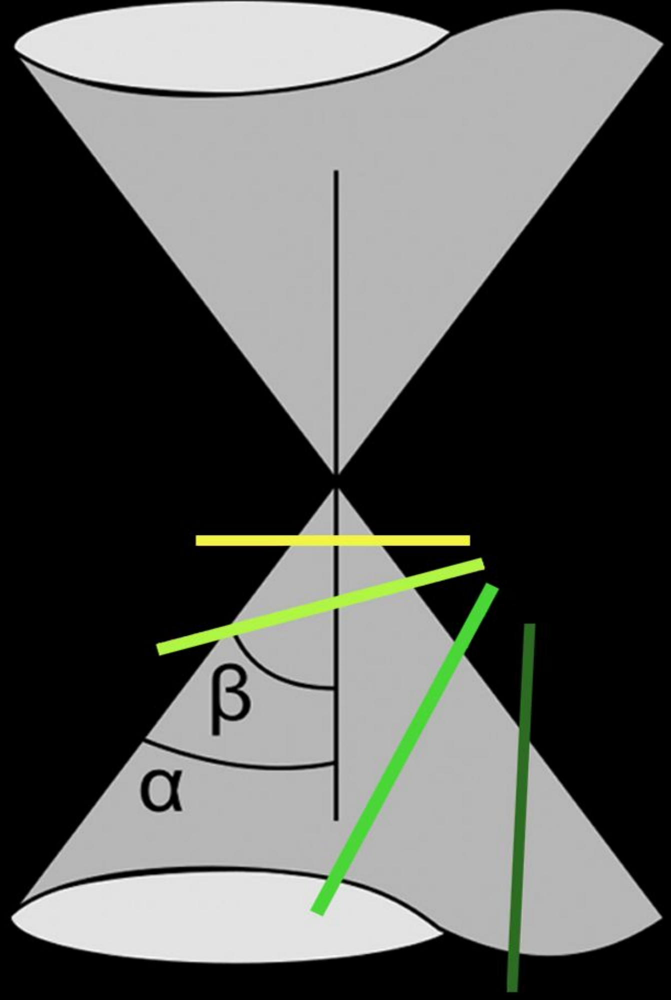
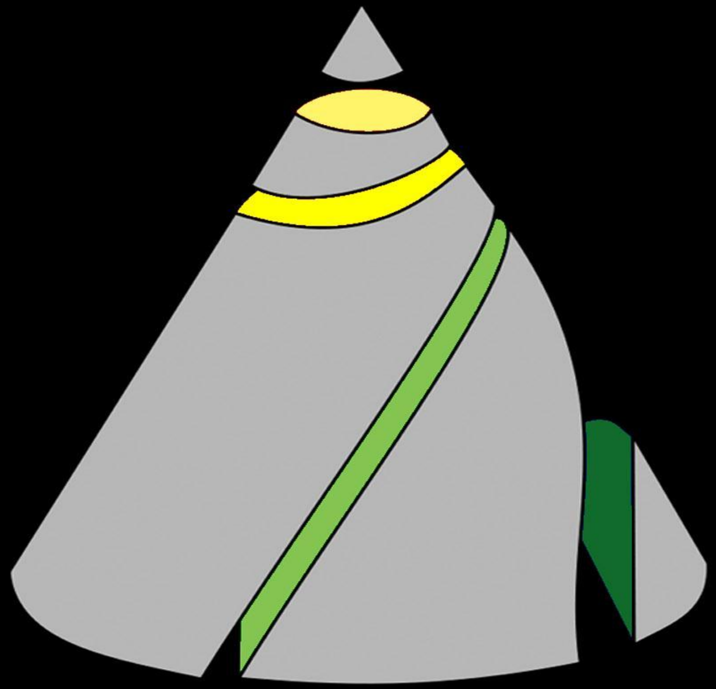


Конические сечения

Выполнила Барсукова В. С.
под руководством Ардашировой Е. В.

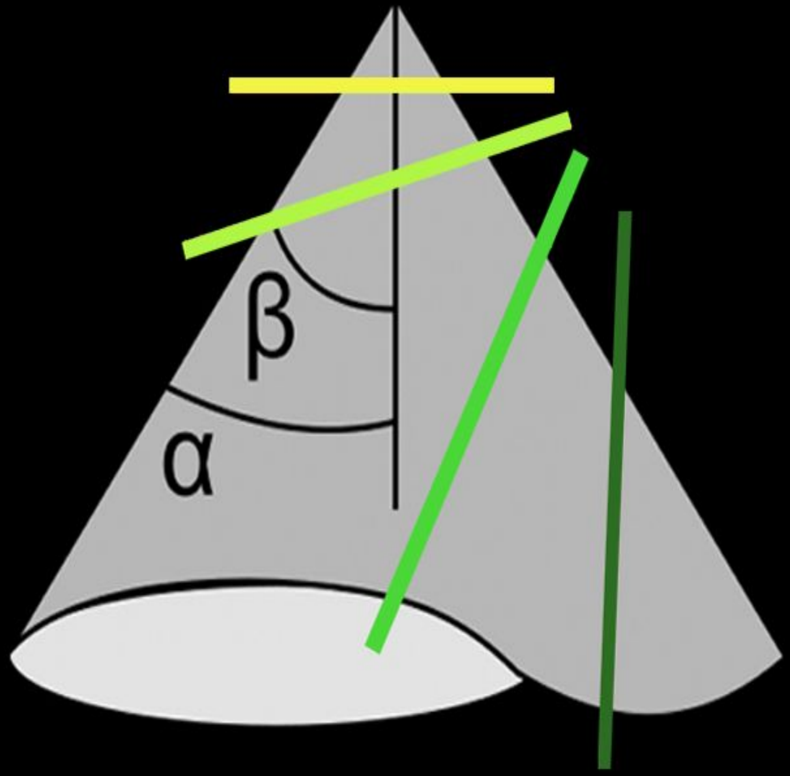
Содержание



- История исследования (19 столетий ожидания)
- Коника
- Экспериментальное доказательство
- Вездесущий эллипс/применение конических сечений
- Словарь

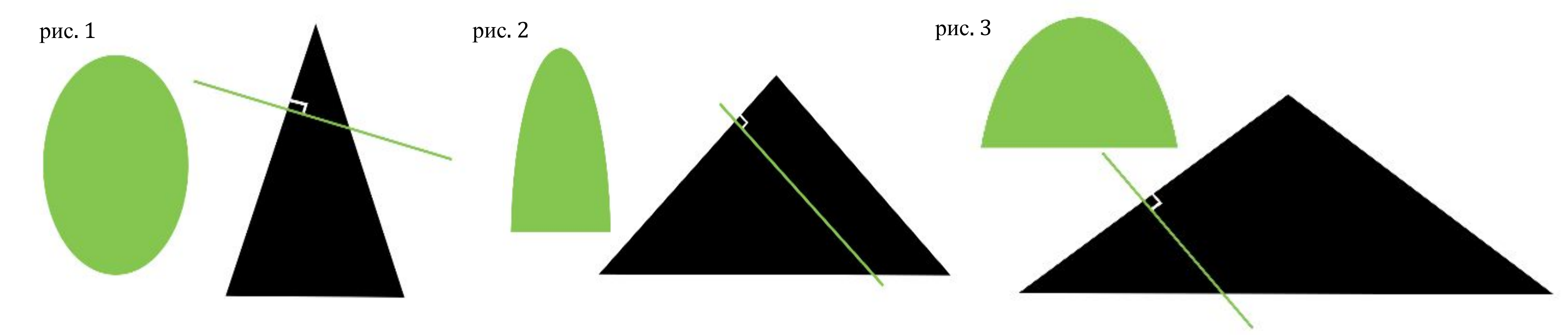
История исследования
(19 столетий молчания)

- Менехм
- Евклид
- Архимед
- Аполлоний Пергский
- Ферма
- Декарт
- Эйлер



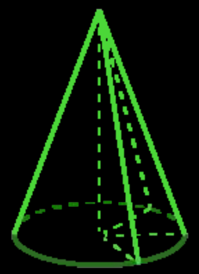
Менехм (IV в. до н. э.)

- Впервые конические сечения (10) появились у Менехма (IV в. до н. э.).
- Он рассматривал остроугольный, прямоугольный и тупоугольный конусы (11) и каждый из них пересекал плоскостью, перпендикулярной одной из образующих (13).
- В первом случае в сечении с поверхностью конуса получался эллипс (35) (рис. 1), во втором — парабола (17) (рис. 2), в третьем — гипербола (6), точнее, одна, ветвь гиперболы (рис. 3).
- Фактически он пользовался прямоугольными координатами на плоскости: за начало координат принимал вершину кривой второго порядка (12), за одну из координатных осей – главный диаметр, а другую ось проводил перпендикулярно первой в плоскости, в которой лежит кривая.



Евклид (III в. до н. э.)

- С именем Евклида связывают становление александрийской математики (геометрической алгебры) как науки.
- В XI книге «Начал» дается следующее определение: если вращающийся около одного из своих катетов прямоугольный треугольник, слева вернется в то же самое положение, из которого он начал двигаться, то описанная фигура будет конусом (11). Неподвижный катет, вокруг которого поворачивается треугольник, называется осью конуса (11), а круг, описываемый вращающимся катетом, называется основанием конуса.
- Евклид рассматривает только прямые конусы, т. е. такие, у которых ось перпендикулярна к основанию.



Архимед (ок. 287–212)

- Разработал предвосхитившие интегральное исчисление методы нахождения площадей, поверхностей и объемов различных фигур и тел.
- В трактате «О коноидах и сфероидах» Архимед рассматривает шар (32) (рис. 4), эллипсоид (36) (рис. 5), параболоид (18) (рис. 6) и гиперболоид (7) (рис. 7), вращения и их сегменты и определяет их объемы.

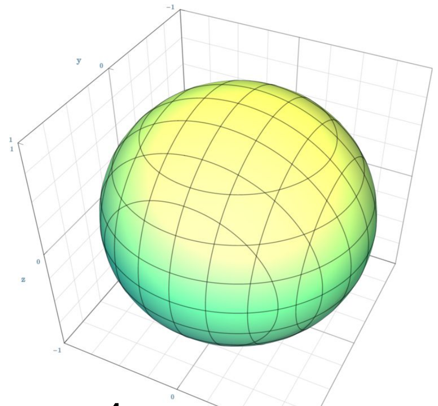


рис. 4

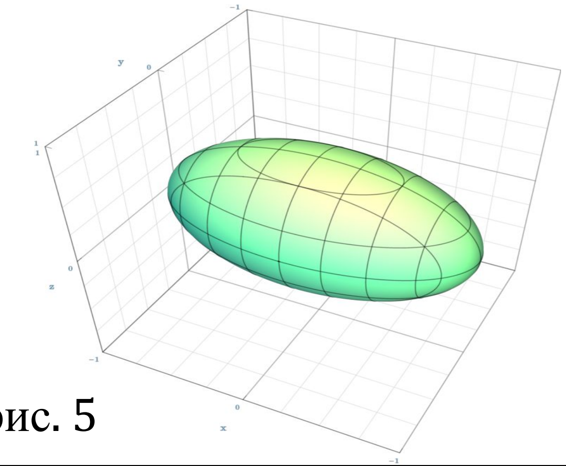


рис. 5

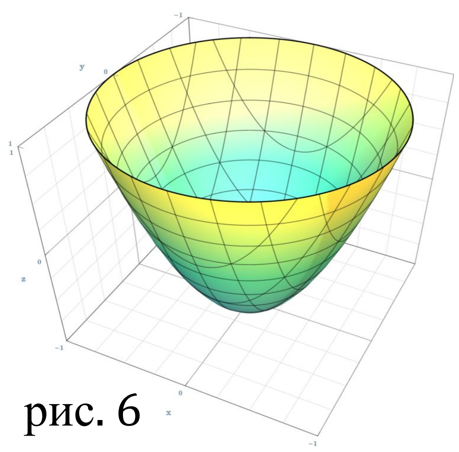


рис. 6

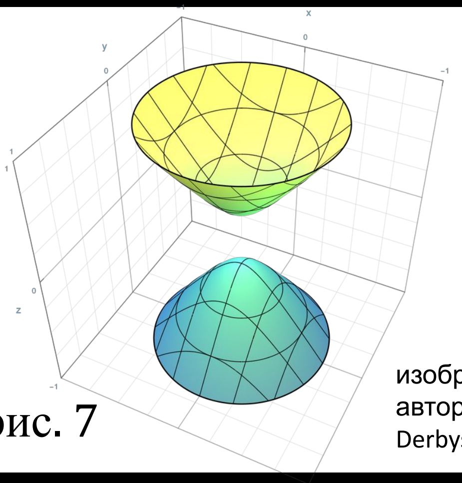
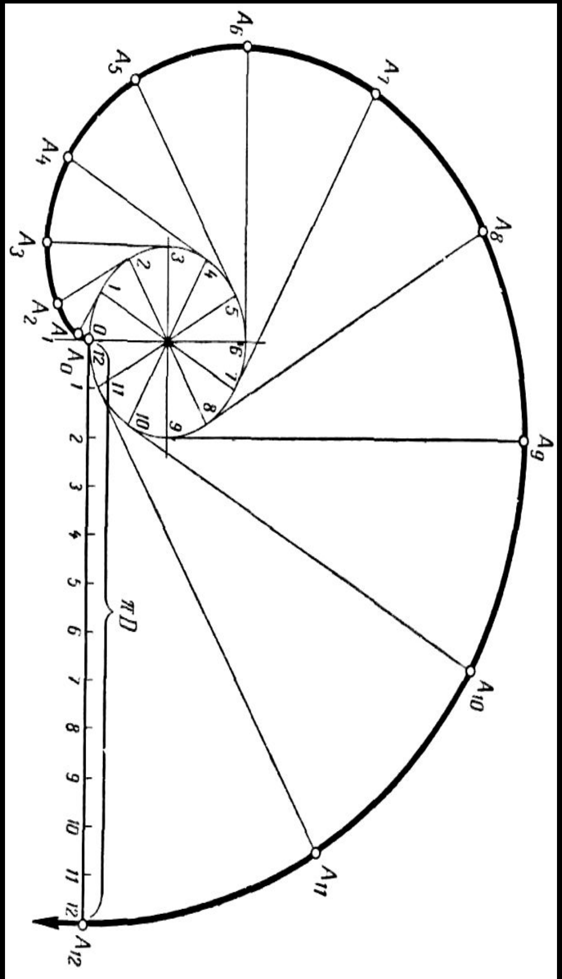


рис. 7

изображения автор: Sam Derbyshir

Архимед (ок. 287–212)

- В сочинении «О спиралях» исследует свойства кривой, получившей его имя (см. Архимедова спираль) (рис. 8) и касательной к ней.
- В трактате «Измерение круга» Архимед предлагает метод определения числа pi, который использовался до конца 17 в., и указывает две удивительно точные границы числа π: $3_{1071} < \pi < 3_{17}$.
- Он доказал следующую теорему: «Поверхность всякого равнобедренного (т.е. прямого кругового) конуса, за вычетом основания, равна кругу, радиус которого есть средняя пропорциональная между стороной (т.е. образующих (13)) конуса и радиуса круга, являющегося основанием конуса».
- Площадь *S* боковой поверхности дается таким образом (в современных символах) формулой *S*=π*rl,* где *l* — длина образующей, *r* — радиус основания конуса.

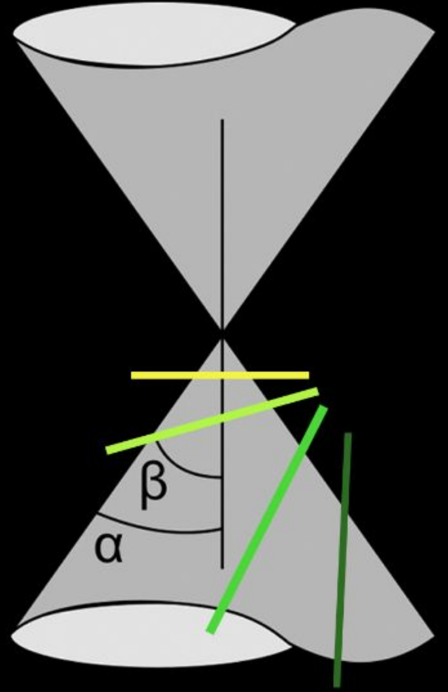


Аполлоний Пергский (ок. 260–ок. 170)

- Аполлоний прославился в первую очередь выдающейся работой «Конические сечения» (8 книг), в которой дал содержательную общую теорию эллипса (35), параболы (17) и гиперболы (6).
- Именно Аполлоний предложил общепринятые названия этих кривых; до него их называли просто «сечениями конуса».
- Он ввёл и другие математические термины, латинские аналоги которых навсегда вошли в науку, в частности: асимптота (2), абсцисса, ордината.

Аполлоний Пергский (ок. 260–ок. 170)

- В работе Аполлония «Конические сечения» восемь книг; до наших дней сохранилось семь.
- В сравнении с Менехмом он становится на более общую точку зрения: берет произвольный конус, причем рассматривает две его полости, и пересекает конус плоскостью под разными углами. В случае, если плоскость пересекает все образующие(13) конуса, в ее пересечении с поверхностью конуса образуется эллипс; если она параллельна одной из образующих конуса – парабола; если плоскость пересекает обе полости конуса – гипербола.
- Фактически Аполлоний пользуется косоугольной системой координат, принимая за начало координат любую точку *P* кривой и направляя координатные оси по диаметру и по касательной к кривой, проходящих через точку *P*.



Аполлоний Пергский (ок. 260–ок. 170)

- Сами термины «парабола (17)», «эллипс (35)», «гипербола (6)» впервые встречаются у Аполлония.
- Слово «парабола» в переводе с греческого означает «приложение»: уравнение $y^2 = 2px$ читается словесно в виде равенства квадрата y^2 и прямоугольника $2px$.
- Слово «эллипс» переводится как «недостаток»: в правой части уравнения $y^2 = 2px - \frac{p}{a}x^2$ не хватает слагаемого $\frac{p}{a}x^2$ для того, чтобы получилось «приложение», как в уравнении $y^2 = 2px$.
- Слово «гипербола» — «избыток»: в правой части уравнения $y^2 = 2px + \frac{p}{a}x^2$ нужно отбросить лишнее слагаемое $\frac{p}{a}x^2$ для того, чтобы можно было оставить «приложение».
- Символики у Аполлония нет; доказательства проводятся словесно. При доказательствах регулярно применяется геометрическая алгебра, которой пользовался еще Евклид. Постоянные p, a в уравнениях конических сечений вводились, в частности, для того, чтобы уравнять размерности левой и правой частей. Доказательства во многих случаях получались весьма непростыми.

Аполлоний Пергский (ок. 260–ок. 170)

- Из других заслуг Аполлония перед наукой стоит отметить, что он переработал астрономическую модель Евдокса (рис. 10), введя эпициклы (37) и эксцентрики (33) для объяснения неравномерности движения планет. Эту теорию позднее развили Гиппарх и Птолемей.
- Сочинения Аполлония не влияли на развитие науки до VIII века.
- С появлением аналитической геометрии, механики и новой теории движения планет Кеплера наступило возрождение идей Аполлония. Таким образом, от создания теории Аполлония до ее применения на практике потребовалось 19 столетий.

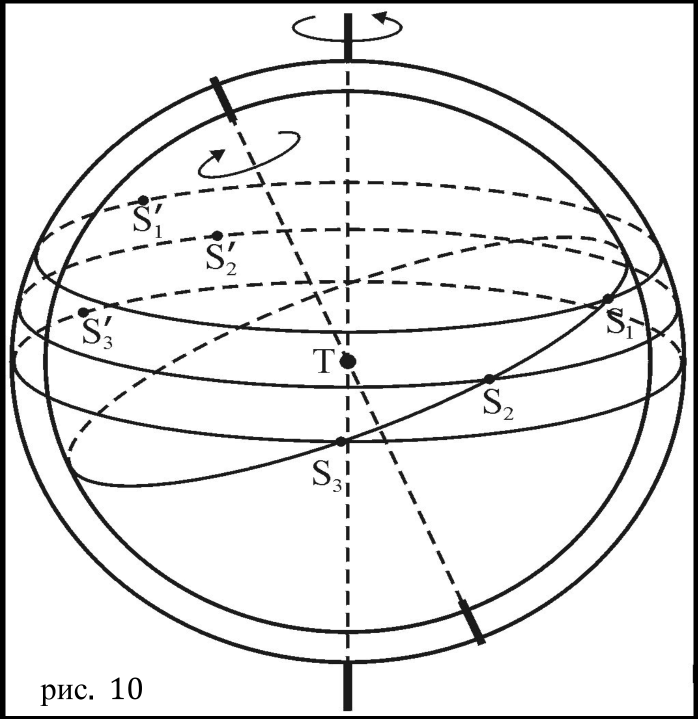


рис. 10

Аполлоний Пергский (ок. 260–ок. 170)

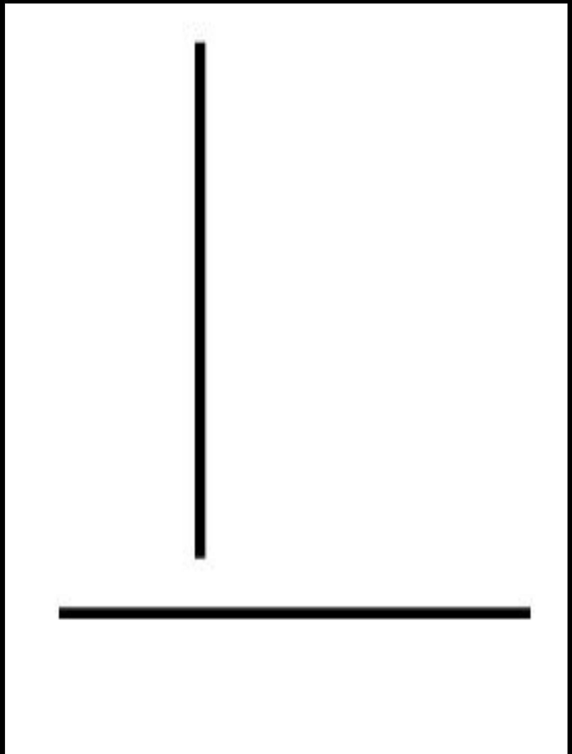
- Большой интерес представляют не только результаты Аполлония, но и методы, которыми он пользуется. В них можно найти многочисленные мотивы более поздних достижений математики — алгебры, аналитической, проективной геометрии и местами даже дифференциальной геометрии.
- Книга оказала огромное влияние на творчество последующих математиков, включая Ферма, Декарта, Ньютона, Лагранжа и многих других.
- Каким образом Аполлоний, не владея математическим анализом, сумел сделать свои открытия, неясно. Возможно, у него, как у Архимеда, был некий метод бесконечно малых, который он использовал в эвристических целях, чтобы затем передоказать результат каноническими средствами античной геометрии.
- Ван дер Варден пишет:
- «Аполлоний виртуозно владеет геометрической алгеброй, но не менее виртуозно умеет скрывать свой первоначальный ход мыслей. Из-за этого-то его книгу и трудно понимать; рассуждения его элегантны и кристально ясны, но что его привело именно к таким рассуждениям, а не к иным каким-нибудь, — об этом можно лишь догадываться».

Пьер Ферма (1601–1665)

- Аналитической геометрии Ферма посвятил небольшое сочинение «Введение в теорию плоских и пространственных мест».
- У Ферма имеется только одна координатная ось – ось абсцисс, точнее, полуось, так как отрицательными координатами он не пользуется; для изображения значений другой переменной он из конца отрезка оси абсцисс проводил отрезки под некоторым постоянным углом к этой оси, вообще говоря, не прямым.
- Он выводит уравнение окружности с центром в начальной точке в виде $b^2 - x^2 = y^2$. Уравнение конических сечений он пишет, выражая их свойства из труда Аполлония на языке алгебры: для параболы $-x^2 = dy$ или $y^2 = dx$, для эллипса $\frac{-b^2-x^2}{y^2} = C$ (где C — постоянная), для гиперболы $\frac{-b^2+x^2}{y^2} = C$ для равносторонней гиперболы $-xy = C$.

Рене Декарт (1596–1650)

- «Геометрия» (аналитическая геометрия) получила наибольшую известность.
- «Геометрия» состоит из трех книг. Вопросы аналитической геометрии в ней разбросаны без особой системы по всем трем книгам.
- В основу «Геометрии» положены две идеи: решение геометрических задач с помощью алгебры и метода координат и понятие переменной величины. «Поворотным пунктом в математике была декартова переменная величина. Благодаря этому в математику вошли движение и тем самым диалектика (8)» — написал Ф. Энгельс в работе «Диалектика природы».
- Декарт подобно Ферма, чертил только одну координатную ось с начальной точкой, указывая направления других координат точек. Но иногда он проводил и две координатные оси, правда, располагая их необычным для нас образом. Кроме того, он, и Ферма, почти не употреблял отрицательных координат, что вынуждало его обрывать кривую точками, лежащими на координатных осях.

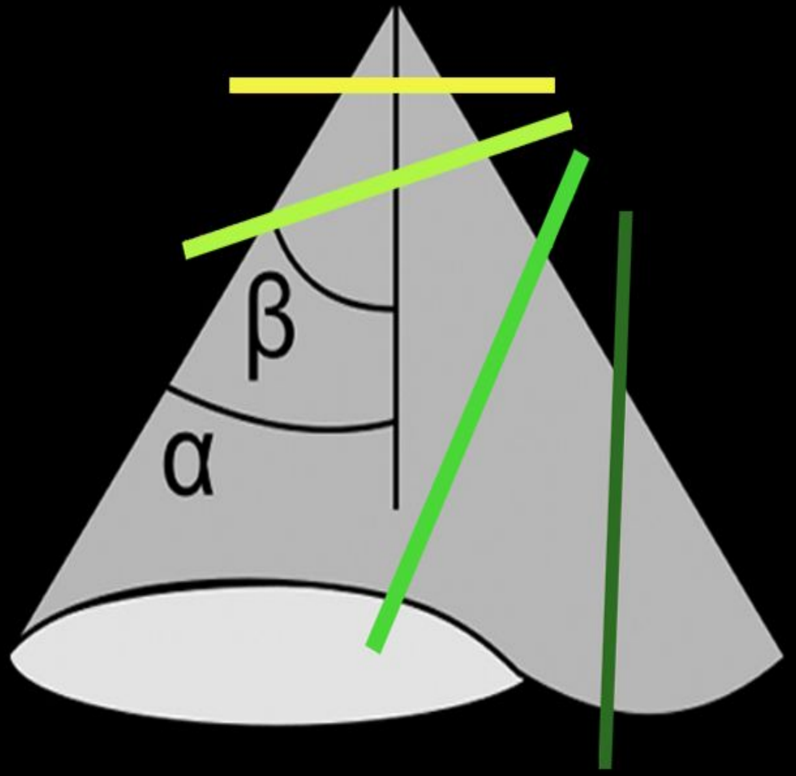


Леонард Эйлер (1707–1783)

- В 1748 г. Эйлер опубликовал большое сочинение «Введение в анализ бесконечных» в двух томах, из которых первый том посвящен введению в анализ, а второй — аналитической геометрии.
- Рассматриваются прямоугольные и косоугольные координаты точки на плоскости
- Эйлер подробно излагает общую теорию кривых второго порядка, деля эти кривые на типы и приводя их уравнения к каноническим.
- Он изучает также кривые третьего порядка, деля их на 16 родов, и кривые четвертого порядка (146 родов).
- В основном Эйлер завершил работу систематизации аналитической геометрии.

Коника

- Эллипс (+ частный случай окружность)
- Парабола
- Гипербола
- Свойства конических сечений



Эллипс

- Эллипсом называется геометрическое место точек плоскости, сумма расстояний от каждой из которых до двух заданных точек F_1 и F_2 есть величина постоянная $(2a)$, бóльшая расстояния $(2c)$ между этими заданными точками (рис. 11, а).
- Точки F_1 и F_2 называются фокусами эллипса, расстояние между ними $2c = \mathrm{F}_1\mathrm{F}_2$— фокусным расстоянием, середина отрезка $\mathrm{F}_1\mathrm{F}_2$ — центром эллипса, число $2a$ — длиной большой оси эллипса (соответственно, число a — большой полуосью эллипса). Отрезки F_1M и F_2M, соединяющие произвольную точку M эллипса с его фокусами, называются фокальными радиусами точки M. Отрезок, соединяющий две точки эллипса, называется хордой эллипса.

Эллипс

- Отношение $\varepsilon = \frac{c}{a}$ называется эксцентриситетом эллипса. Из определения $2c < 2a$ следует, что $0 \leq \varepsilon < 1$. При $\varepsilon = 0$, т. е. при $c = 0$, фокусы F_1 и F_2, а также центр O совпадают, и эллипс является окружностью радиуса a (рис. 11, б).
- Каноническое уравнение эллипса: $\frac{x^2}{a^2} + \frac{y^2}{b^2} = 1$
- Если фокусы эллипса совпадают, то эллипс представляет собой окружность (рис. 11, б). В этом случае канонической будет любая прямоугольная система координат с началом в точке $O \equiv \mathrm{F}_1 \equiv \mathrm{F}_2$, а уравнение $x^2 + y^2 = a^2$ является уравнением окружности с центром в точке O и радиусом, равным a.

Парабола

- Параболой называется геометрическое место точек плоскости, равноудаленных от заданной точки F и заданной прямой d, не проходящей через заданную точку.
- Точка F называется фокусом параболы, прямая d — директрисой параболы, середина O перпендикуляра, опущенного из фокуса на директрису, — вершиной параболы, расстояние p от фокуса до директрисы — параметром параболы, а расстояние $\frac{p}{2}$ от вершины параболы до её фокуса — фокусным расстоянием (⇐рис. 12). Прямая, перпендикулярная директрисе и проходящая через фокус, называется осью параболы (фокальной осью параболы). Отрезок , соединяющий две точки параболы, называется хордой параболы.

Парабола

- Для произвольной точки параболы отношение расстояния до фокуса к расстоянию до директрисы равно единице; эксцентриситет параболы по определению равен единице ($\varepsilon = 1$).
- Каноническое уравнение параболы: $y^2 = 2p \times x$.

Гипербола

- Гиперболой называется геометрическое место точек плоскости, модуль разности расстояний от каждой из которых до двух заданных точек F_1 и F_2 есть величина постоянная $(2a)$, меньшая расстояния $(2c)$, (⇓рис. 13) между этими заданными точками.
- Точки F_1 и F_2 называются фокусами гиперболы, расстояние $2c = F_1F_2$ между ними — фокусным расстоянием, середина O отрезка F_1F_2 — центром гиперболы, число $2a$ — длиной действительной оси гиперболы (соответственно, a — действительной полуосью гиперболы). Отрезки F_1M и F_2M, соединяющие произвольную точку M гиперболы с ее фокусами, называются фокальными радиусами точки M. Отрезок, соединяющий две точки гиперболы, называется хордой гиперболы.

Гипербола

- Отношение $\varepsilon = \frac{c}{a}$, где $c = \sqrt{a^2 + b^2}$, называется эксцентриситетом гиперболы. Из определения $(2a < 2c)$ следует, что $\varepsilon > 1$.
- Каноническое уравнение гиперболы: $\frac{x^2}{a^2} - \frac{y^2}{b^2} = 1$.

Свойства конических сечений

- Геометрическое место точек плоскости, для каждой из которых отношение расстояния до заданной точки *F* (фокуса) к расстоянию до заданной прямой *d* (директрисы), не проходящей через заданную точку, постоянно и равно эксцентриситету называется:

- эллипсом, если $0 \le \varepsilon < 1$;
- гиперболой, если $\varepsilon > 1$;
- параболой, если $\varepsilon = 1$.

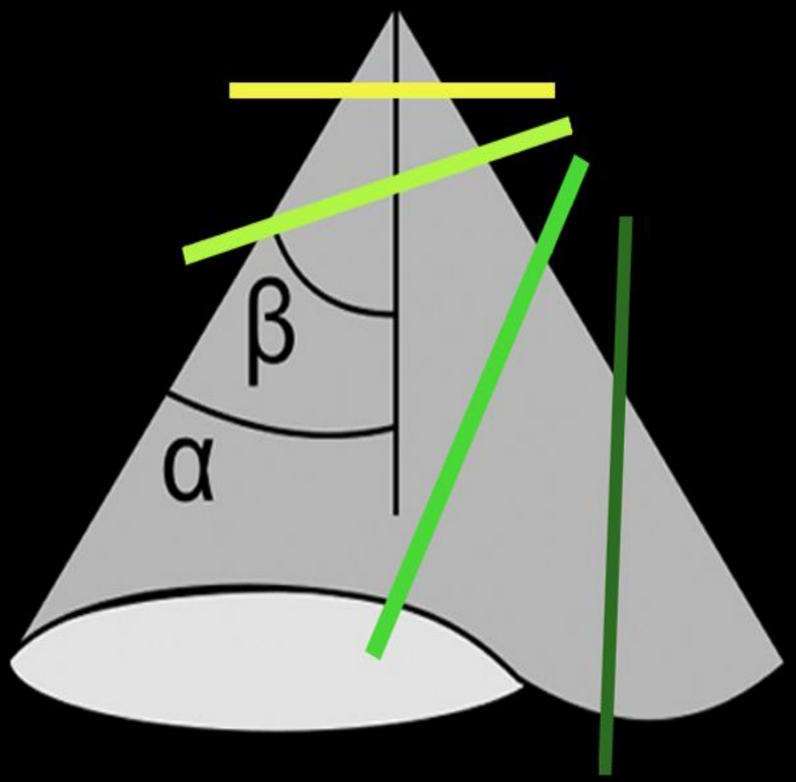
- Эллипс, гипербола, парабола получаются в сечениях кругового конуса плоскостями и поэтому называются коническими сечениями. Это свойство также может служить геометрическим определением эллипса, гиперболы, параболы.

Экспериментальное доказательство

- Опыт №1
  (с вафельным стаканчиком)

- Опыт №2
  (с карманным фонариком)

- Как начертить эллипс?



Опыт № 1

Опыт № 2

Как начертить эллипс?

Вездесущий эллипс

Словарь

1 Аналитическая геометрия— раздел геометрии, в котором геометрические фигуры и их свойства исследуются средствами алгебры. В основе этого метода лежит так называемый метод координат, впервые применённый Декартом в 1637 году. Каждому геометрическому соотношению этот метод ставит в соответствие некоторое уравнение, связывающее координаты фигуры или тел.

2. Асимптота — прямая, обладающая тем свойством, что расстояние от точки кривой до этой прямой стремится к нулю при удалении точки вдоль ветви в бесконечность.

3. Большая ось эллипса — сумма расстояний от каждой из которых до двух заданных точек F_1 и F_2 величина постоянная.

4. Вершина параболы — середина перпендикуляра, опущенного из фокуса на директрису.

5. Геометрическое место точек — фигура речи в математике, употребляемая для определения геометрической фигуры как множества точек, обладающих некоторым свойством.

6. Гипербола — геометрическое место точек плоскости, модуль разности расстояний от каждой из которых до двух заданных точек есть величина постоянная и меньшая расстояния между этими заданными точками.

7. Гиперболоид — это вид поверхности второго порядка в трёхмерном пространстве.

8. Диалектика — метод аргументации в философии, а также форма и способ теоретического мышления.

Словарь

9. Директриса параболы — заданная прямая, не проходящая через фокус параболы, расстояние от которой до произвольной точки параболы всегда равно расстоянию от этой точки до фокуса параболы.
10. Кони́ческое сече́ние, или ко́ника, — пересечение плоскости с поверхностью кругового конуса.
11. Конус — тело в евклидовом пространстве, полученное объединением всех лучей, исходящих из одной точки (вершины конуса) и проходящих через плоскую поверхность.
12. Кривая второго порядка — геометрическое место точек, прямоугольные координаты которых удовлетворяют уравнению вида $a_{11}x^2 + a_{22}y^2 + 2a_{12}xy + 2a_{13}x + 2a_{23}y + a_{33} = 0$ в которой один из коэффициентов $a_{11},\ a_{12},\ a_{22}$ отличен от нуля.
13. Образующая конуса — это отрезок, соединяющий вершину конуса с любой точкой, лежащей на линии окружности основания.
14. Окружность — замкнутая плоская кривая, все точки которой одинаково удалены от данной точки (центра), лежащей в той же плоскости, что и кривая.
15. Ось параболы — прямая, перпендикулярная директрисе и проходящая через фокус.
16. Парабола — геометрическое место точек плоскости, равноудаленных от заданной точки и заданной прямой, не проходящей через заданную точку.
17. Парабола — геометрическое место точек плоскости, равноудаленных от заданной точки и заданной прямой, не проходящей через заданную точку.

Словарь

18. Параболоид — тип поверхности второго порядка в трёхмерном евклидовом пространстве; может быть охарактеризован как незамкнутая нецентральная (то есть не имеющая центра симметрии) поверхность второго порядка.
19. Параметр параболы — расстояние от фокуса до директрисы.
20. Проективная геометрия — раздел геометрии, изучающий проективные плоскости и пространства. Главная особенность проективной геометрии состоит в принципе двойственности, который прибавляет изящную симметрию во многие конструкции.
21. Фокальные радиусы гиперболы — отрезки, соединяющие произвольную точку гиперболы с ее фокусами.
22. Фокальный радиус точки параболы — отрезок, соединяющий произвольную точку параболы с её фокусом.
23. Фокальный радиус эллипса — отрезки F_1M и F_2M, соединяющие произвольную точку M эллипса с его фокусами.
24. Фокус параболы — заданная точка, расстояние от которой до произвольной точки параболы всегда равно расстоянию от этой точки до заданной прямой, не проходящей через фокус параболы.
25. Фокусное расстояние гиперболы — расстояние между фокусами гиперболы.
26. Фокусное расстояние параболы — расстояние от вершины параболы до её фокуса.
27. Фокусы гиперболы — заданные точки, до которых модуль разности расстояний от каждой точки плоскости гиперболы величина постоянная.

Словарь

28. Фокусы эллипса — заданные точки F_1 и F_2, до которых расстояние от каждой точки плоскости эллипса одинаковое.
29. Хорда гиперболы — отрезок, соединяющий две точки гиперболы.
30. Хорда эллипса — отрезок, соединяющий две точки эллипса.
31. Центр эллипса — середина отрезка меду фокусами эллипса.
32. Шар — геометрическое тело; совокупность всех точек пространства, находящихся от центра на расстоянии, не больше заданного.
33. Эксцентрик — вспомогательная окружность в геоцентрической системе мира для представления годового обращения Солнца вокруг Земли с помощью движения по окружности с постоянной угловой скоростью.
34. Эксцентриситет — числовая характеристика конического сечения, показывающая степень его отклонения от окружности.
35. Эллипс — геометрическое место точек плоскости, сумма расстояний от каждой из которых до двух заданных точек F_1 и F_2 есть величина постоянная, бо́льшая расстояния между этими заданными точками.
36. Эллипсоид — поверхность в трёхмерном пространстве, полученная деформацией сферы вдоль трёх взаимно перпендикулярных осей.
37. Эпицикл — это окружность, центр которой равномерно движется по другой окружности.

Список источников

1. *Галкин Е. В.* Краткая история математики. – М.: АСТ, 2003. – 229с.
2. *Карпушина Н.* Во власти сечений//Наука и жизнь, 2012. № 5.
3. Асимптота//Википедия: [https://ru.wikipedia.org]. – Режим доступа: https://ru.wikipedia.org (Дата обращения: 14.04.2019)
4. Гипербола (математика)//Википедия: [https://ru.wikipedia.org]. – Режим доступа: https://ru.wikipedia.org (Дата обращения: 14.04.2019)
5. Гипербола: определение, свойства, построение// Математический форум Math Help Planet: [http://mathhelpplanet.com/static.php]. – Режим доступа: http://mathhelpplanet.com/static.php?p=giperbola (Дата обращения: 14.04.2019)
6. Гиперболоид//Википедия: [https://ru.wikipedia.org]. – Режим доступа: https://ru.wikipedia.org (Дата обращения: 14.04.2019)
7. История изучения геометрического тела конус //UZTEST.RU: [http://uztest.ru/]. – Режим доступа: http://uztest.ru/abstracts/?idabstract=523545 (Дата обращения: 14.04.2019)
8. Коническое сечение//Википедия: [https://ru.wikipedia.org]. – Режим доступа: https://ru.wikipedia.org (Дата обращения: 14.04.2019)
9. Конус//Википедия: [https://ru.wikipedia.org]. – Режим доступа: https://ru.wikipedia.org (Дата обращения: 14.04.2019)
10. Кривая второго порядка//Википедия: [https://ru.wikipedia.org]. – Режим доступа: https://ru.wikipedia.org (Дата обращения: 14.04.2019)

Список источников

11. Окружность//Википедия: [https://ru.wikipedia.org]. – Режим доступа: https://ru.wikipedia.org (Дата обращения: 14.04.2019)
12. Парабола//Википедия: [https://ru.wikipedia.org]. – Режим доступа: https://ru.wikipedia.org (Дата обращения: 14.04.2019)
13. Парабола: определение, свойства, построение// Математический форум Math Help Planet: [http://mathhelpplanet.com/static.php]. – Режим доступа: http://mathhelpplanet.com/static.php?p=parabola (Дата обращения: 14.04.2019)
14. Параболоид//Википедия: [https://ru.wikipedia.org]. – Режим доступа: https://ru.wikipedia.org (Дата обращения: 14.04.2019)
15. Шар//Википедия: [https://ru.wikipedia.org]. – Режим доступа: https://ru.wikipedia.org (Дата обращения: 14.04.2019)
16. Эксцентриситет//Википедия: [https://ru.wikipedia.org]. – Режим доступа: https://ru.wikipedia.org (Дата обращения: 14.04.2019)
17. Эллипс//Википедия: [https://ru.wikipedia.org]. – Режим доступа: https://ru.wikipedia.org (Дата обращения: 14.04.2019)
18. Эллипс: определение, свойства, построение// Математический форум Math Help Planet: [http://mathhelpplanet.com/static.php]. – Режим доступа: http://mathhelpplanet.com/static.php?p=ellips (Дата обращения: 14.04.2019)
19. Эллипсоид//Википедия: [https://ru.wikipedia.org]. – Режим доступа: https://ru.wikipedia.org (Дата обращения: 14.04.2019)