Лекція 3. Момент імпульсу. Закон збереження моменту імпульсу

Пла
н

1. Абсолютно тверде тіло та його рух
2. Моменти фізичних величин , що використовуються для опису обертального руху
3. Момент сили та проекція моменту сили на ось обертання
4. Момент імпульсу МТ. Теорема про момент імпульсу МТ
5. Момент імпульсу СМТ. Теорема про момент імпульсу СМТ.
6. Закон збереження моменту імпульсу

1. Абсолютно тверде тіло та його рух

фізична абстракція

Абсолютно тверде тіло (АТТ)- тіло, відстань між окремими точками якого
не змінюється ні при яких умовах

Любий рух АТТ розкладається на 2 елементарних види :

Поступальний – при якому всі точки мають однакові траєкторії та лінійні швидкості $\vec{V}$

Обертальний – при якому всі точки описують навколо осі обертання концентричні кола з однаковою кутовою швидкістю $\vec{\omega}$

Для АТТ можливі 3 незалежних обертальних рухи
(маємо три взаємно перпендикулярні осі)

Усього АТТ має 6 ступенів свободи (3-оберталтних, 3-поступальних)

Для поступального руху зручно слідкувати за однією точкою – центром інерції АТТ $\vec{R}_{\text{ці}}$

Рівняння руху має вигляд

$$M\ddot{\vec{R}}_{\text{ці}} = \sum_{i=1}^{N} \vec{F}_{\text{i}}$$

2. Моменти фізичних величин, що використовуються для опису обертального руху

Для опису обертального руху використовуються векторні добутки радіус вектора $\vec{r}$ на фізичні величини $\vec{F}, \vec{P}$, які звуться моментами цих величин

Для прикладу розглянемо задачу:

треба **малою силою** $\vec{f}_2$ **перебороти велику** $\vec{F}_1$

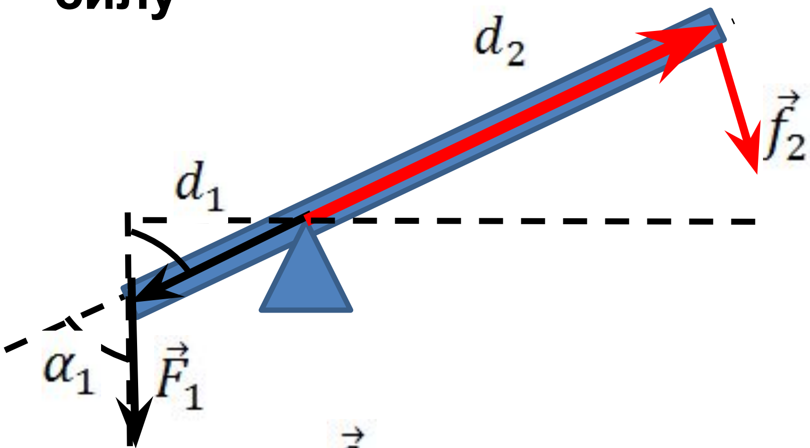
руки

2. Моменти фізичних величин, що використовуються для опису обертального руху

Для опису обертального руху використовуються векторні добутки радіус вектора $\vec{r}$ на фізичні величини $\vec{F}, \vec{P}$, які звуться моментами цих величин

Для прикладу розглянемо задачу:

треба **малою силою** $\vec{f}_2$ **перебороти велику** $\vec{F}_1$ **силу**



Це можливо, якщо цій силі створити перепону вигляді важеля

Маємо:

важіль - АТТ у вигляді стержня та точку опори

малою силою $\vec{f}_2$ створюємо , обертальний момент

який буде перевищувати обертальний момент сили $\vec{F}_1$

$$\vec{M}_2 = \vec{r}_2 \times \vec{f}_2 = [\vec{r}_2 , \vec{f}_2]$$

$$\vec{M}_1 = \vec{r}_1 \times \vec{F}_1 = [\vec{r}_1 , \vec{F}_1]$$

$$|\vec{M}_1| = |\vec{r}_1| \cdot |\vec{F}_1| \sin\alpha_1 = F_1 d_1$$

Момент сили

$$\vec{M} = \vec{r} \times \vec{F} = [\vec{r} , \vec{F}]$$

За величиною

$$|\vec{M}| = |\vec{r}| \cdot |\vec{F}| \sin\alpha = Fd$$

Плече сили $d = r \sin\alpha$

За напрямком момент сили визначається за правилом правої руки

3. Момент сили та проекція моменту сили на ось обертання

Момент сили $\vec{M} = \vec{r} \times \vec{F} = [\vec{r}, \vec{F}]$

Плече сили $d = r \sin \alpha$

За величиною $|\vec{M}| = |\vec{r}| \cdot |\vec{F}| \sin \alpha = Fd$

За напрямком момент сили визначається за правилом правої руки

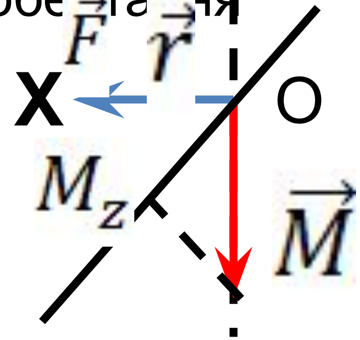
Момент сили $\vec{M}$ викликає або блокує обертання

Ось моменту сили перпендикулярна площині векторів $\vec{r}, \vec{F}$

І якщо момент прикладений до тіла , де немає закріпленої осі, то напрямок ось обертання буде співпадати з напрямком моменту сили

І кажуть, що це момент відносно точки О

Але можлива ситуація, коли тіло має фіксовану ось обертання

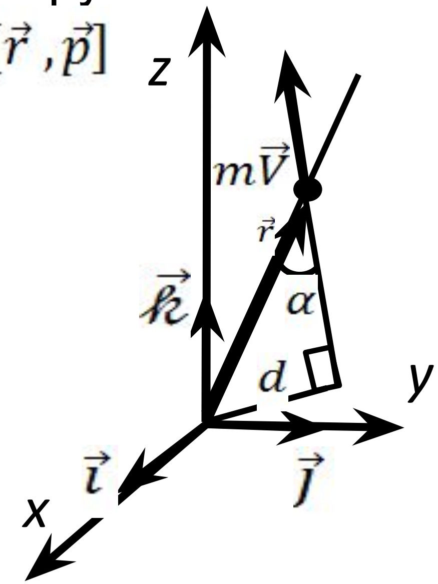


Тоді проекція $\vec{M}$ на напрямок фіксованої осі обертання називається моментом сили відносно осі M_z , так як тільки вона буде викликати обертання

Момент імпульсу МТ. Теорема про момент імпульсу

Момент імпульсу МТ – це векторний добуток радіус-вектору МТ на її імпульс

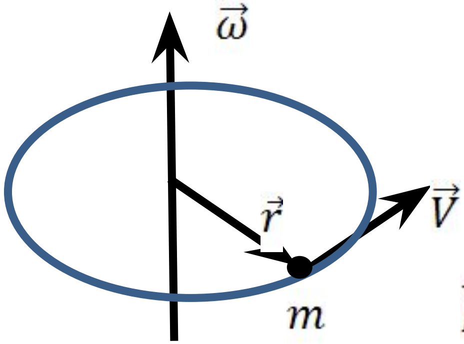
$$\vec{L} = \vec{r} \times \vec{p} = [\vec{r}, \vec{p}]$$



За величиною:

$$|\vec{L}| = |\vec{r}| \cdot |\vec{p}| \sin\alpha = pd \,,$$ де $d = r\sin\alpha$ - плече імпульсу,

За напрямком: співпадає з напрямком кутової швидкості $\vec{\omega}$, якщо точку спостереження вибрано в центрі



$$\boxed{\vec{V} = [\vec{\omega}, \vec{r}]}$$

$$\vec{L} = [\vec{r}, \vec{p}] = [\vec{r}, m\vec{V}] = m[\vec{r}, \vec{V}] =$$

$$= m[\vec{r}, [\vec{\omega}, \vec{r}]] = m\left(\vec{\omega}(\vec{r}, \vec{r}) - \vec{r}\underbrace{(\vec{r}, \vec{\omega})}_{0}\right) = mr^2\vec{\omega}$$

$\vec{L} = J\vec{\omega}$, де $J = mr^2$ - момент інерції МТ

Теорема про момент імпульсу МТ

$$\frac{d}{dt}\vec{L} = \sum_{i=1}^{N} \vec{M}_i$$

Доказ:

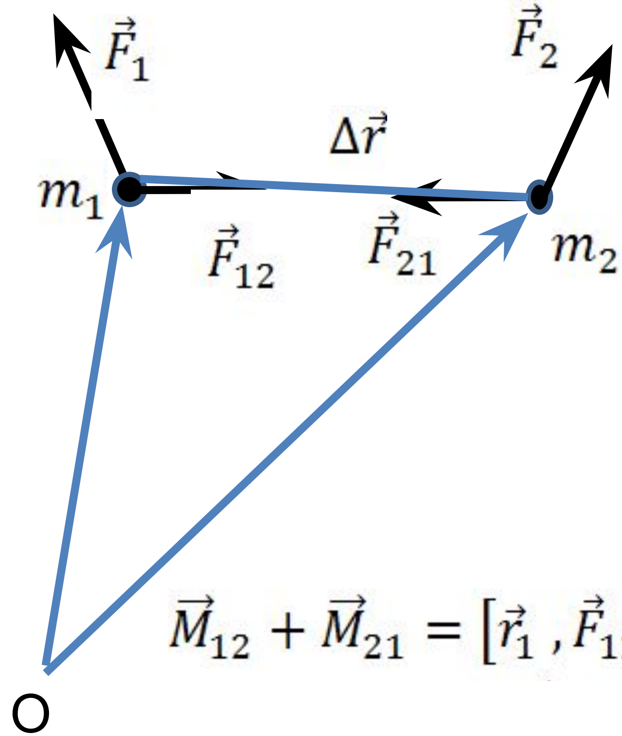
$$\frac{d}{dt}\vec{L} = \frac{d}{dt}[\vec{r}, \vec{p}] = \overbrace{\left[\frac{d}{dt}\vec{r}, \vec{p}\right]}^{0} + \left[\vec{r}, \frac{d}{dt}\vec{p}\right] = \left[\vec{r}, \sum_{i=1}^{N} \vec{F}_i\right] = \sum_{i=1}^{N} [\vec{r}, \vec{F}_i] = \sum_{i=1}^{N} \vec{M}_i$$

Момент імпульсу СМТ. Теорема про момент імпульсу СМТ

Момент імпульсу СМТ $\vec{L} = \sum_{i=1}^{N} \vec{L}_i$

Докажемо теорему про момент імпульсу СМТ

Швидкість зміни моменту імпульсу СМТ дорівнює векторній сумі моментів всіх зовнішніх сил $\frac{d}{dt}\vec{L} = \sum_{i=1}^{N} \vec{M}_i^{\text{зовн}}$



На прикладі двох МТ: $\vec{L} = \vec{L}_1 + \vec{L}_2$

$$\frac{d}{dt}\vec{L} = \frac{d}{dt}\vec{L}_1 + \frac{d}{dt}\vec{L}_2 = \vec{M}_1 + \vec{M}_{12} + \vec{M}_2 + \vec{M}_{21}$$

$$\vec{M}_{12} = [\vec{r}_1, \vec{F}_{12}] \qquad \vec{M}_{21} = [\vec{r}_2, \vec{F}_{21}] = -[\vec{r}_2, \vec{F}_{12}]$$

$$\vec{M}_{12} + \vec{M}_{21} = [\vec{r}_1, \vec{F}_{12}] - [\vec{r}_2, \vec{F}_{12}] = [(\vec{r}_1 - \vec{r}_2), \vec{F}_{12}] = [\Delta\vec{r}, \vec{F}_{12}] = 0$$

$$\frac{d}{dt}\vec{L} = \vec{M}_1 + \vec{M}_2 = \sum_{i=1}^{N} \vec{M}_i^{\text{зовн}}$$

Закон збереження моменту імпульсу СМТ

Наслідком з теореми про момент імпульсу СМТ

Швидкість зміни моменту імпульсу СМТ дорівнює векторній сумі моментів всіх зовнішніх сил

$$\frac{d}{dt}\vec{L} = \sum_{i=1}^{N} \vec{M}_i^{\text{зовн}}$$

є закон збереження моменту імпульсу СМТ

$$\vec{L}\Big|_{\sum_{i=1}^{N} \vec{M}_i^{\text{зовн}}} = const$$

якщо сума моментів зовнішніх сил дорівнює 0