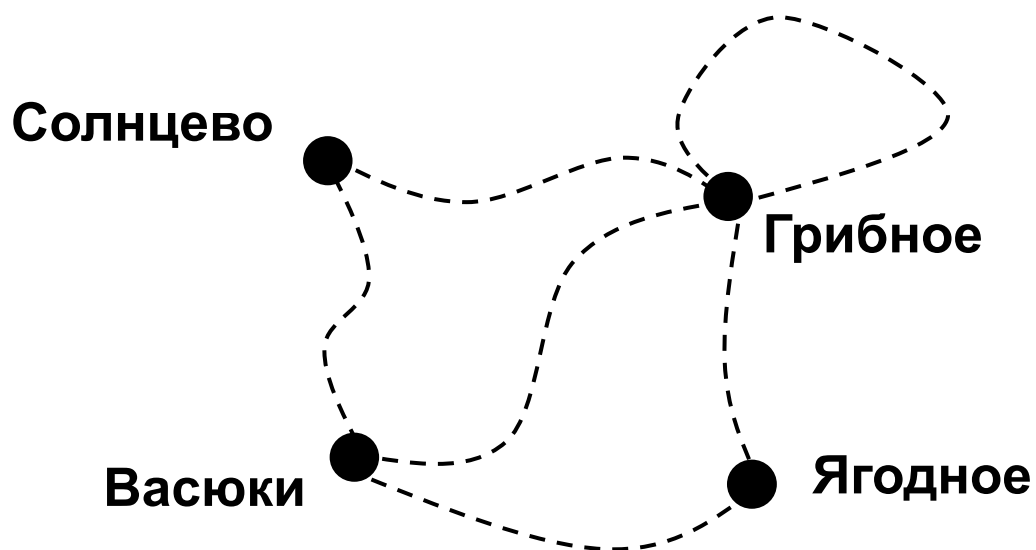
Графы

«От посёлка Васюки три дороги идут в посёлки Солнцево, Грибное и Ягодное. Между Солнцевым и Грибным и между Грибным и Ягодным также есть дороги. Кроме того, есть дорога, которая идет из Грибного в лес и возвращается обратно в Грибное».



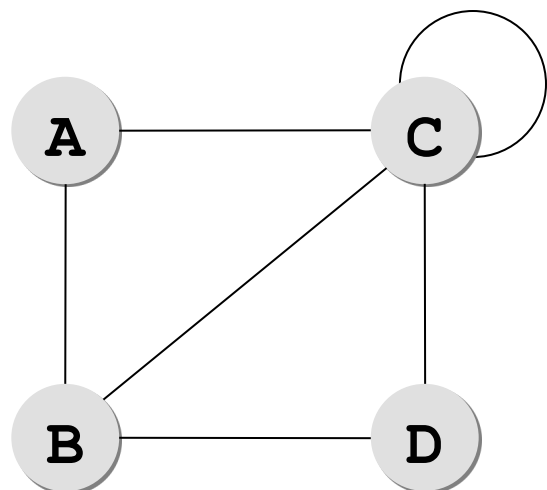
Как структурировать?

Графы



Граф – это набор вершин (узлов) и связей между ними (рёбер).

Матрица и список смежности



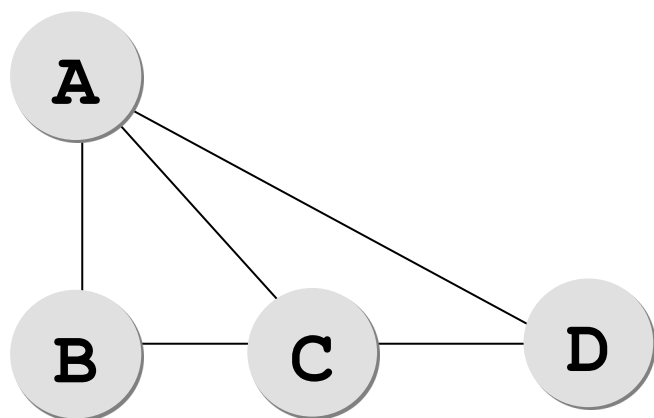
Матрица смежности

	A	B	C	D	
A	0	1	1	0	2
B	1	0	1	1	3
C	1	1	1	1	5
D	0	1	1	0	2

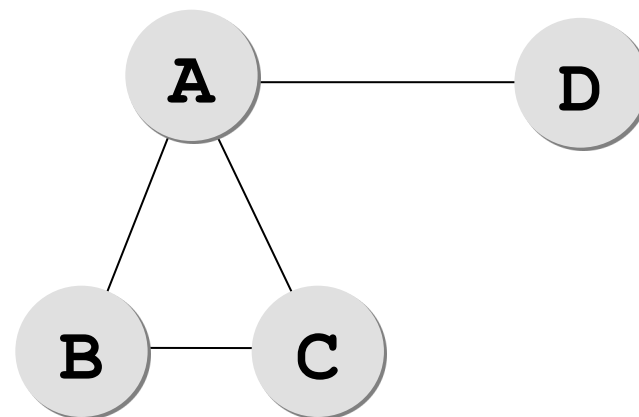
петля

Степень вершины – это количество связанных с ней рёбер (петля считается дважды!).

Постройте матрицу смежности

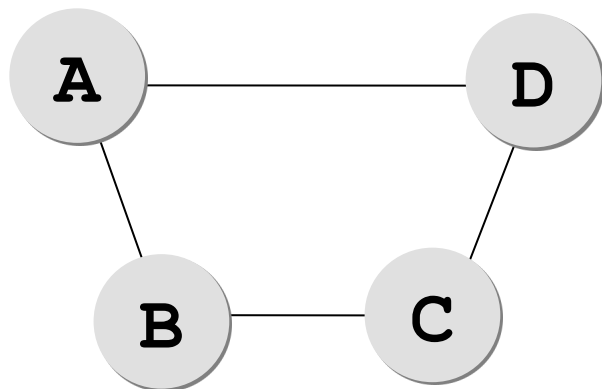


	A	B	C	D
A				
B				
C				
D				

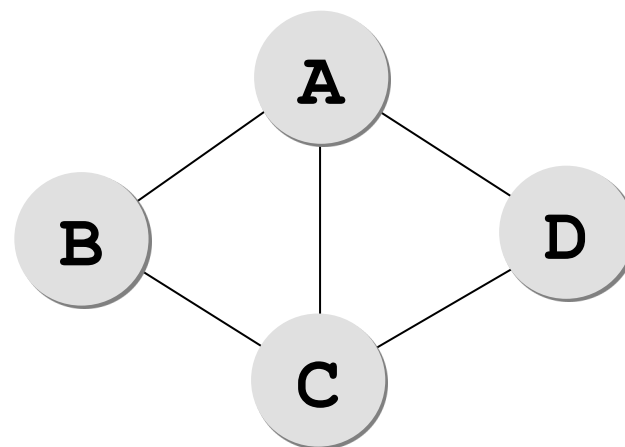


	A	B	C	D
A				
B				
C				
D				

Постройте матрицу смежности



	A	B	C	D
A				
B				
C				
D				



	A	B	C	D
A				
B				
C				
D				

Нарисуйте граф

	A	B	C	D
A		0	1	1
B	0		1	0
C	1	1		0
D	1	0	0	

	A	B	C	D
A		1	0	1
B	1		1	0
C	0	1		1
D	1	0	1	

Нарисуйте граф

	A	B	C	D	E
A		0	1	1	0
B	0		1	0	1
C	1	1		0	1
D	1	0	0		0
E	0	1	1	0	

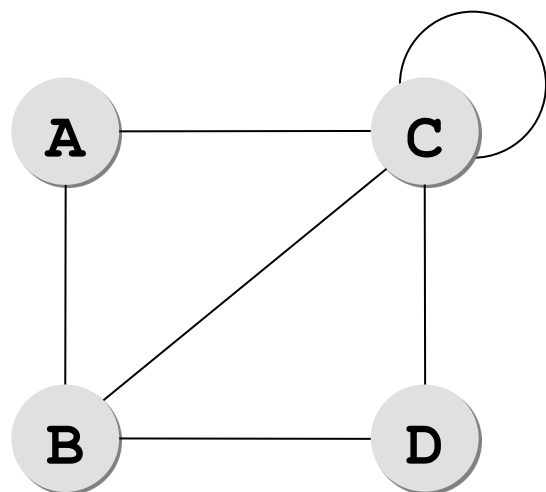
	A	B	C	D	E
A		0	1	1	1
B	0		1	0	0
C	1	1		0	1
D	1	0	0		0
E	1	0	1	0	

Нарисуйте граф

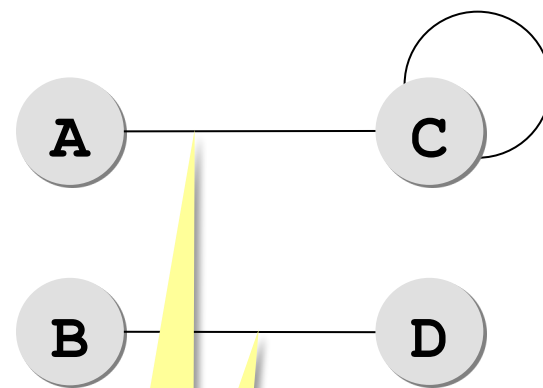
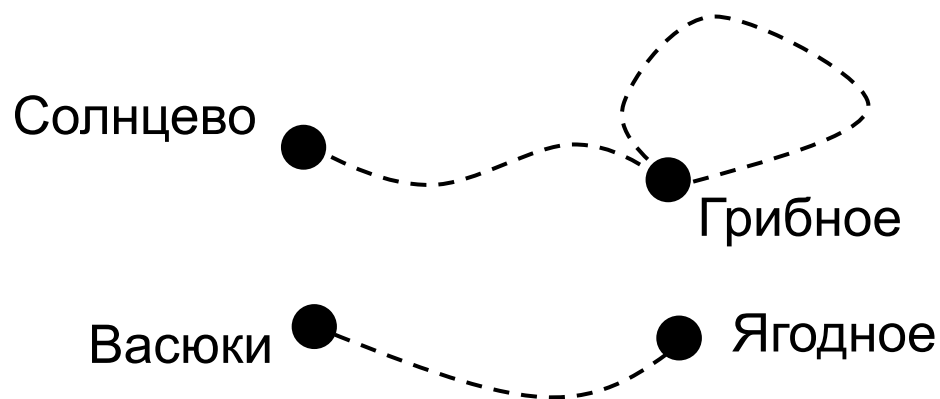
	A	B	C	D	E
A		0	1	1	1
B	0		1	0	1
C	1	1		0	1
D	1	0	0		0
E	1	1	1	0	

	A	B	C	D	E
A		0	0	1	0
B	0		1	0	1
C	0	1		1	1
D	1	0	1		0
E	0	1	1	0	

Связность графа



Связный граф – это граф, между любыми вершинами которого существует путь.

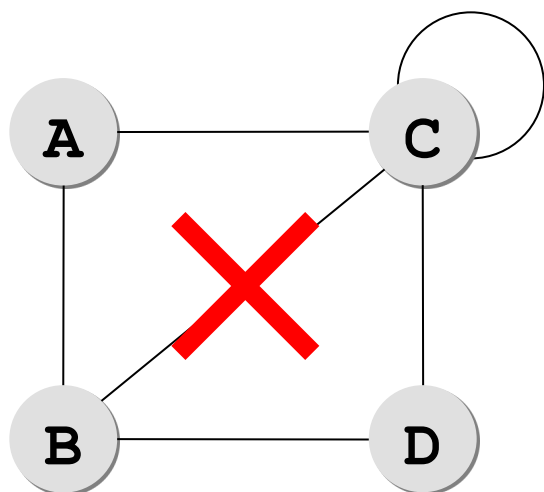


КОМПОНЕНТЫ СВЯЗНОСТИ

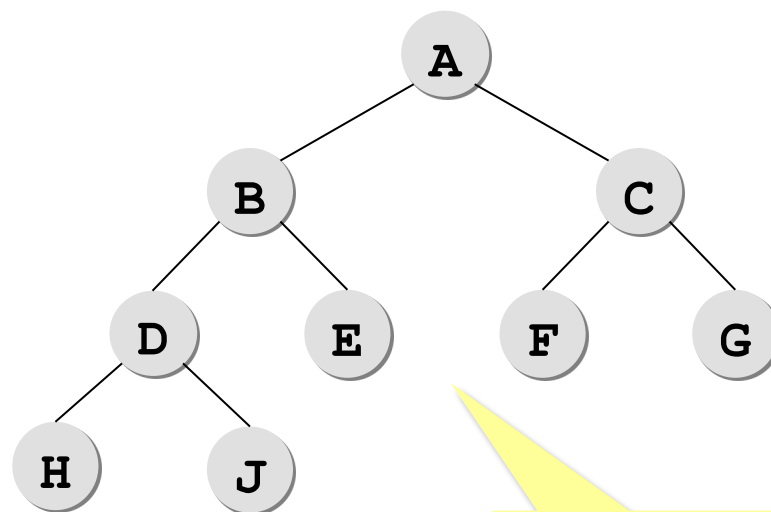
Дерево – это граф?



Дерево – это связный граф без циклов (замкнутых путей).

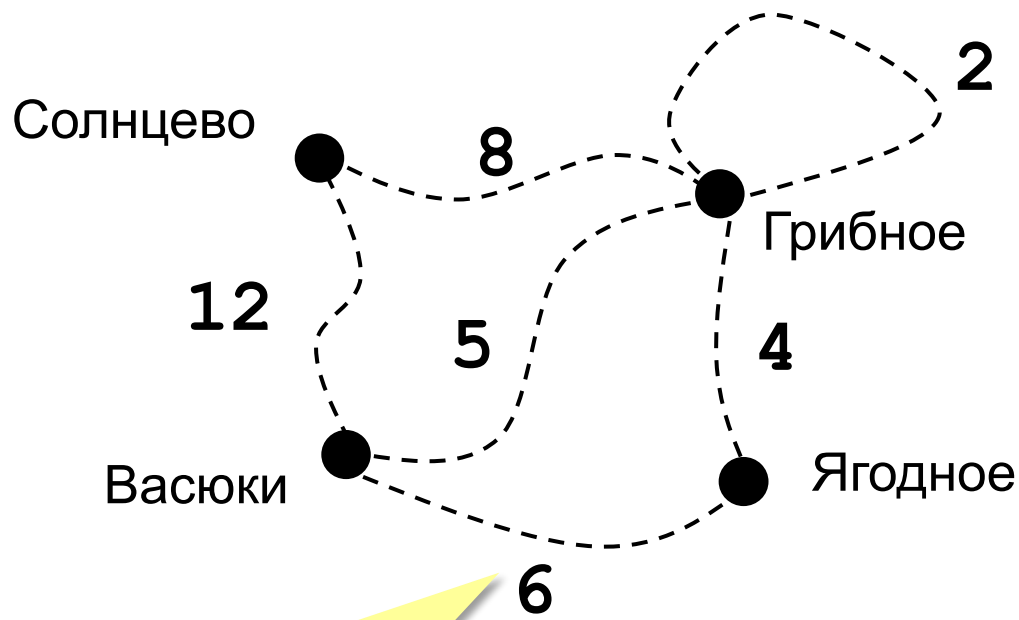


ABC ABDC
BCD CCC...

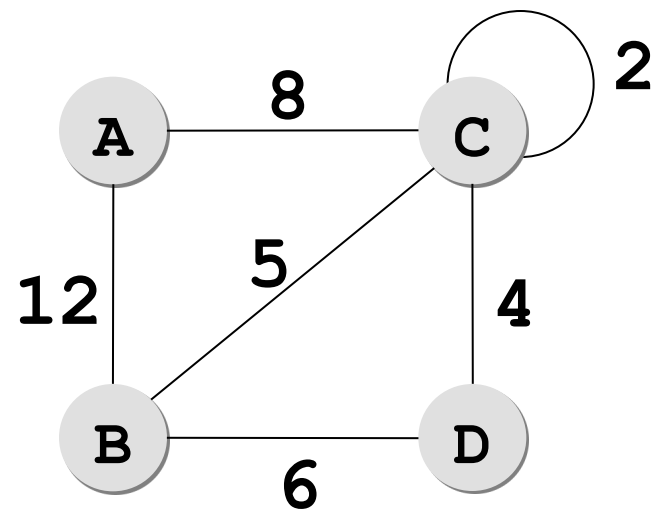


дерево

Взвешенные графы



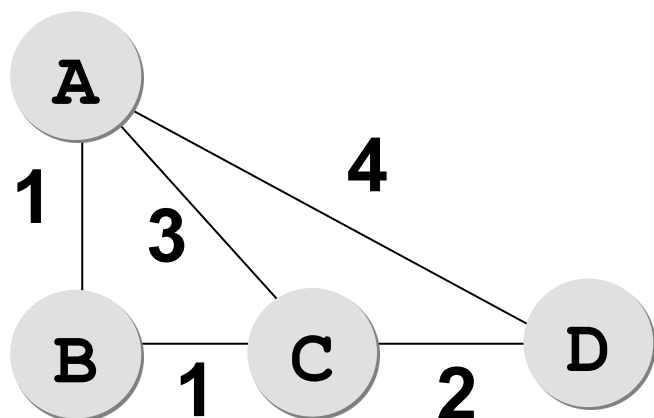
вес ребра



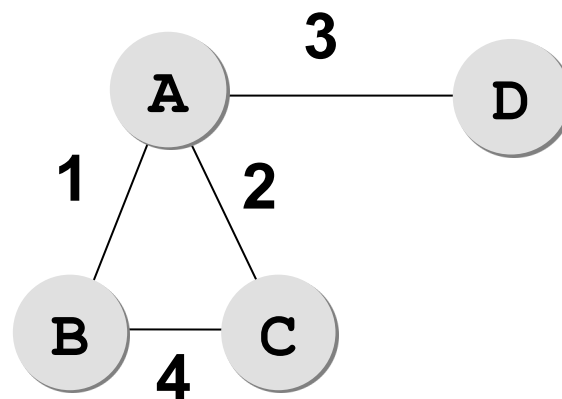
Весовая матрица:

	A	B	C	D
A		12	8	
B	12		5	6
C	8	5	2	4
D		6	4	

Постройте весовую матрицу

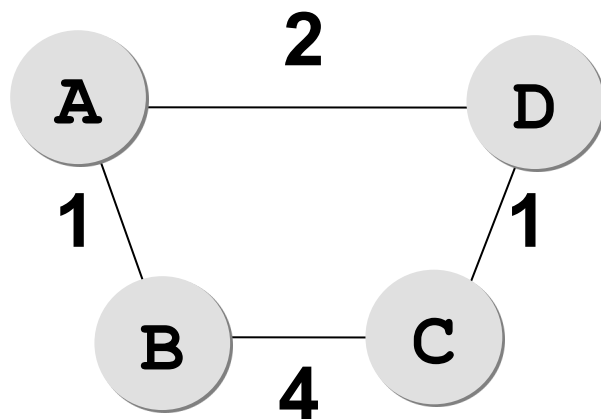


	A	B	C	D
A				
B				
C				
D				

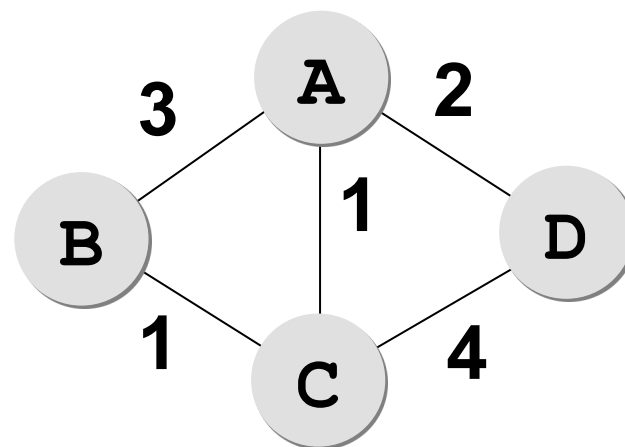


	A	B	C	D
A				
B				
C				
D				

Постройте весовую матрицу



	A	B	C	D
A				
B				
C				
D				



	A	B	C	D
A				
B				
C				
D				

Нарисуйте граф

	A	B	C	D
A		4	3	
B	4			2
C	3			6
D		2	6	

	A	B	C	D
A			2	3
B				4
C	2			5
D	3	4	5	

Нарисуйте граф

	A	B	C	D	E
A		4	3		7
B	4			2	
C	3			6	
D		2	6		1
E	7			1	

	A	B	C	D	E
A		2	5		6
B	2			3	
C	5				
D		3			1
E	6			1	

Нарисуйте граф

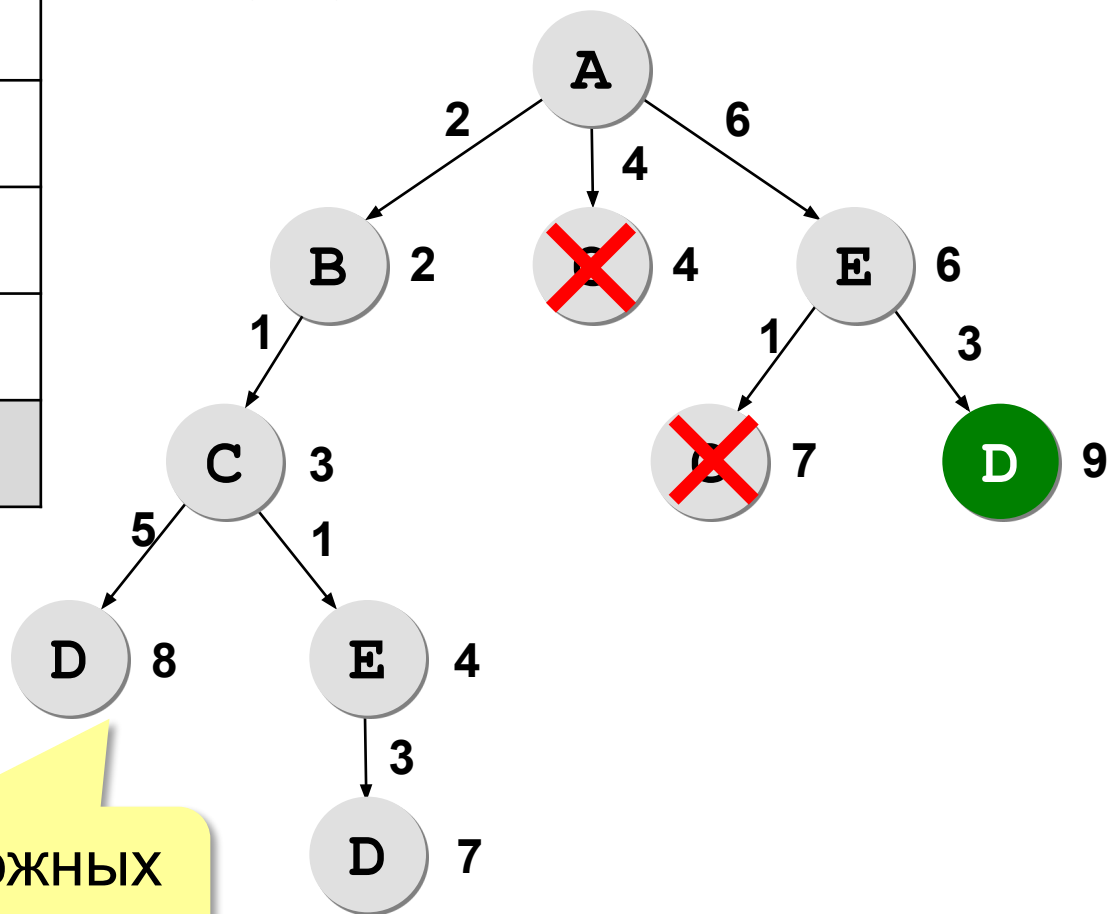
	A	B	C	D	E
A			2	2	6
B				2	
C	2			2	
D	2	2	2		
E	6				

	A	B	C	D	E
A		5	2		6
B	5			5	
C	2			2	
D		5	2		3
E	6			3	

Кратчайший путь (перебор)

	A	B	C	D	E
A		2	4		6
B	2		1		
C	4	1		5	1
D			5		3
E	6		1	3	

Определите кратчайший путь между пунктами A и D.



дерево возможных путей

Кратчайший путь

Определите кратчайший путь между пунктами А и Е.

	А	В	С	Д	Е
А		2	4		
В	2		1		7
С	4	1		3	5
Д			3		3
Е		7	5	3	

Кратчайший путь

Определите кратчайший путь между пунктами А и В.

	А	В	С	Д	Е
А			3	1	
В			4		2
С	3	4			2
Д	1				
Е		2	2		

Кратчайший путь

Определите кратчайший путь между пунктами А и В.

	А	В	С	Д	Е
А			3	1	1
В			4		
С	3	4			2
Д	1				
Е	1		2		

Кратчайший путь

Определите кратчайший путь между пунктами А и В.

	А	В	С	Д	Е
А			3	1	4
В			4		2
С	3	4			2
Д	1				
Е	4	2	2		

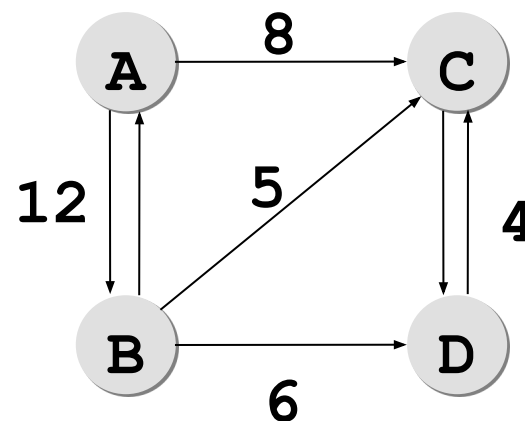
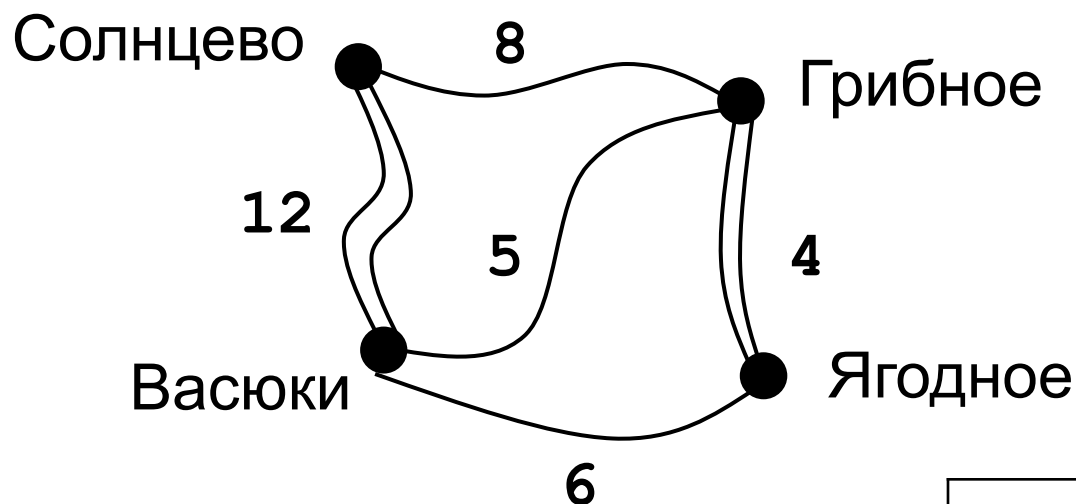
Кратчайший путь

Определите кратчайший путь между пунктами А и В.

	А	В	С	Д	Е
А				1	
В			4		1
С		4		4	2
Д	1		4		
Е		1	2		

Оrientированные графы (орграфы)

Рёбра имеют направление (начало и конец),
рёбра называю дугами.



Весовая матрица
может быть
несимметрична!

	A	B	C	D
A		12	8	
B	12		5	6
C				4
D			4	

Нарисуйте оргграф

	A	B	C	D	E
A			3	1	
B	2		4		2
C	3				
D	1				
E			2		

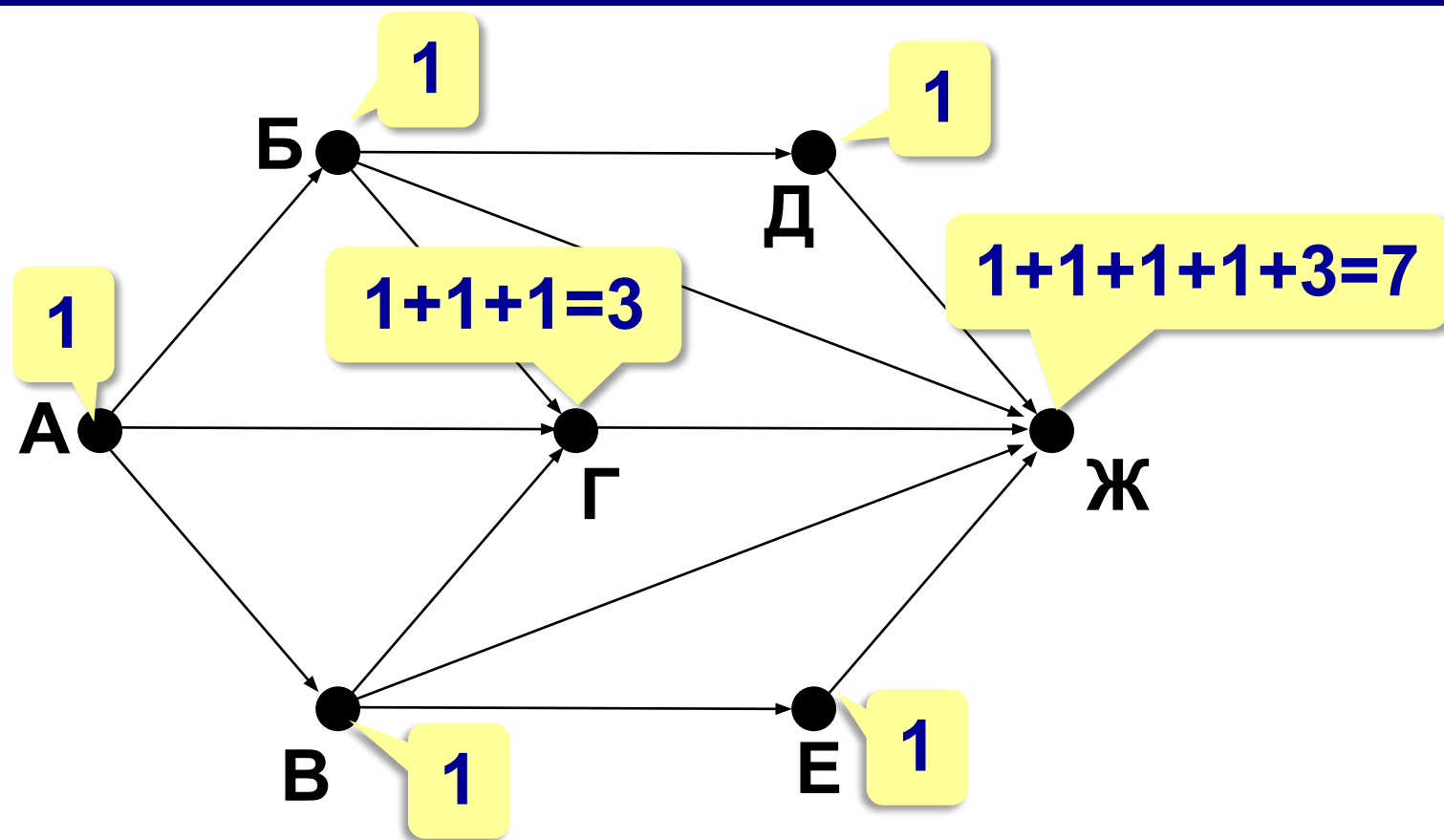
	A	B	C	D	E
A			5	1	
B			6	4	
C	3	4			3
D		2			
E			3		

Нарисуйте оргграф

	A	B	C	D	E
A			3	1	4
B			4		2
C		4			2
D					
E	4		2		

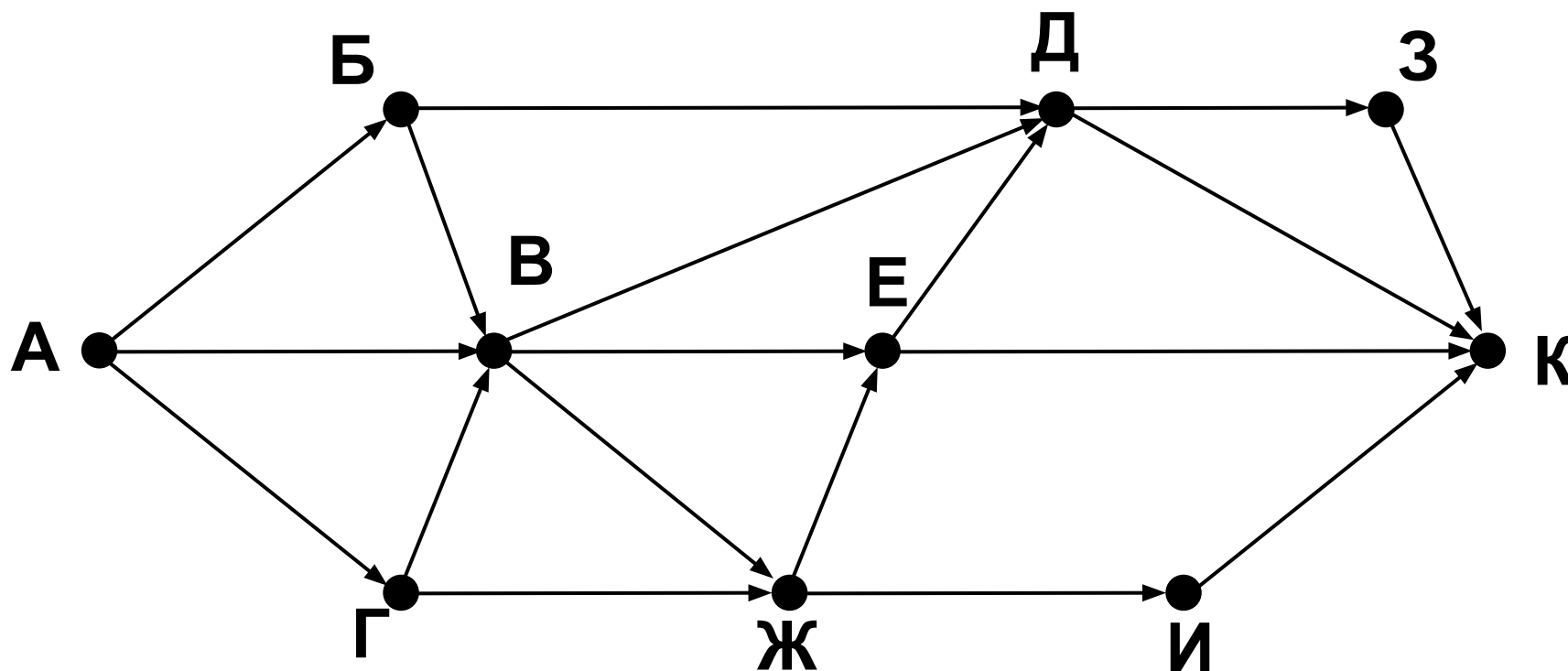
	A	B	C	D	E
A				1	
B			4		1
C	3	4		4	2
D	1	2	4		
E	1	1	2		

Количество путей из А в Ж

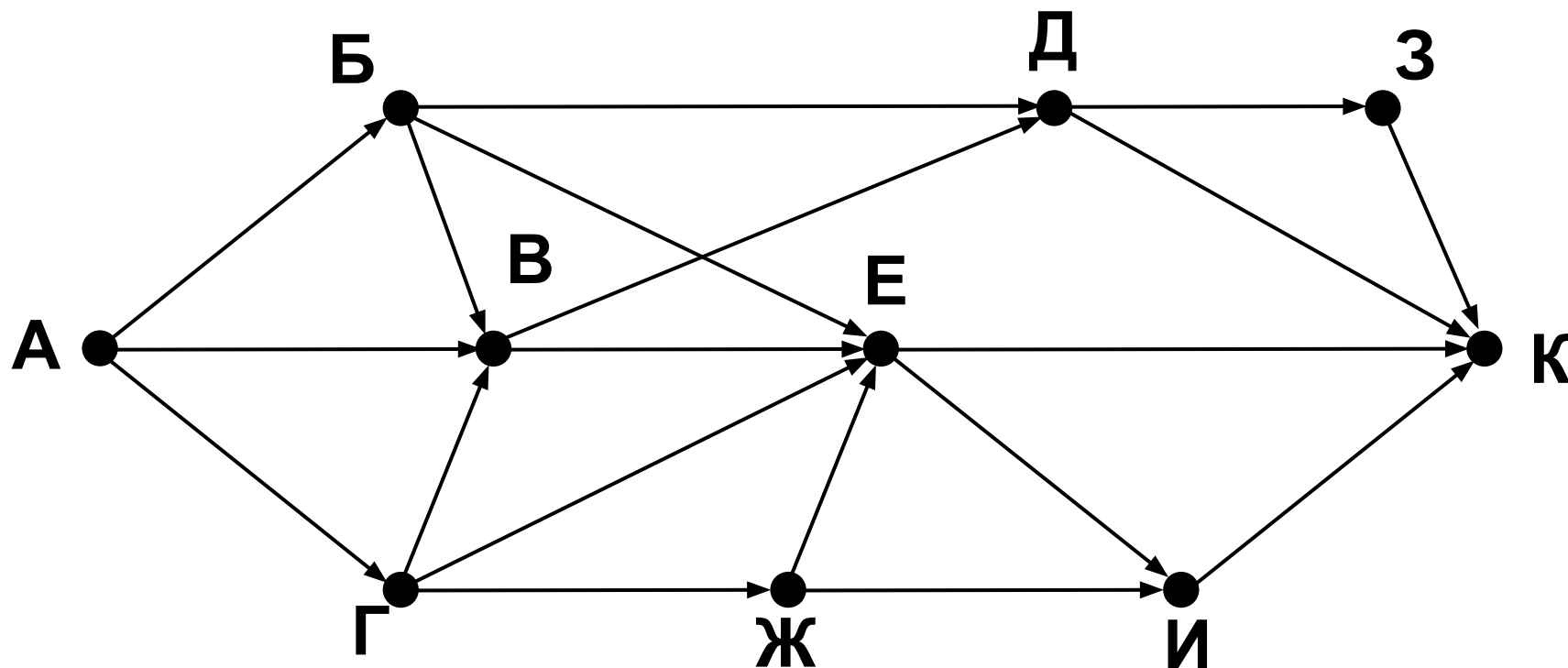


$$N_{\text{Ж}} = N_{\text{Д}} + N_{\text{Б}} + N_{\text{Г}} + N_{\text{В}} + N_{\text{Е}}$$

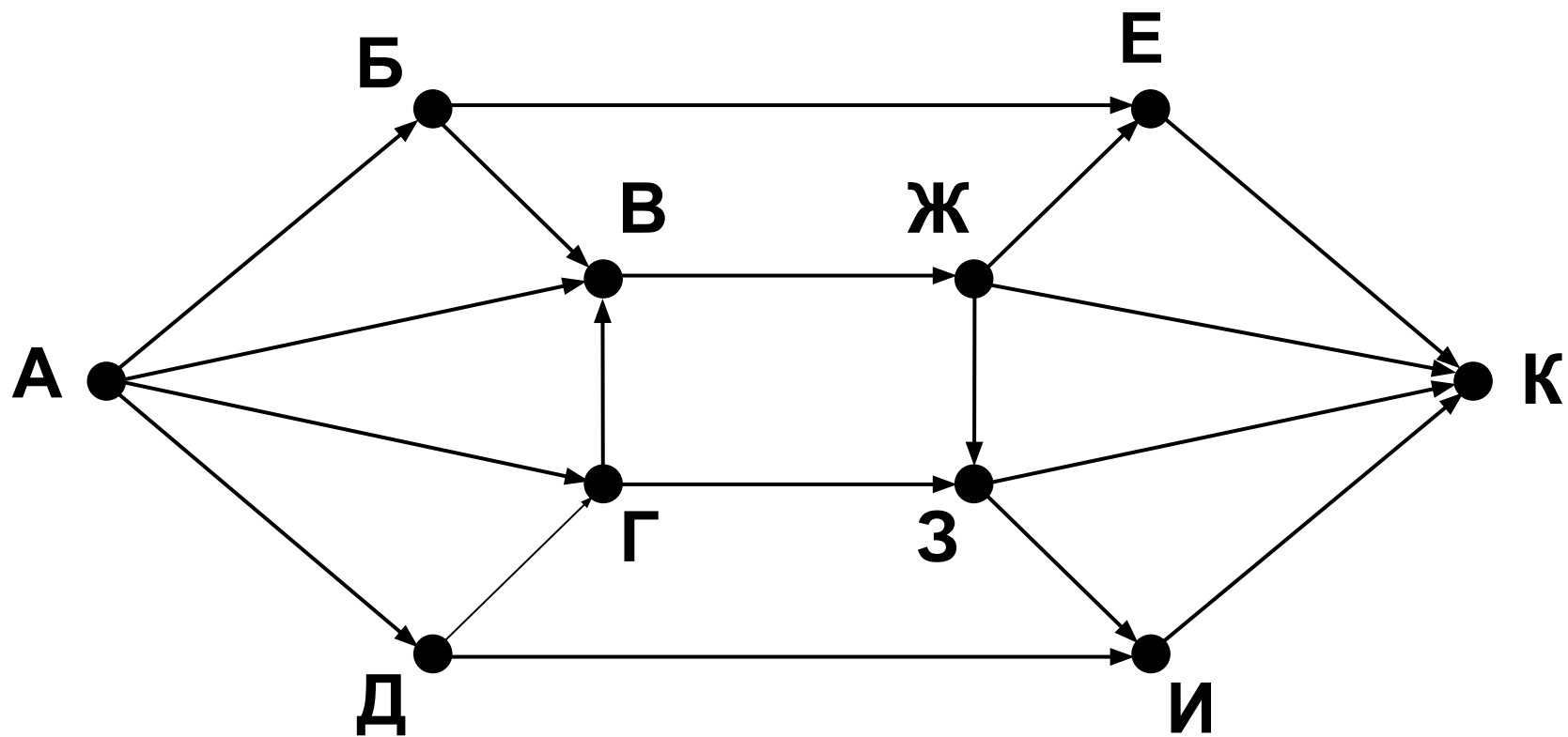
Количество путей из А в К



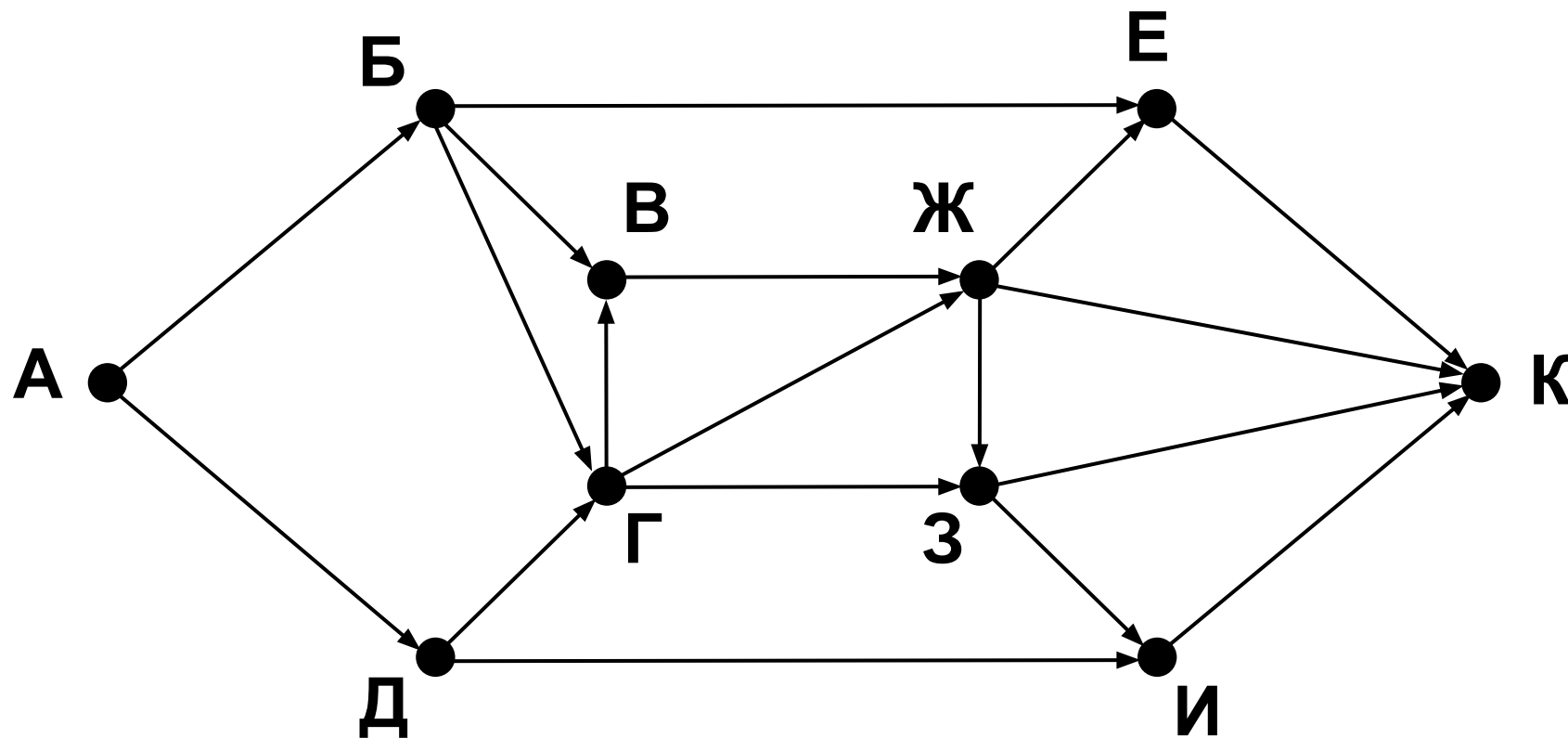
Количество путей из А в К



Количество путей из А в К



Количество путей из А в К



Игровые стратегии

Что такое игровая модель?

Игровая модель — это модель, которая описывает соперничество двух (или более) сторон, каждая из которых преследует свою цель.

Теория игр: как играть, чтобы получить наибольший выигрыш?

Стратегия — это алгоритм игры, который позволяет добиться цели в игре в предположении, что соперники играют безошибочно.

Игры с полной информацией: нет случайностей:

- крестики-нолики
- шашки
- шахматы
- ...



Какие игры с неполной информацией?

Выигрышные и проигрышные позиции

игра без ничьих...

Выигрышная позиция — это такая позиция, в которой игрок, делающий первый ход, может гарантированно выиграть при любой игре соперника, если не сделает ошибку.

Есть **выигрышная стратегия** — алгоритм выбора очередного хода, позволяющий выиграть.

Проигрышная позиция — это такая позиция, в которой игрок, делающий первый ход, обязательно проиграет, если его соперник не сделает ошибку.

Нет выигрышной стратегии...

Выигрышные и проигрышные позиции

ходят

нолики

а)

х		х
○	○	
		х

б)

х		х
	○	
○		х

в)

х	○	
	○	х
		х

г)

х	○	х
х		○

д)

х		
х	○	
○		х

е)

х		
○		х

ж
)

х		○
		х
	○	х

з)

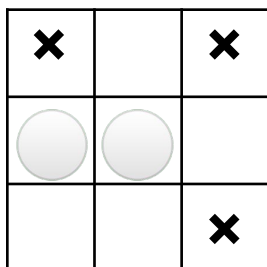
х		х
		○

Выигрышные и проигрышные позиции

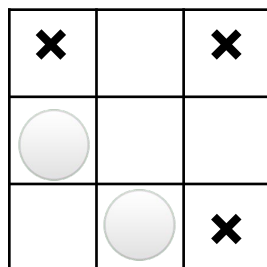
- позиция, из которой все возможные ходы ведут в выигрышные позиции, — **проигрышная**
- позиция, из которой хотя бы один из возможных ходов ведёт в проигрышную позицию, — **выигрышная**

при этом *выигрышная стратегия* состоит в том, чтобы перевести игру в эту проигрышную (для соперника) позицию.

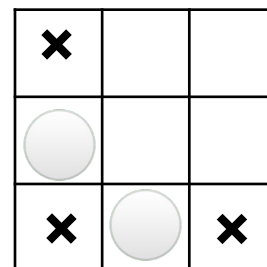
Ходят нолики:



выигрышная



проигрышная



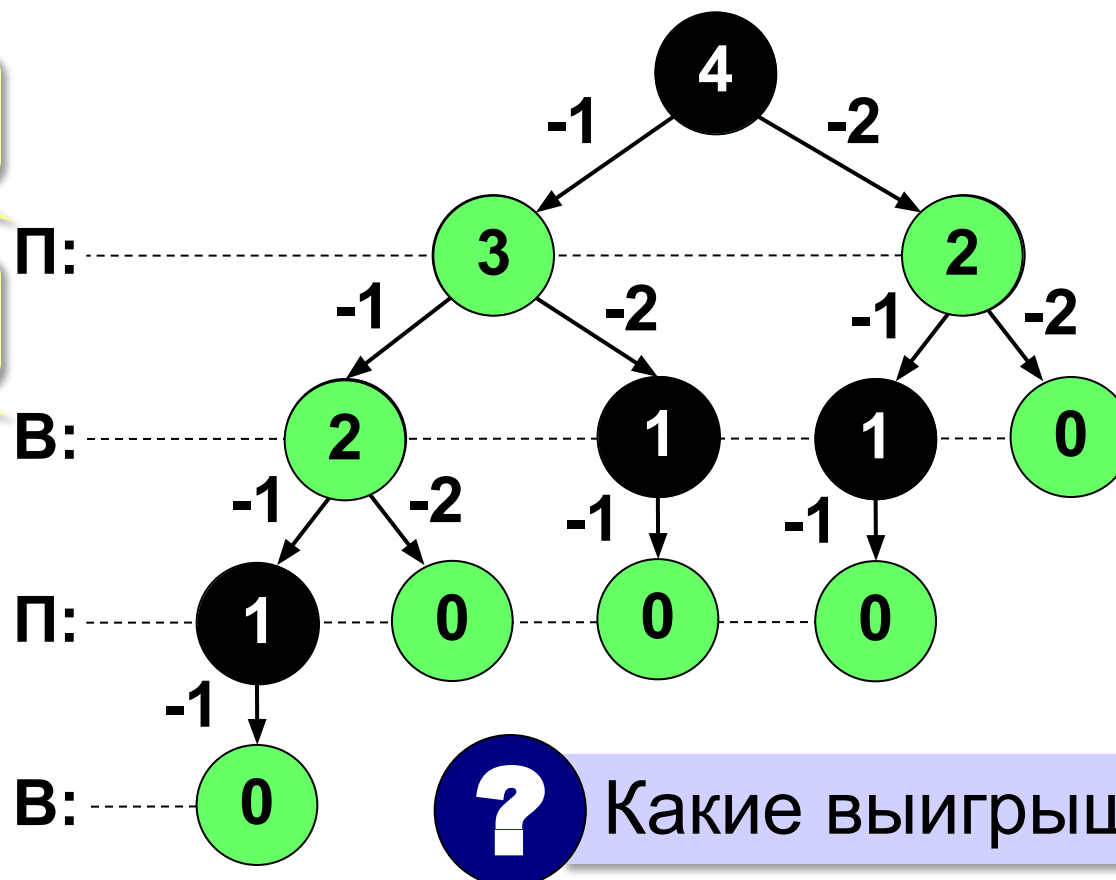
выигрышная

Дерево перебора вариантов

Два игрока, куча из S камней. За один ход игрок может взять **один или два камня**. Тот, кто возьмёт последний камень, проигрывает.

Первый

Второй



Какие выигрышные?

Неполное дерево игры

Цель – доказать выигрыш.

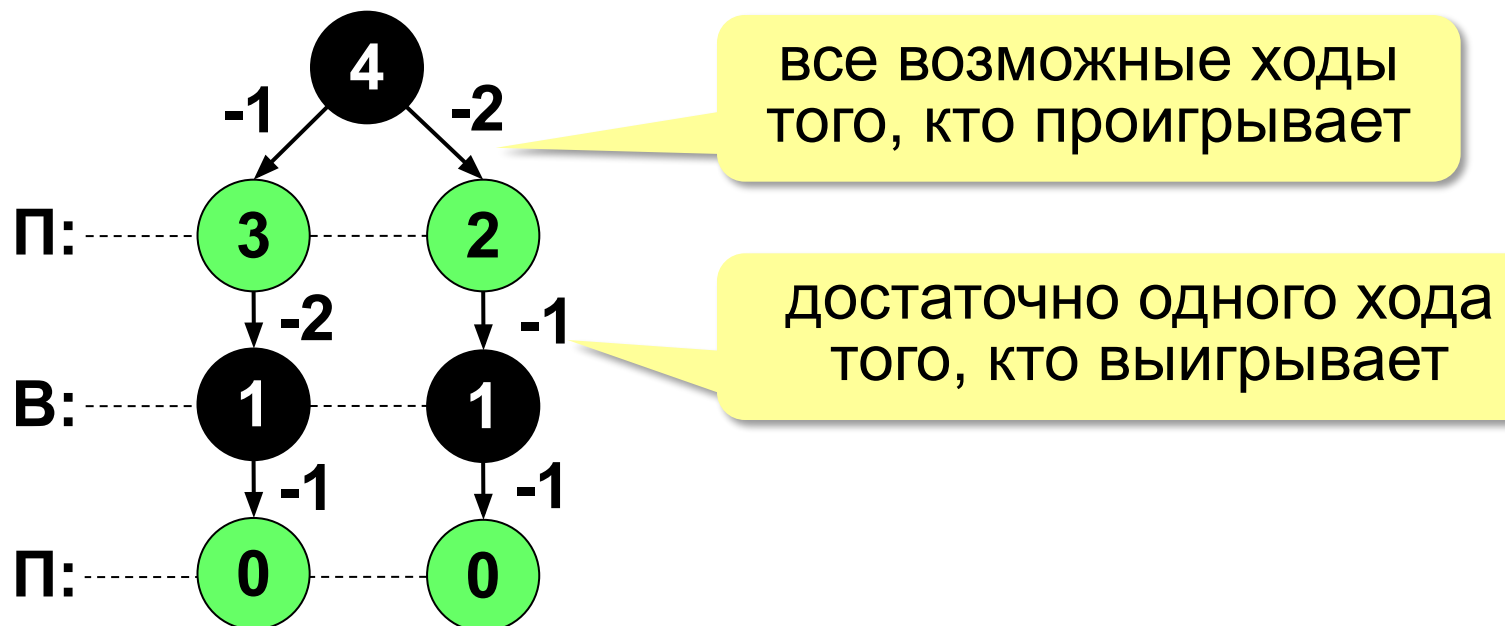
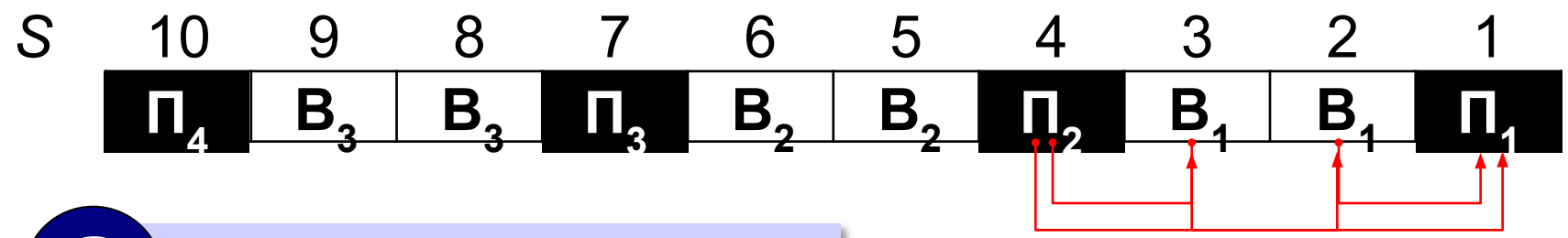


Таблица позиций



? Какова стратегия?

Нужно оставлять сопернику $N = 3 \cdot k + 1$ камней.

Моделирование

Табличные модели. Диаграммы

Таблицы




Свойства

объектов: Фамилия	Имя	Год рождения	Место отдыха
Иванов	Кузьма	1955	о. Валаам
Кузьмин	Сидор	1978	о. Ольхон
Сидоров	Иван	1990	о. Кипр

Марка	Лада Приора	Лада Калина	ВАЗ 2110	ВАЗ 21099
Мощность двигателя, л.с.	98	89	79	70
Максимальная скорость, км/ч	183	165	165	156
Время разгона до 100 км/ч, с	11,5	12,5	14	15

Таблицы

Связи между
объектами:

объектами:		Лада		УАЗ	Тойот а	Форд
Москва		520		210	805	370
Санкт-Петербург		430		350	260	410
Пермь		Петя	Вася	Маша		Даша
Барнаул						
Хабаровск						
Владивосток						
Магадан						

Таблицы

Изменение

День	1	2	3	4	5	6	7
Температура, ° С	15	18	20	17	23	16	19
Давление, мм. рт. ст.	750	748	760	755	770	743	756
Скорость ветра, м/с	5	7	2	9	3	6	4

Оптимальный маршрут

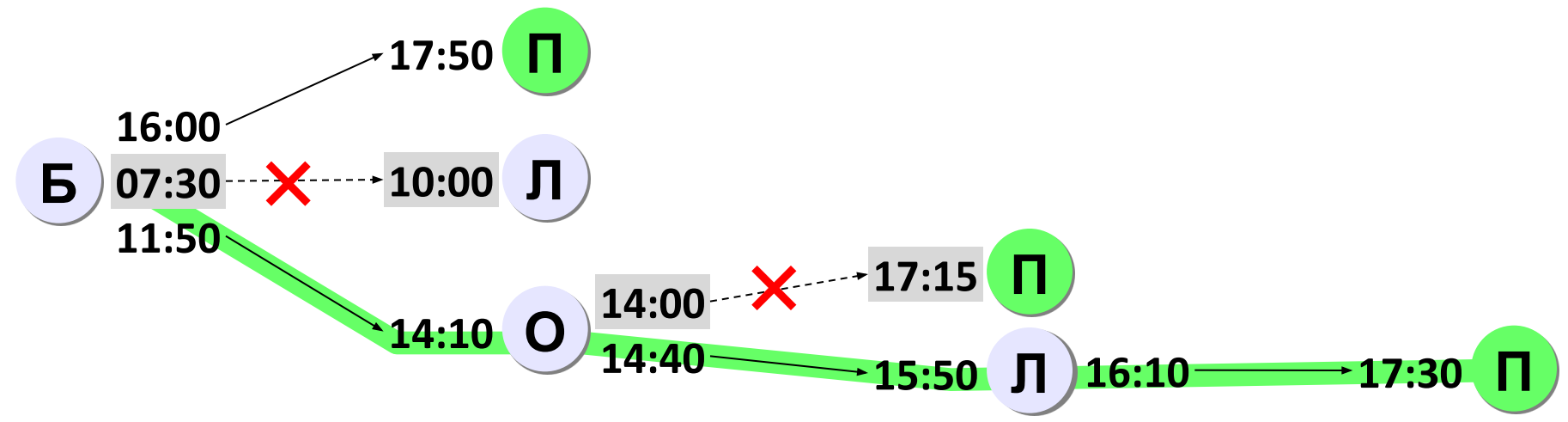
Из	В	Отправл.	Прибытие
Березовое	Лесное	07:30	10:00
Березовое	Осиновое	11:50	14:10
Лесное	Березовое	12:50	15:20
Полевое	Лесное	13:20	14:40
Осиновое	Полевое	14:00	17:15
Лесное	Осиновое	14:20	15:30
Осиновое	Лесное	14:40	15:50
Березовое	Полевое	16:00	17:50
Лесное	Полевое	16:10	17:30
Полевое	Осиновое	17:40	19:55

Березовое:

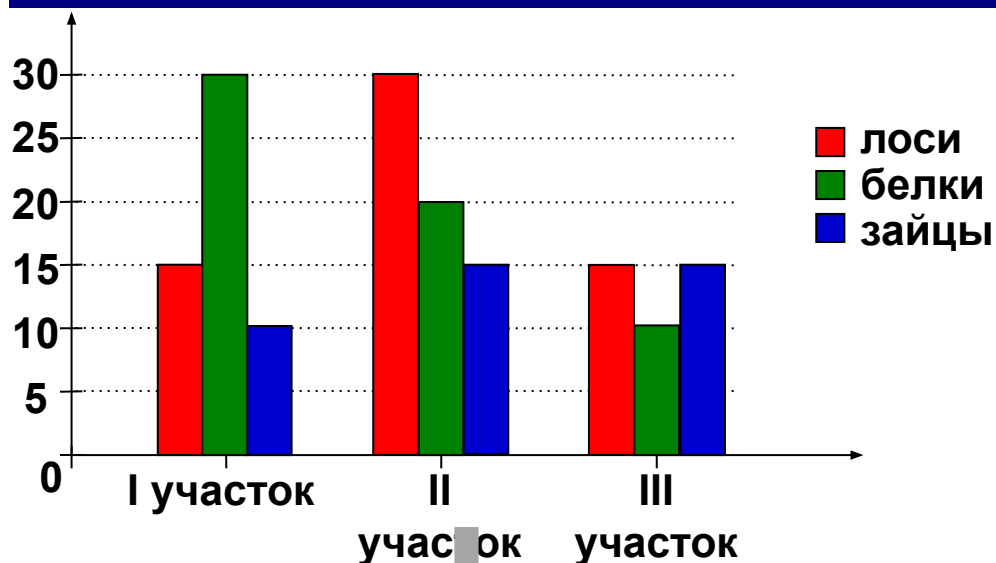
8:00



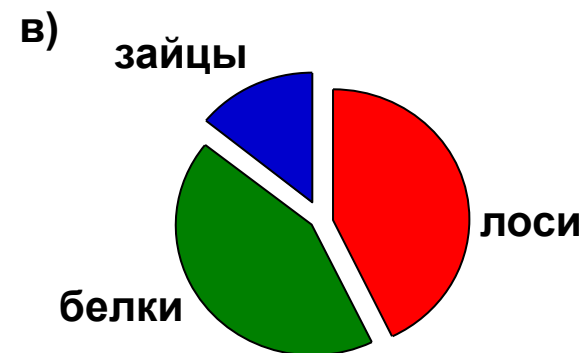
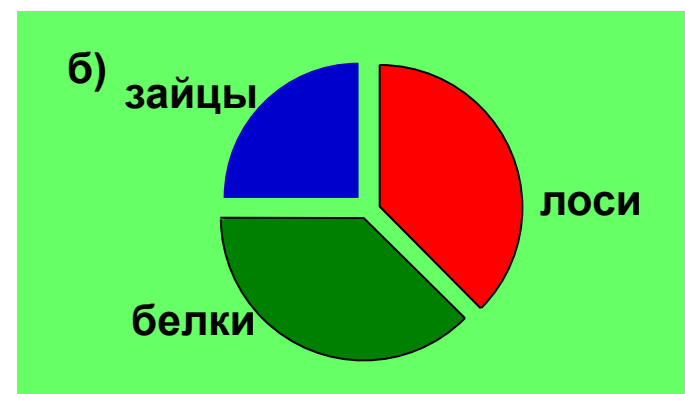
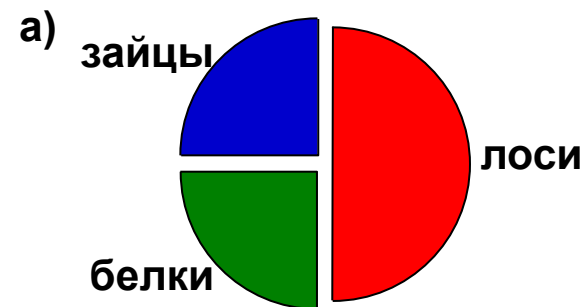
Полевое



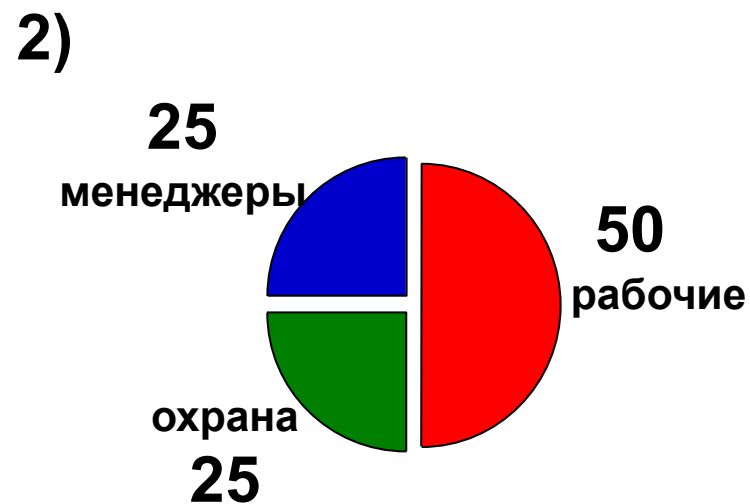
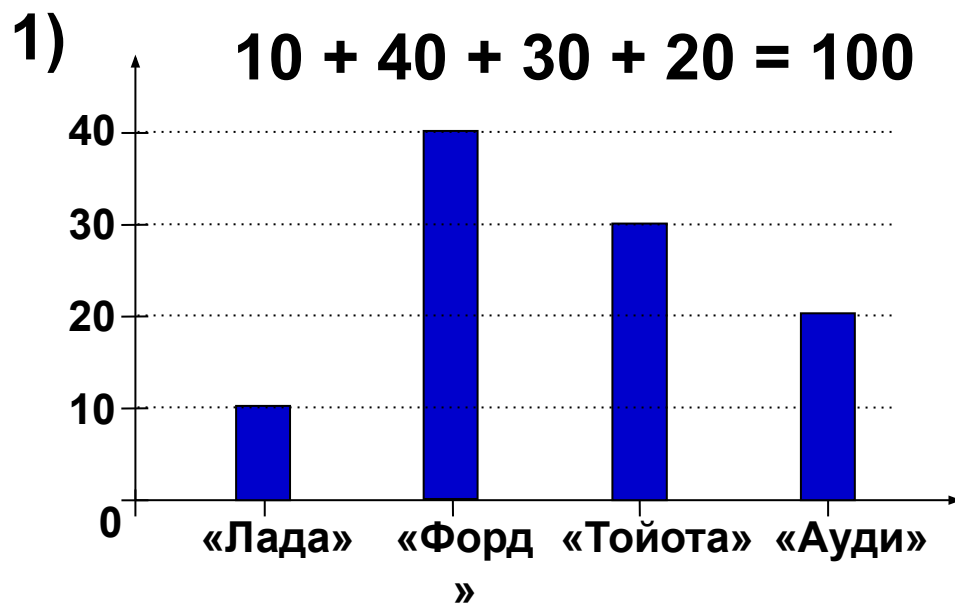
Анализ диаграмм



	I участок	II участок	III участок	всего
лоси	15	30	15	60
белки	30	20	10	60
зайцы	10	15	15	40
всего				160



Анализ диаграмм



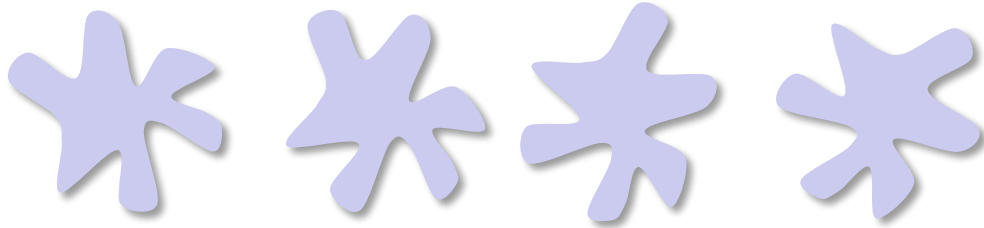
- ~~а) все «Форды» могут принадлежать менеджерам~~
- ~~б) все охранники могут ездить на «Ауди»~~
- в) все «Тойоты» могут принадлежать рабочим
- ~~г) все рабочие могут ездить на «Фордах»~~

Модели и моделирование

Тема 3. Модели биологических систем

(по мотивам учебника А.Г. Гейна и др., Информатика и ИКТ,
10 класс, М.: Просвещение, 2008)

Модель деления

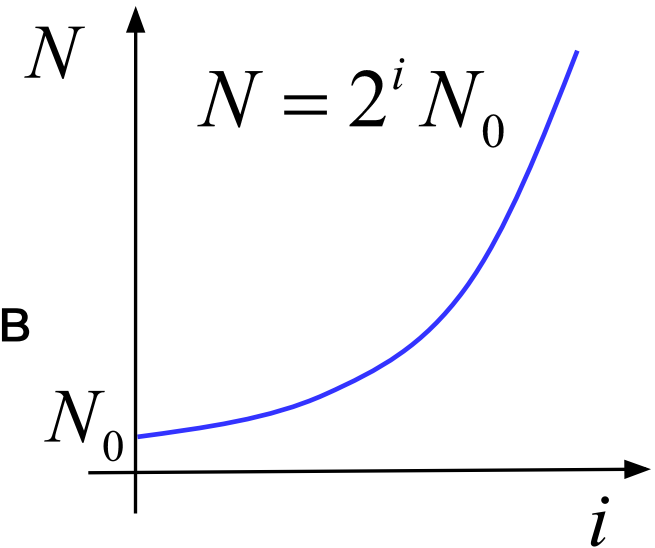


N_0 – начальная численность

$N_1 = 2N_0$ – после 1 цикла деления

$N_2 = 2N_1 = 4N_0$ – после 2-х циклов

$$N_i = 2N_{i-1} = 2^i N_0$$



Особенности модели:

- 1) не учитывается смертность
- 2) не учитывается влияние внешней среды
- 3) не учитывается влияние других видов

Модель неограниченного роста (Т. Мальтус) ¹¹¹

$$N_i = N_{i-1} + K_p \cdot N_{i-1} - K_c \cdot N_{i-1}$$

K_p – коэффициент рождаемости

K_c – коэффициент смертности

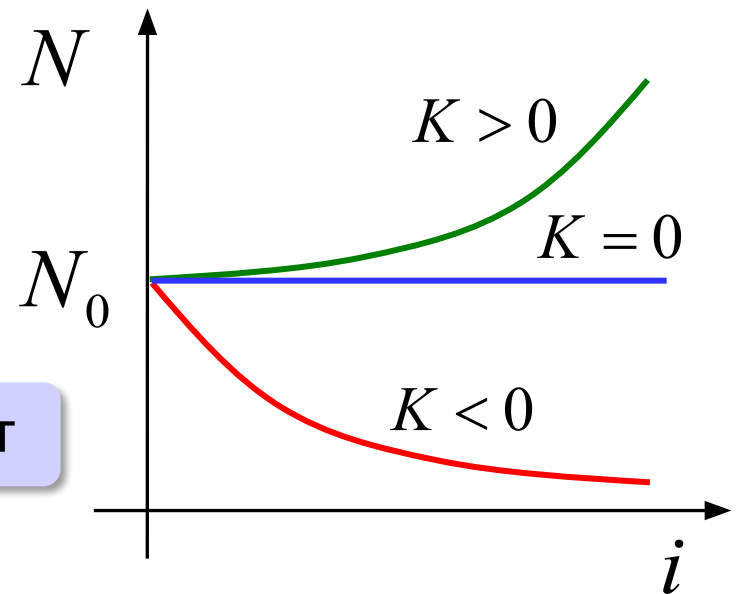
**Коэффициент
прироста**

$$K = K_p - K_c$$

$$N_i = (1 + K) \cdot N_{i-1}$$

$$N_i = N_{i-1} + K \cdot N_{i-1}$$

прирост



Особенности модели:

- 1) не учитывается влияние численности N и внешней среды на K
- 2) не учитывается влияние других видов на K

Модель ограниченного роста (П. Ферхюльст) ¹¹²

L – предельная численность животных

$$N_i = (1 + K_L) \cdot N_{i-1}$$

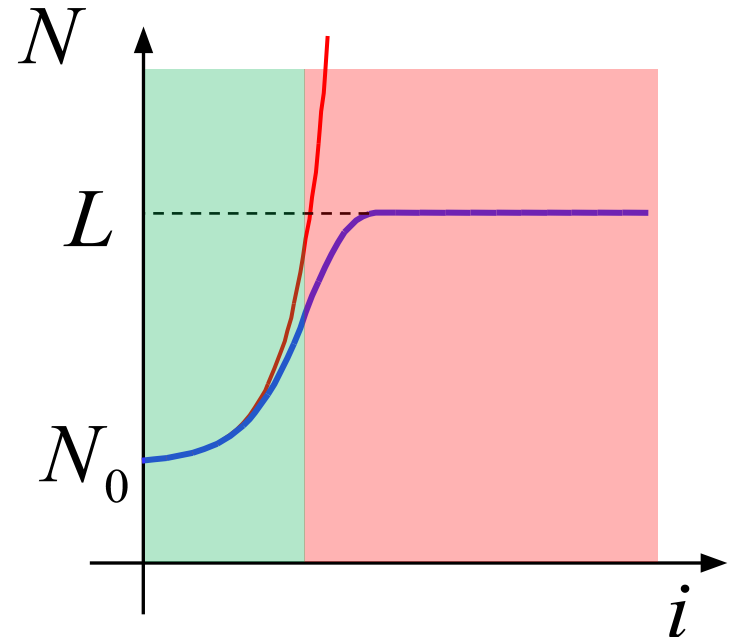
Идеи:

- 1) коэффициент прироста K_L зависит от численности N
- 2) при $N=0$ должно быть $K_L=K$ (начальное значение)
- 3) при $N=L$ должно быть $K_L=0$ (достигнут предел)

$$N_i = \left(1 + K \frac{L - N_{i-1}}{L} \right) \cdot N_{i-1}$$



**Модель адекватна,
если ошибка < 10%!**



Модель с отловом

Примеры: рыбоводческое хозяйство, разведение пушных зверей и т.п.

$$N_i = \left(1 + K \frac{L - N_{i-1}}{L} \right) \cdot N_{i-1} - R$$

ОТЛОВ

? Какая будет численность?

$$N_i = N_{i-1}, \text{ прирост} = \text{отлову}$$

$$N = N + K \frac{L - N}{L} N - R \Rightarrow \frac{K}{L} \cdot N^2 - K \cdot N + R = 0$$

? Сколько можно отловить?

Модель эпидемии гриппа

L – всего жителей N_i – больных в i -ый день
 Z_i – заболевших в i -ый день V_i – выздоровевших
 W_i – всего выздоровевших за i дней

Основное уравнение:

$$N_i = N_{i-1} + Z_i - V_i$$

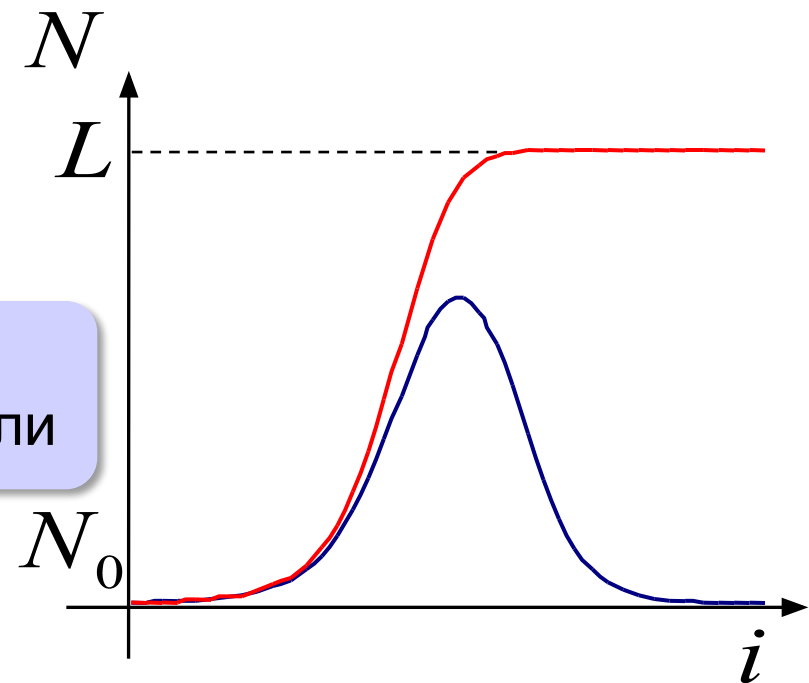
Ограниченный рост:

$$Z_i = K \frac{L - N_{i-1}}{L} \cdot \frac{N_{i-1}}{L} \cdot N_{i-1}$$

Выздоровление (через 7 дней):

$$V_i = Z_{i-7}$$

$$W_i = W_{i-1} + V_i$$



Модель системы «хищник-жертва»

Модель – не-система:



караси



щуки

$$N_i = \left(1 + K \frac{L - N_{i-1}}{L} \right) \cdot N_{i-1}$$

$$Z_i = (1 - d) \cdot Z_{i-1}$$

Модель – система:

- 1) число встреч пропорционально $N_i \cdot Z_i$
- 2) «эффект» пропорционален числу встреч

вымирают
без еды

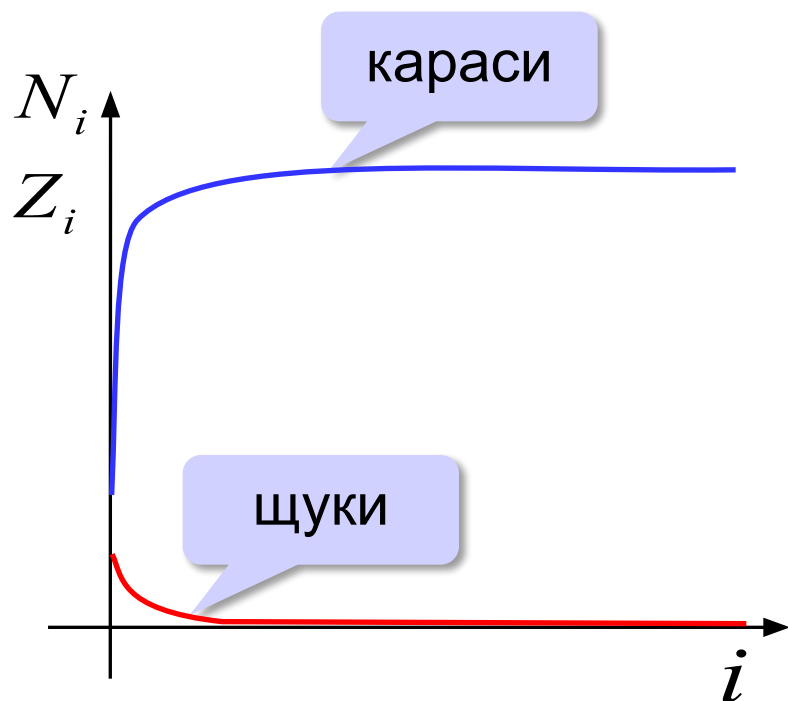
$$N_i = \left(1 + K \frac{L - N_{i-1}}{L} \right) \cdot N_{i-1} - b_1 \cdot N_{i-1} \cdot Z_{i-1}$$

численность
уменьшается

$$Z_i = (1 - d) \cdot Z_{i-1} + b_2 \cdot N_{i-1} \cdot Z_{i-1}$$

численность
увеличивается

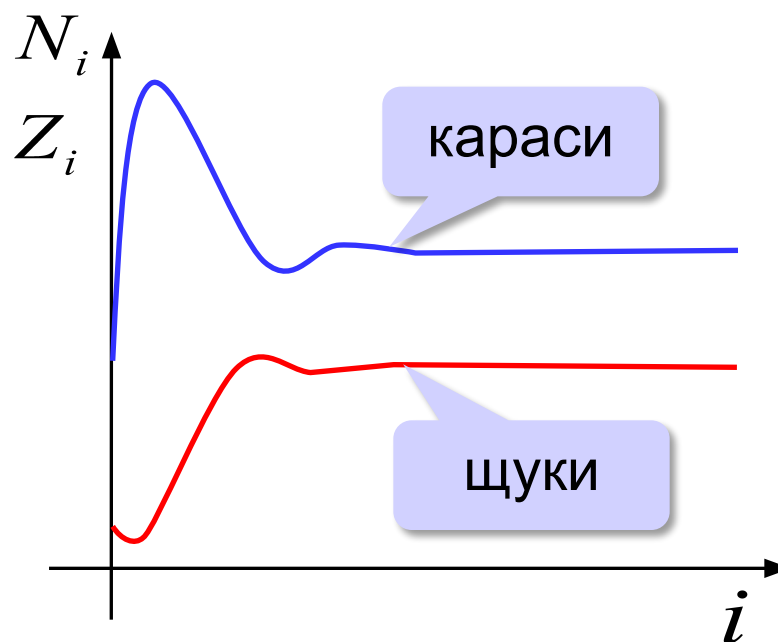
Хищники вымирают:



$$d = 0,8$$

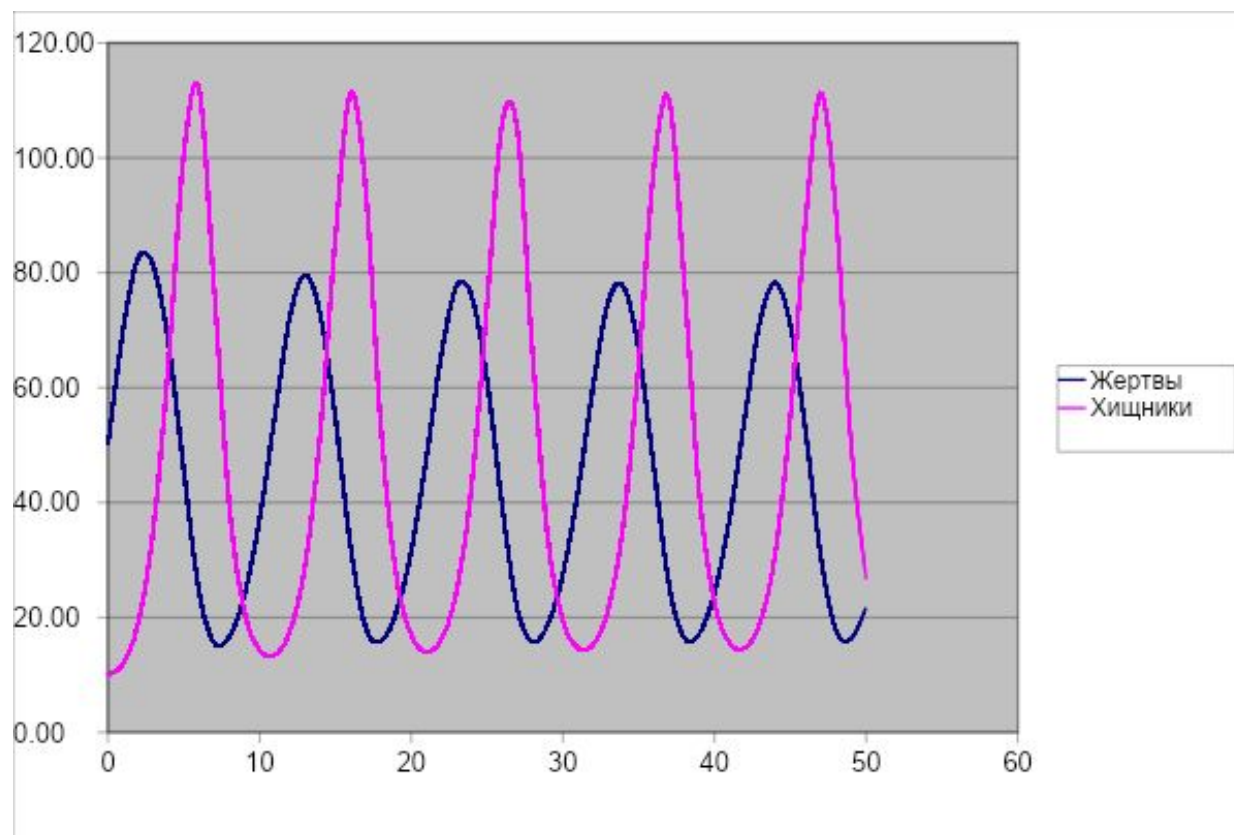
$$b_1 = b_2 = 0,005$$

Равновесие:

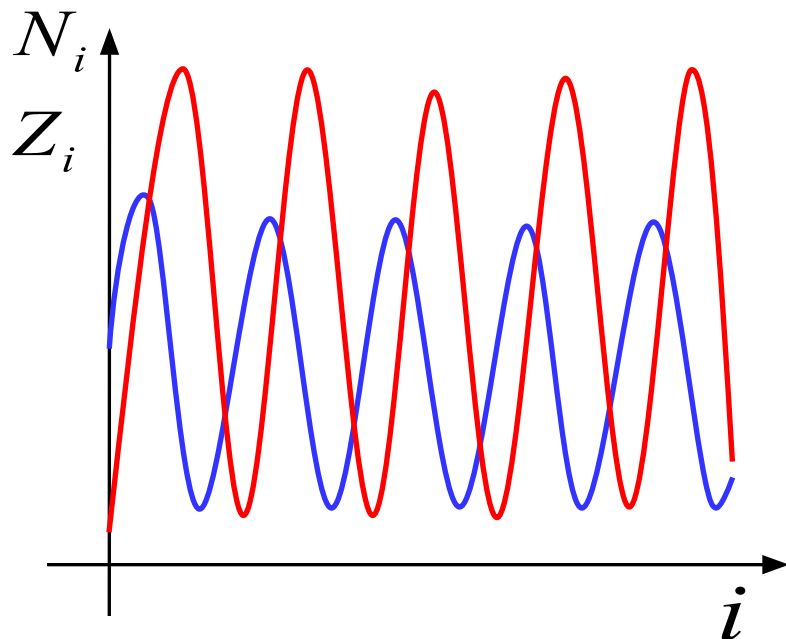


$$d = 0,8$$

$$b_1 = 0,01; \quad b_2 = 0,012$$



Колебания:



$$d = 0,8$$

$$b_1 = 0,01; \quad b_2 = 0,015$$

Модели и моделирование

Тема 4. Моделирование случайных процессов

(по мотивам учебника А.Г. Гейна и др., Информатика и ИКТ,
10 класс, М.: Просвещение, 2008)

Случайные процессы

Случайно...

- 1) встретить друга на улице
- 2) разбить тарелку
- 3) найти 10 рублей
- 4) выиграть в лотерею

Случайный выбор:

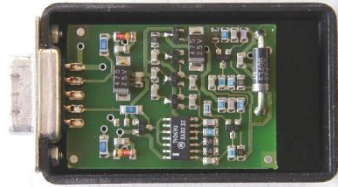
- 1) жеребьевка на соревнованиях
- 2) выигравшие номера в лотерее

Как получить случайность?



Случайные числа на компьютере

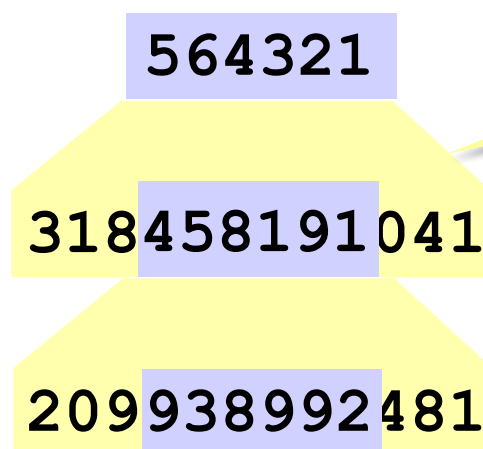
Электронный генератор



- нужно специальное устройство
- нельзя воспроизвести результаты

Псевдослучайные числа – обладают свойствами случайных чисел, но каждое следующее число вычисляется по заданной формуле.

Метод середины квадрата (Дж. фон Нейман)



в квадрате

малый период
(последовательность
повторяется через 10^6 чисел)

Случайные числа на компьютере

Линейный конгруэнтный метод

остаток от деления

$$x_n = (a \cdot x_{n-1} + c) \bmod m$$

a, c, m - целые числа

$$x_n = (16807 \cdot x_{n-1} + 12345) \bmod 1073741823$$

простое число

$2^{30}-1$

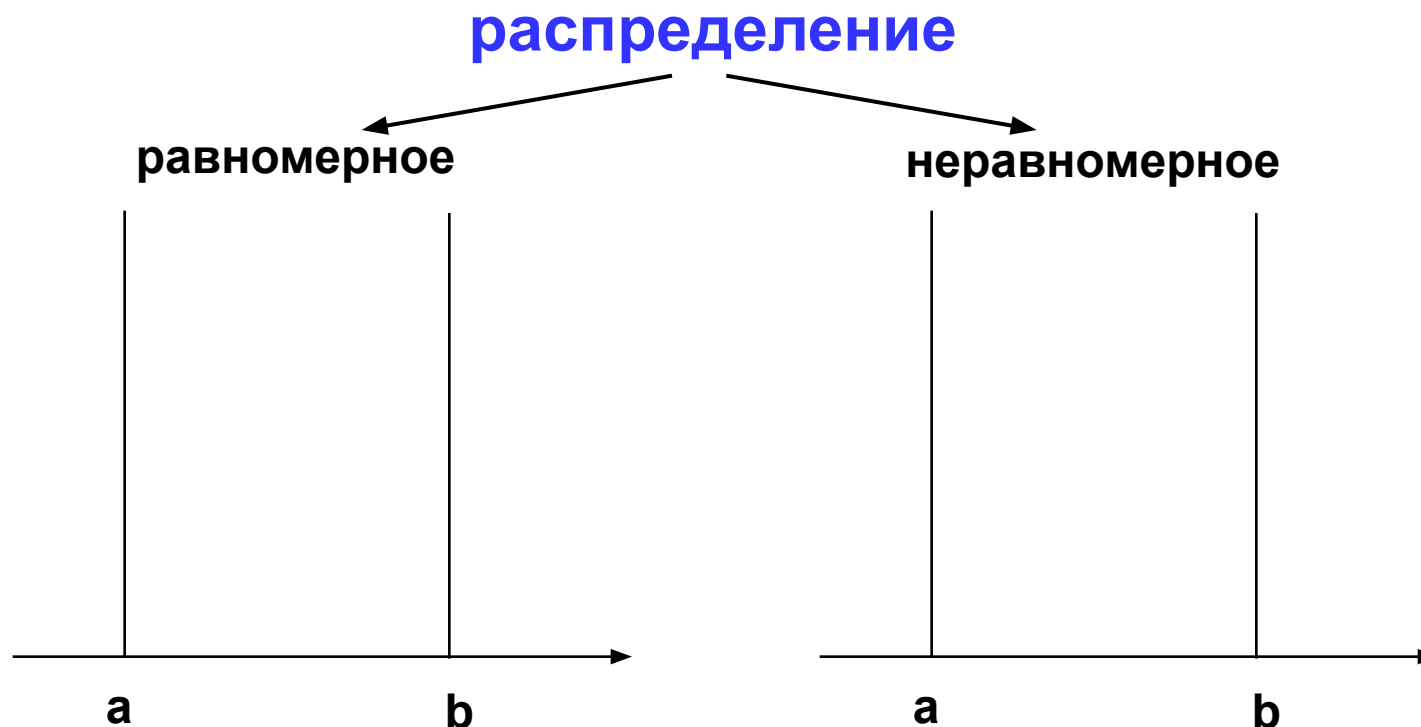


Какой период?

период m

«Вихрь Мерсенна»: период $2^{19937}-1$

Модель: снежинки падают на отрезок $[a, b]$

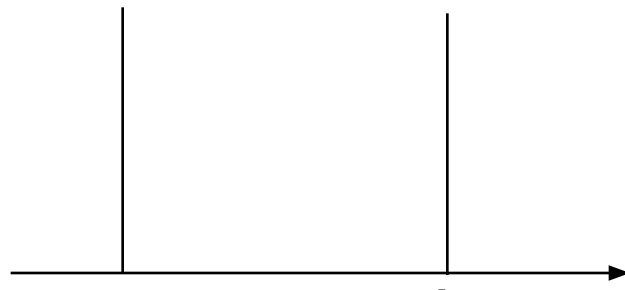


Сколько может быть разных распределений?


Распределение случайных чисел

Особенности:

- распределение – это характеристика **всей последовательности**, а не одного числа
- **равномерное** распределение одно, компьютерные датчики (псевдо)случайных чисел дают равномерное распределение
- неравномерных – много
- любое неравномерное можно получить с помощью равномерного



$$x = \frac{x_1 + x_2}{2}$$



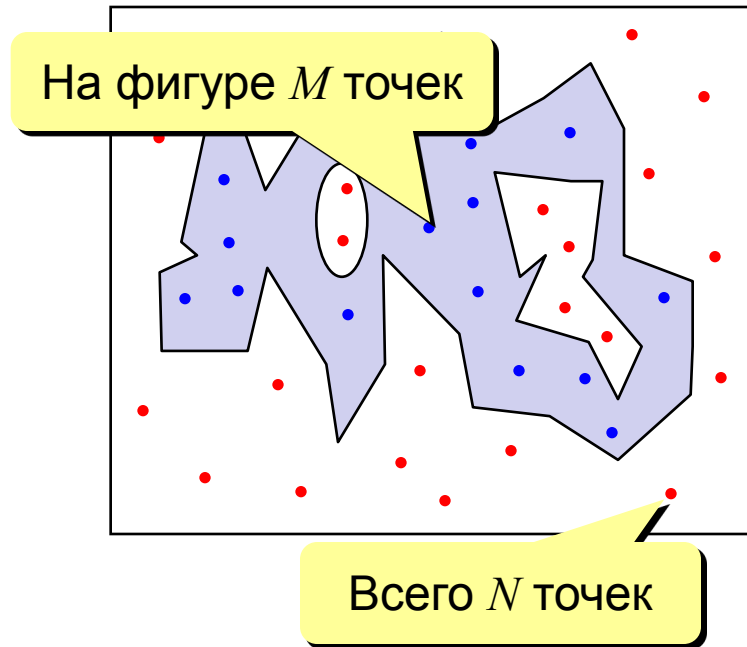
$$x = \frac{x_1 + x_2 + \boxed{} + x_{12}}{12}$$

$x_1, x_2, \boxed{}$ равномерное распределение

Вычисление площади (метод Монте-Карло)

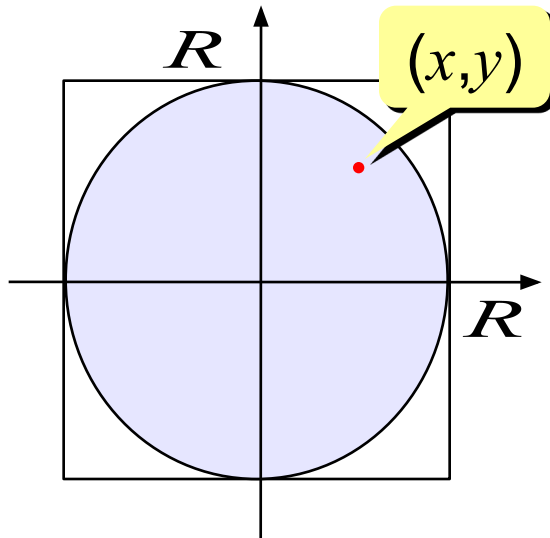
1. Вписываем сложную фигуру в **другую фигуру**, для которой легко вычислить площадь (**прямоугольник**, круг, ...).
2. **Равномерно** N точек со случайными координатами внутри прямоугольника.
3. Подсчитываем количество точек, **попавших на фигуру**: M .
4. Вычисляем **площадь**:

$$\frac{S}{S_0} \approx \frac{M}{N} \Rightarrow S \approx S_0 \cdot \frac{M}{N}$$



1. Метод приближенный.
2. Распределение должно быть равномерным.
3. Чем больше точек, тем точнее.
4. Точность ограничена датчиком случайных чисел.

Вычисление площади



Случайные координаты:

```
x := R*random;  
y := R*random;
```

Когда точка внутри круга?

$$x^2 + y^2 \leq R^2$$

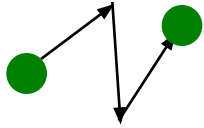
Программа:

```
for i:=1 to N do begin  
  { найти случайные координаты }  
  if x*x + y*y <= R*R then M := M+1;  
end;  
S := 4*R*R*M / N;
```



Как найти число π ?

Броуновское движение



Случайное направление (в рад):

```
alpha := 2*pi*random;
```

Случайный шаг:



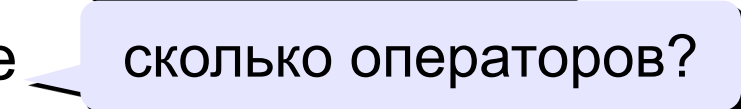
```
h := hMax*random;
```

Программа:

```
for i:=1 to N do begin
  { найти случайное направление и шаг }
  x := x + h*cos(alpha) ;
  y := y + h*sin(alpha) ;
end;
```

Системы массового обслуживания

Примеры:

- 1) звонки на телефонной станции  сколько линий?
- 2) вызовы «скорой помощи»  сколько бригад?
- 3) обслуживание клиентов в банке  сколько операторов?

Особенности:

- 1) клиенты (запросы на обслуживание) поступают постоянно, но через случайные интервалы времени
- 2) время обслуживания каждого клиента – случайная величина



Нужно знать характеристики (распределения) «случайностей»!



Вход клиентов:

- 1) за 1 минуту – до N человек
- 2) равномерное распределение



Обслуживание:

- 1) от T_{min} до T_{max} минут
- 2) равномерное распределение



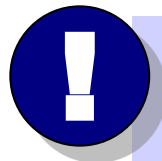
Сколько нужно касс, чтобы клиенты стояли в очереди не более Q минут?

Клиенты в банке

Число клиентов в помещении банка:

было пришли ушли

$N := N + in - out;$



Допущение: клиенты распределены по кассам равномерно!

Количество касс: K

Средняя длина очереди: $\frac{N}{K}$

Допустимая длина очереди: $\frac{N}{K} \leq Q$

Клиенты в банке

Пришли за очередную минуту:

округление

```
in := round(N*random) ;
```

Случайное время обслуживания:

```
T := Tmin + (Tmax - Tmin)*random;
```



Каждый оператор за эту минуту обслужит
клиентов!

 $\frac{1}{T}$

Обслужены за очередную минуту и выходят:

```
out := K / T;
```

Клиенты в банке (программа)

период моделирования L минут

```
count := 0; { счетчик «плохих» минут }  
for i:=1 to L do begin  
    in := { случайное число входящих }  
    out := { случайное число обслуженных }  
    N := N + in - out;  
    if N > Q*K then  
        count := count + 1;  
end;  
writeln(count/L:0:2) ;
```



Что выводится?

