IV Симпозиум
Актуальные проблемы компьютерного моделирования конструкций и сооружений
Г. Челябинск, 2012 год

РЕШЕНИЕ ПЛОСКОЙ ЗАДАЧИ НАСЛЕДСТВЕННОЙ ТЕОРИИ СТАРЕНИЯ МЕТОДОМ КОНЕЧНЫХ ЭЛЕМЕНТОВ

Авторы: научный руководитель Гайджуров П.П.,

аспирантка Исхакова Э.Р.

студент С-IV-1 Петросян П.Д.

Организация: Южно-Российский государственный технический университет (НПИ), г. Новочеркасск

Проблема

В настоящее время накоплен значительный экспериментальный и теоретический материал по ползучести бетона. Вместе с тем известные подходы к расчету бетонных и железобетонных конструкций с учетом ползучести ориентированы главным образом на решение задач с относительно простой геометрией изделия и при неизменной внешней нагрузке. В литературе отсутствуют данные о конечноэлементном моделировании напряженно-деформированного состояния бетонных конструкций с учетом старения материала и истории нагружения.

В работе J.T. Boyle и J. Spence приведен численный алгоритм решения краевых задач ползучести (I и II стадии), основанный на использовании уравнения состояния $\dot{\varepsilon}_{cr} = f(\sigma, t, T)$, где σ – напряжение, t – время, T – температура . Данный подход не учитывает изменение деформационных характеристик материала во времени, не описывает обратной ползучести при разгрузке и ориентирован на конструкции из металла и металлических сплавов. Неявная схема численного интегрирования реализована ANSYSe.

Цель исследований

Разработка и программная реализация алгоритма метода конечных элементов для решения плоской задачи теории наследственного старения с учетом переменного квазистатического нагружения, позволяющего проектировать железобетонные конструкции на стадии монтажа, включая технологию непрерывного бетонирования, а также рассчитывать потерю предварительного натяжения арматуры, обусловленную ползучестью бетона.

Направления исследований

- Адаптация наследственных функций второго рода («функций памяти»), предложенных Н.Х. Арутюняном и С.В. Александровским, применительно к методу конечных элементов в форме перемещений.
- Построение конечноэлементного алгоритма и создание соответствующего пакета программ для решения плоской задачи теории наследственного старения.

Наследственные функции II рода для бетона

Операторно-матричной форма физических соотношений

$\{\sigma\} = [E(t)](1 - \mathbf{R})\{\varepsilon\}$,

где векторы напряжений и деформаций для плоской задачи

$\{\sigma\} = \{\sigma_{11}\, \sigma_{22}\, \sigma_{12}\}^T$, $\{\varepsilon\} = \{\varepsilon_{11}\, \varepsilon_{22}\, 2\varepsilon_{12}\}^T$,

$[E(t)]$ - матрица модулей упругости материала (3×3),

$R(t,\tau)$ - ядро релаксации (наследственная функция II рода),

$\mathbf{R}\,\varepsilon_{ij} = \int_{\tau}^{t} R(t,\tau)\,\varepsilon_{ij}(\tau)\,d\tau$ - интегральный оператор,

τ – «возраст» материала в момент приложения нагрузки,

t – временная координата, отсчитываемая от момента времени τ.

Вид функции $R(t,\tau)$ базируется на принятой механико-математической модели ползучести бетона и применяемой функции меры ползучести $\tilde{N}(t,\tau)$.

Теория старения

Ядро релаксации

$$R(t,\tau)=\frac{1}{E(t)}\frac{\partial}{\partial\tau}\left[E(t)\,e^{-\int\limits_{\tau}^{t}E(\tau)\frac{\partial}{\partial\tau}C(\tau,\tau_1)\,d\tau}\right], \qquad (1)$$

где функция меры ползучести Н.Х. Арутюняна

$$\tilde{N}(t,\tau)=\left(C_1+\frac{A_1}{\tau}\right)\left[1-e^{-\gamma(t-\tau)}\right],$$

закон изменения модуля упругости материала

$$E(t)=E_0\left(1-e^{-\beta\tau}\right),$$

$C_1, A_1, \gamma, E_0, \beta$ - константы материала, определяемые из опытов на ползучесть при одноосной деформации

Величину τ_1 принимаем равной 2 сут.

Достоинством представления наследственной функции в форме (1) является то, что после обработки этого выражения в среде символьного процессора системы Maple 12, получаем следующую, легко программируемую формулу:

$$R(t,\tau)=\frac{1}{E(t)}\Big\{E'(\tau)\,e^{\chi_1\chi_2[\upsilon_1(t)(\beta+\gamma)-\omega_1(t,\tau)\gamma-\upsilon_1(\tau)(\beta+\gamma)+\omega_2(t,\tau)\gamma]\,\omega_3(t,\tau)}-$$

$$-E(\tau)\Big[\chi_3\chi_2\,\omega_3(t,\tau)\,[\omega_1(t,\tau)\beta\gamma-\upsilon_1(\tau)\gamma(\beta+\gamma)+\omega_2(t,\tau)\gamma^2]+ \qquad (2)$$

$$+\chi_2\chi_3\,\omega_3(t,\tau)[\upsilon_1(t)(\beta+\gamma)-\omega_1(t,\tau)\gamma-\upsilon_1(\tau)(\beta+\gamma)+\omega_2(t,\tau)\gamma]\Big]\times$$

$$\times\chi_1\chi_2\,\omega_3(t,\tau)[\upsilon_1(t)(\beta+\gamma)-\omega_1(t,\tau)\gamma-\upsilon_1(\tau)(\beta+\gamma)+\omega_2(t,\tau)\gamma]\Big\},$$

где введены обозначения:

$$E'(\tau)=E_0\beta\,e^{-\beta\tau};\ \chi_1=e^{-\frac{1}{\tau_1(\beta+\gamma)}};\ \chi_2=E_0(\tau_1C_1+A_1);\ \chi_3=\frac{1}{\tau_1(\beta+\gamma)};$$

$$\upsilon_1(x)=e^{\gamma(x+\tau_1)};\ \omega_1(t,\tau)=e^{\gamma(t+\tau_1)-\beta\tau};\ \omega_2(t,\tau)=e^{\gamma(\tau+\tau_1)-\beta t};$$

$$\omega_3(t,\tau)=e^{-\gamma(\tau+t)}.$$

Теория наследственного старения

Функция меры ползучести С.В. Александровского

$$C(t,\tau)=\psi(\tau)-\psi(t)\left(\frac{e^{\gamma\tau}-A_2}{e^{\gamma t}-A_2}\right)+\Delta(\tau)[1-e^{-\alpha(t-\tau)}] \quad . \tag{3}$$

Здесь обозначено: $\psi(\tau)=\tilde{N}_3+\dfrac{A_3}{\tau}$; $\Delta(\tau)=C_1-C_3+\dfrac{A_1-A_3}{\tau}$;

$A_1, A_2, A_3, C_1, C_3, \gamma, \alpha$ - опытные константы.

Выражение для ядра релаксации, полученное на основе функции (3) имеет вид:

$$R(t,\tau)=-\frac{1}{E(t)}\Big\{K^2(\tau)F'(\tau)(e^{\gamma\tau}-A_2)-K'(\tau)-[K(\tau)(e^{\gamma\tau}-A_2)e^{-\eta(\tau)}]'\times$$

$$\times\int_{\tau}^{t}K(\tau)F'(\tau)e^{\eta(\tau)}d\tau+B_3(t)e^{-\mu(t)(t-\tau)}\Big\}, \tag{4}$$

где $F(\tau)=\dfrac{\psi(\tau)}{e^{\gamma\tau}-A_2}$; $K(\tau)=\dfrac{E(\tau)}{1+\Delta(\tau)E(\tau)}$; $\eta(\tau)=\int\limits_{\tau_1}^{t}K(\tau)F'(\tau)(e^{\gamma\tau}-A_2)\,d\tau$;

$$B_3(t)=F'(t)(e^{\gamma t}-A_2)[E^2(t)-K^2(t)]-\alpha E^2\Delta(t)+K'(t)-E'(t);$$

$$\mu(t)=\frac{1}{B_3(t)}\Big\{B'_3(t)+\gamma e^{\gamma t}F'(t)[E^2(t)-K^2(t)]-F'^2(t)(e^{\gamma t}-A_2)^2\times$$

$$\times[E^3(t)-K^3(t)]-\alpha E(t)[E(t)\Delta(t)]'-\alpha^2E^3(t)\frac{\Delta(t)}{K(t)}+\frac{1}{2}F'(t)(e^{\gamma t}-A_2)\times$$

$$\times[E^2(t)-K^2(t)]'+2\alpha E^3(t)\Delta(t)F'(t)(e^{\gamma t}-A_2)\Big\}.$$

После обработки выражения (4) символьным процессором системы Maple 12 и группировки членов получим следующую формулу для наследственной функции:

$$R(t,\tau)=-\frac{1}{E(t)}\left\{K(\tau)^2F'(\tau)(e^{\gamma\tau}-A_2)-K'(\tau)-\left[\frac{E'(\tau)(e^{\gamma\tau}-A_2)e^{-\eta}}{1+\Delta(\tau)E(\tau)}-\right.\right. \qquad (5)$$

$$\left.-\left[E(\tau)(e^{\gamma\tau}-A_2)e^{-\eta(\tau)}\left[\Delta(\tau)E'(\tau)-\frac{(A_1-A_3)E(\tau)}{\tau^2}\right]\right]\Big(1+\Delta(\tau)E(\tau)\Big)^{-2}+\right.$$

$$\left.\left.+\frac{E(\tau)\,\gamma\,e^{\gamma\tau}e^{-\eta}}{1+\Delta(\tau)E(\tau)}\right]u(\tau)+B_3(t)e^{-\mu(t)(t-\tau)}\right\},$$

где $u(\tau)=\int\limits_{\tau}^{t} K(\tau)F'(\tau)e^{\eta(\tau)}d\tau;$

$$\mu(t)=B_3(t)^{-1}\left\{\left[\frac{2A_3}{t^3(e^{\gamma t}-A_2)}+\frac{2A_3\gamma e^{\gamma t}}{t^2(e^{\gamma t}-A_2)^2}-\frac{\vartheta_3(t)\gamma^2e^{\gamma t}}{(e^{\gamma t}-A_2)^2}+\frac{2\vartheta_3(t)\gamma^2e^{2\gamma t}}{(e^{\gamma t}-A_2)^3}\right]\times\right.$$

$$\times(e^{\gamma t}-A_2)\left[E^2(t)-\frac{E^2(t)}{\vartheta_1(t)}\right]+F'(t)\gamma e^{\gamma t}\left[E^2(t)-\frac{E^2(t)}{\vartheta_1(t)}\right]+F'(t)(e^{\gamma t}-A_2)\times$$

$$\times\left[2E(t)E'(t)-2E(t)\frac{E'(t)}{\vartheta_1^2(t)}+2E^2(\tau)\frac{\vartheta_2(t)}{\vartheta_1^3(t)}\right]-2\alpha\Delta(t)E(t)E'(t)+$$

$$-2(A_1-A_3)\frac{E'(t)}{t^2}-\Delta(t)\beta^2e^{-\beta t}\Bigg]+2E(t)\frac{\vartheta_2^2(t)}{\vartheta_1^3(t)}+E_0\beta^2e^{-\beta t}+$$

$$+\gamma e^{\gamma\tau}F'(t)\left[E^2(t)-K^2(t)\right]-F'^2(t)(e^{\gamma t}-A_2)^2\left[E^3(t)-K^3(t)\right]-$$

$$-\alpha E(t)\left[\Delta(t)E(t)-(A_1-A_3)\frac{E(t)}{t^2}\right]-\alpha^2E^3(t)\frac{\Delta(t)}{K(t)}+\frac{1}{2}F'(t)(e^{\gamma t}-A_2)\times$$

$$\left.\times2\left[E(t)E'(t)-E(t)\frac{E'(t)}{\vartheta_1^2(t)}+E^2(t)\frac{\vartheta_2(t)}{\vartheta_1^3(t)}\right]+2\alpha E^3(t)\Delta(t)F'(t)(e^{\gamma t}-A_2)\right\};$$

$$\vartheta_1(\tau)=1+\Delta(\tau)E(\tau);\ \vartheta_2(\tau)=\Delta(\tau)E'(\tau)-\frac{(A_1-A_3)E(\tau)}{\tau^2};\ \vartheta_3(\tau)=C_3+\frac{A_3}{\tau}.$$

Графики функции $R(t, \tau)$ для бетона различного «возраста»

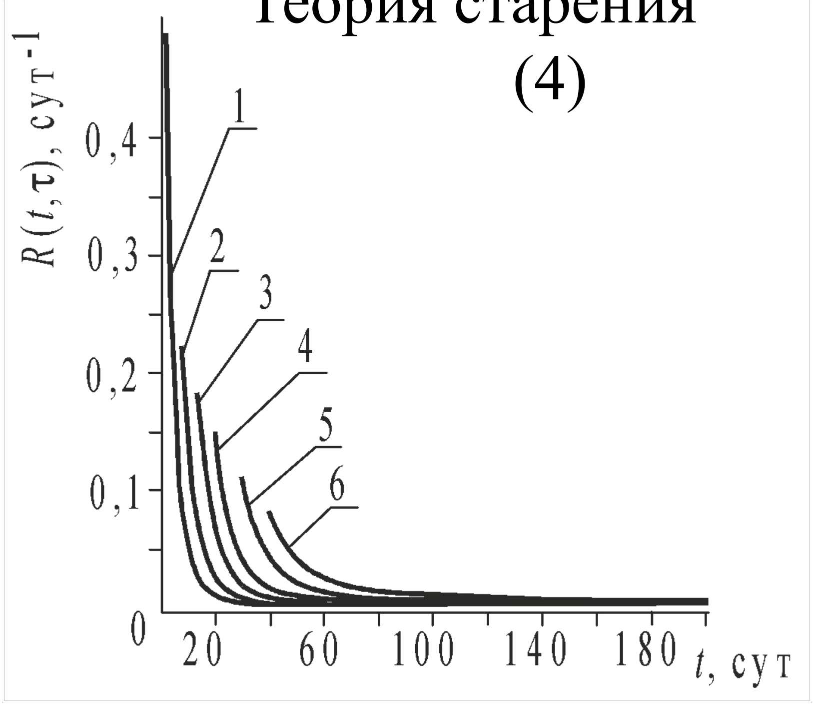
Константы материала:

$\tilde{N}_1 = 9{,}9388 \cdot 10^{-11}$ (Н/м^2)$^{-1}$; $\tilde{N}_3 = 7{,}7064 \cdot 10^{-11}$ (Н/м^2)$^{-1}$;

$\grave{A}_1 = 4{,}7095 \cdot 10^{-10}$ сут/(Н/м^2); $A_2 = 1$; $A_3 = 3{,}4822 \cdot 10^{-10}$ сут/(Н/м^2);

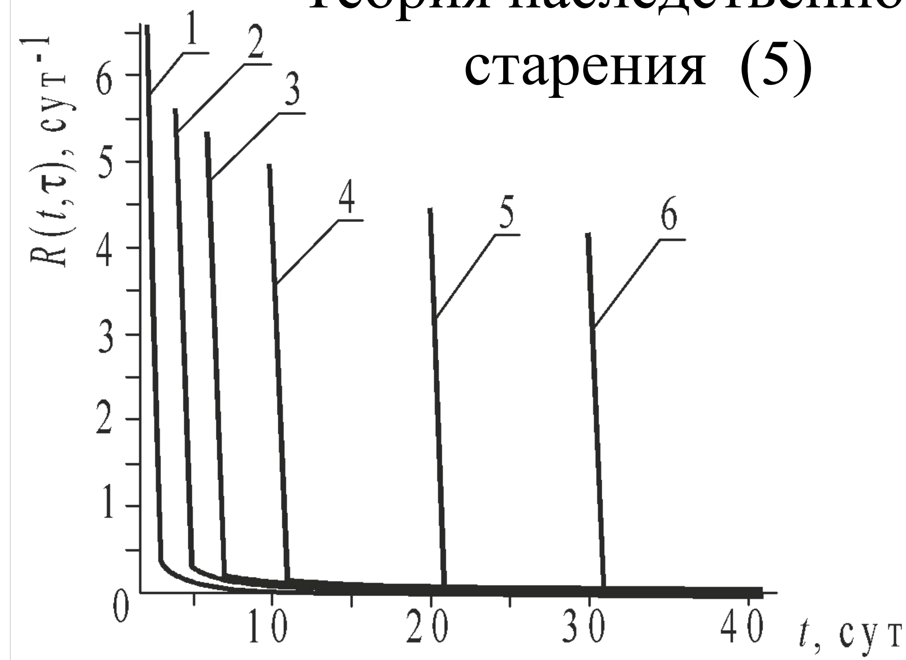
$E_0 = 2{,}55 \cdot 10^{10}$ Н/м^2; $\alpha = 6$ сут$^{-1}$; $\gamma = 0{,}03$ сут$^{-1}$; $\beta = 0{,}206$ сут$^{-1}$.

Теория старения (4)



1 – τ = 2 сут; 2 - τ = 8 сут;
3 - τ = 14 сут; 4 - τ = 20 сут;
5 - τ = 30 сут; 6 - τ = 40 сут

Теория наследственного старения (5)



1 – τ = 2 сут; 2 - τ = 4 сут;
3 - τ = 6 сут; 4 - τ = 10 сут;
5 - τ = 20 сут; 6 - τ = 30 сут

Конечноэлементная реализация плоской задачи теории ползучести

Векторы-столбцы наследственных деформаций и перемещений

$$\{\tilde{\varepsilon}\} = (1 - \mathbf{R})\{\varepsilon\}, \quad \{\tilde{u}\} = (1 - \mathbf{R})\{u\}, \quad \{\tilde{w}\} = (1 - \mathbf{R})\{w\}.$$

Отсюда

$$\{\tilde{u}\} = (1 - \mathbf{R})[F]\{w\},$$

где $[F]$ - матрица, образованная из функций формы.

В соответствии с принципом возможных перемещений имеем

$$\delta U - \delta A = 0, \qquad (6)$$

где вариация энергии деформации

$$\delta U = \int_{v_e} \delta\{\tilde{\varepsilon}\}^T \{\sigma\} d v = \int_{v_e} \delta\{\tilde{w}\}^T [D]^T [E][D]\{\tilde{w}\} d v,$$

возможная работа внешних сил

$$\delta A = \int_{v_e} \delta\{\tilde{w}\}^T [F]\{q\} d v + \int_{s_e} \delta\{\tilde{w}\}^T [F]\{p\} d s.$$

Здесь обозначено: $[D]$ - матрица, устанавливающая связь $\{\tilde{\varepsilon}\} = [D](1 - \mathbf{R})\{w\}$; v_e - объем, занимаемый КЭ;

s_e -поверхность КЭ, к которой приложена распределенная нагрузка;

$\{q\} = \{q_1 \, q_2\}^T$ - вектор-столбец объемной нагрузки;

$\{p\} = \{p_1 \, p_2\}^T$ - вектор-столбец распределенной нагрузки.

Из уравнения (6) следует матричное соотношение

$$[k]\{\tilde{w}\} - \{r\} = 0 \;, \tag{7}$$

где матрица жесткости КЭ $[k] = \int\limits_{v_e} [D]^T [E][D] \, dv$

и вектор-столбец узловых сил КЭ $\{r\} = \int\limits_{v_e} [F]^T \{q\} \, dv + \int\limits_{s_e} [F]^T \{p\} \, ds$.

Подставляя в выражение (7) $\{\tilde{w}\}$ получим

$$[k](1 - \mathbf{R})\{w\} - \{r\} = 0 \;. \tag{8}$$

Для вычисления интеграла $\mathbf{R}\{w\} = \int_{\tau}^{t} R(t,\tau)\{w(\tau)\}\,d\tau$

воспользуемся численным методом, основанном на формуле трапеций. Разобьем рассматриваемый временной интервал $[\tau, t]$ на m равноотстоящих временных шагов Δt, так чтобы $t = m\,\Delta t$. Тогда, выражение (8) можно записать в форме

$$\mathbf{R}\{w_m\} \approx \mathbf{R}(t,t)\{w_m\}\Delta t/2 + \sum_{j=1}^{m-1} \mathbf{R}(t,(m-j)\Delta t)\{w_j\}\Delta t +$$

$$+\mathbf{R}(t,\tau)\{w_1\}\Delta t/2 - \{r\} = 0\,.$$

Или в компактном виде

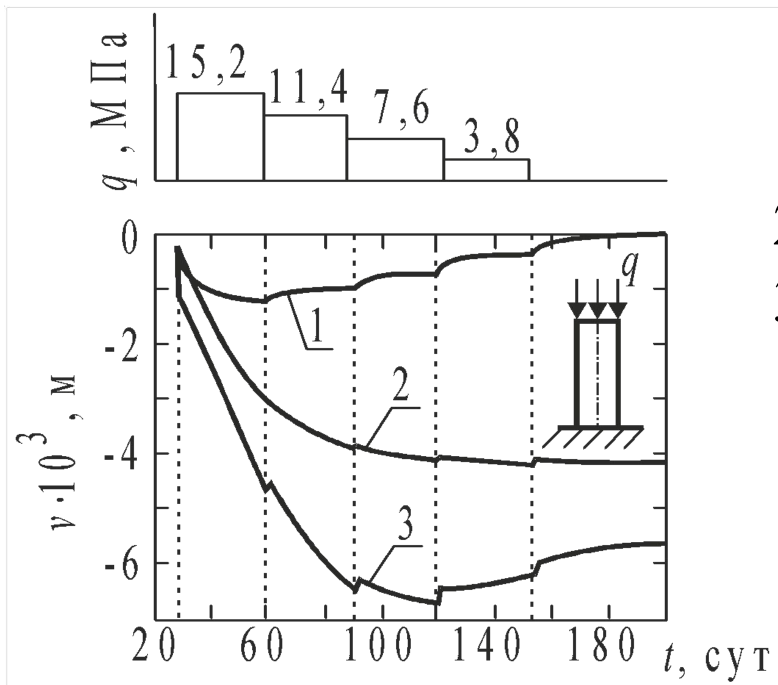
$$[k_m]\{w_m\} = \{r\} + [k_1]\{w_1\} + [k_j]\{w_j\}\Big|_{j=1,m-1}\,, \qquad (9)$$

где $[k_m] = [k](1 - \mathbf{R}(t,t)\Delta t/2$; $[k_1] = [k](1 - \mathbf{R}(t,\tau)\Delta t/2$;
$[k_j] = [k](1 - \mathbf{R}(t,(m-j)\Delta t)\Delta t$.

В выражении (9) вектор-столбец $\{w_1\}$ соответствует упруго мгновенному решению задачи.

Числовые примеры

Пример 1. Мгновенное нагружение и последующая ступенчатая разгрузка призматического бетонного образца с размерами 6×6×30 см (опыт А. Д. Росса). “Возраст” бетона в момент нагружения образца $\tau = 28$ сут, момент времени распалубки $\tau_1 = 2$сут. Конечноэлементная разбивка 2×8 (2 КЭ по ширине и 8 КЭ по высоте). Шаг интегрирования $\Delta t = 1$ сут.

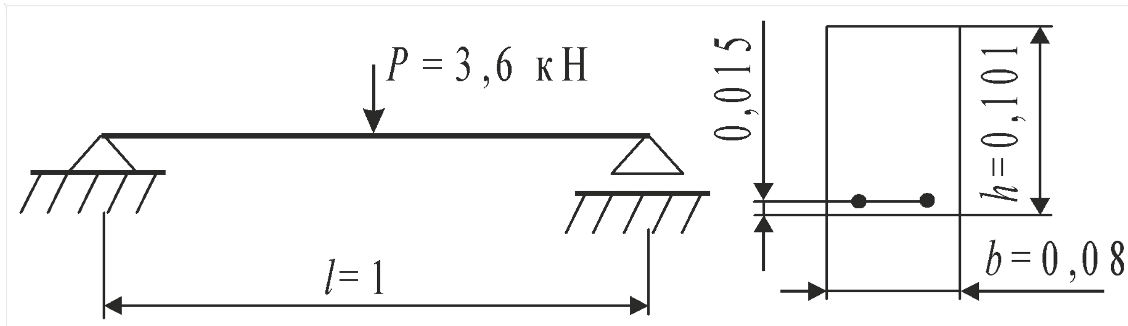


1 – теория упругой наследственности;

2 – теория старения;

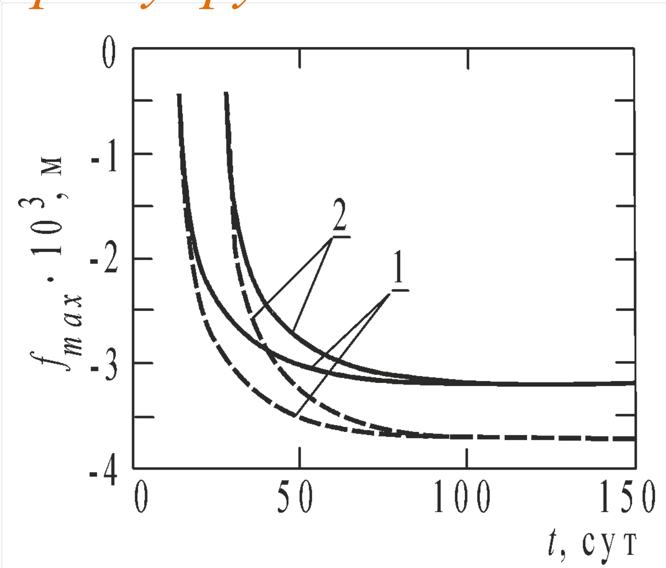
3 – теория наследственного старения

Пример 1. Ползучесть однопролетной железобетонной балки, мгновенно нагруженной сосредоточенной силой посередине пролета.

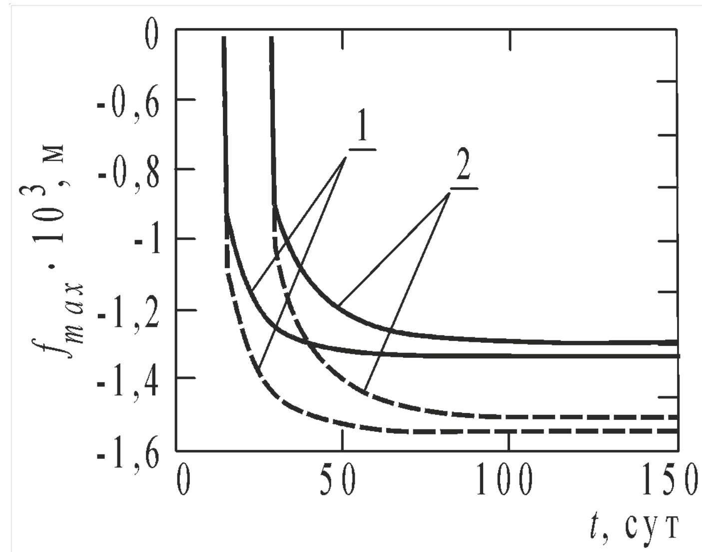


Диаметр арматуры 8 мм. Модуль упругости арматуры 2,1 $\cdot 10^5$ МПа. Разбивку балки на плоские КЭ выполняем сеткой 6×40 КЭ (6 КЭ по высоте и 40 КЭ по длине). Арматуру моделируем стержневыми КЭ (40 КЭ). Шаг интегрирования Δt =1 сут. Момент времени распалубки τ_1 = 2сут.

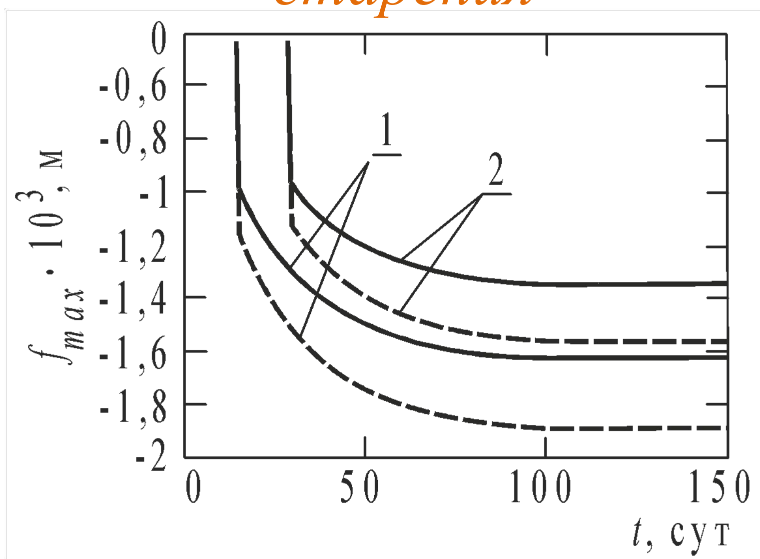
Теория упругой наследственности



Теория старения



Теория наследственного старения



- - - - схема армирования I (арматура расположена в нижней части балки);

—— схема армирования II (симметричное армирование)

1 – τ = 14 сут;

2 – τ = 28 сут

Выводы:

1. В рамках теории старения и теории наследственного старения с помощью символьного процессора системы Maple 12 получены выражения для ядер релаксации удобные для программирования.
2. Разработана и программно реализована шаговая процедура метода конечных элементов, позволяющая моделировать процессы последействия в бетонных и железобетонных конструкциях с учетом старения бетона.
3. На тестовых примерах выполнена численная апробация разработанной конечноэлементной программы.

Благодарю за внимание!

«… то что движется, есть материя.»
Г.Р. Кирхгоф