

Каждый элемент платежной матрицы  $a_{ij}$  — выигрыш игрока  $A$  при стратегии  $A_i$  в состоянии природы  $\Pi_j$

$$\begin{array}{c} \text{выигрыши игрока } A \\ \longrightarrow \left[ \begin{array}{cccc} a_{11} & a_{12} & \dots & a_{1n} \\ a_{21} & a_{22} & \dots & a_{2n} \\ \dots & \dots & \dots & \dots \\ a_{m1} & a_{m2} & \dots & a_{mn} \end{array} \right. \\ \underbrace{\hspace{10em}} \\ \text{природа } (\Pi) \end{array}$$

Матрица еще называется **матрицей доходности**, которая агрегирует информацию о возможной доходности вариантов стратегии при различных сценариях развития экономической ситуации.

## Различают два вида задач в играх с природой:

1. Задачи о принятии решений в условиях неопределенности, когда нет возможности получить информацию о вероятностях появления состояний природы

2. Задача о принятии решений в условиях риска, когда известны вероятности, с которыми природа принимает каждое из возможных состояний

Если будет принято ***i*-е** решение, а состояние внешней среды соответствует ***j*-й** ситуации, то лицо, принимающее решение, получит доход



Тип товара	Спрос		
	$\Pi_1$	$\Pi_2$	$\Pi_3$
$A_1$	20	15	10
$A_2$	16	12	14
$A_3$	13	18	15

***При решении Задачи о принятии решений в условиях неопределенности***  
для отбора вариантов стратегии применяют так  
называемые критерии оптимальности  
(альтернативные критерии оптимальности):

- ▶ критерий Вальда,
- ▶ критерий оптимизма,
- ▶ критерий пессимизма,
- ▶ критерий Сэвиджа,
- ▶ критерий Гурвица



1) **Критерий Вальда** (критерий гарантированного результата, максиминный критерий) позволяет выбрать наибольший элемент матрицы доходности из её минимально возможных элементов:

$$W = \max_i \min_j a_{ij},$$

$a_{ij}$  – элемент матрицы доходности.

**Критерий Вальда** предназначен для выбора из рассматриваемых вариантов стратегий варианта с наибольшим показателем эффективности из минимально возможных показателей для каждого из этих вариантов.

*Данный критерий обеспечивает максимизацию минимального выигрыша, который может быть получен при реализации каждого из вариантов стратегий. Критерий ориентирует лицо, принимающее решение, на осторожную линию поведения, направленную на получение дохода и минимизацию возможных рисков одновременно.*

**Применение критерия Вальда**  
**оправдано**, если ситуация, в которой принимается решение, характеризуется следующими обстоятельствами:

- ▶ о вероятности наступления того или иного состояния природы ничего не известно;
- ▶ не допускается никакой риск;
- ▶ реализуется лишь малое количество решений.

## Решение:

$$W = \max_i \min_j a_{ij} = \max(10;12;13) = 13$$

Полученный результат соответствует стратегии  $A_3$

2) **Критерий оптимизма** (критерий максимакса) предназначен для выбора наибольшего элемента матрицы доходности из её максимально возможных элементов:

$$M = \max_i \max_j a_{ij},$$



**Критерий оптимизма** используется, когда игрок оказывается в безвыходном положении, когда любой его шаг равновероятно может оказаться как абсолютным выигрышем, так и полным провалом.

*Данный критерий предполагает, что развитие ситуации будет благоприятным для лица, принимающего решение. Вследствие этого, оптимальным выбором будет вариант с наибольшим значением показателя эффективности в матрице доходности.*

**Ценой игры** в чистых стратегиях по критерию оптимизма ( $M$ ) является наибольший из показателей эффективности чистых стратегий.

## Решение:

$$M = \max_i \max_j a_{ij} = \max(20; 16; 18) = 20$$

Полученный результат соответствует стратегии  $A_1$

3) **Критерий пессимизма** предназначен для выбора наименьшего элемента матрицы доходности из её минимально возможных элементов:

$$P = \min_i \min_j a_{ij},$$



**Критерий пессимизма** предполагает, что развитие ситуации будет неблагоприятным для лица, принимающего решение.

*При использовании этого критерия лицо принимающее решение ориентируется на возможную потерю контроля над ситуацией и, поэтому, старается исключить все потенциальные риски и выбрать вариант с минимальной доходностью.*

**Решение:**

$$P = \min_i \min_j a_{ij} = \min(10;12;13) = 10$$

Полученный результат соответствует стратегии  $A_1$

#### 4) **Критерий Сэвиджа**

(критерий минимаксного риска Сэвиджа)

предназначен для выбора максимального элемента **матрицы рисков** из её минимально возможных элементов:

$$S = \min_i \max_j r_{ij},$$

Необходимо провести оценку риска в условиях, когда реальная ситуация неизвестна. Если игрок знает, что осуществляется  $j$ -е состояние природы, то выбрал бы наилучшее решение, то есть то, которое принесет наибольший выигрыш

$$b_j = \max_{i=1, 2, \dots, n} (a_{ij}),$$

Принимая  $i$ -е решение, игрок  $A$  рискует получить не  $b_j$ , а только  $a_{ij}$ , то есть, если игрок примет  $i$ -е решение, а в природе реализуется  $j$ -е состояние, то произойдет недополучение дохода в размере:

$$r_{ij} = b_j - a_{ij} = a_{\max j} - a_{ij}$$

*(по сравнению с тем, как если бы игрок знал точно, что реализуется  $j$ -е состояние природы, и выбрал бы решение, приносящее наибольший доход  $b_j = \max(a_{ij}), j = 1, 2, \dots, n$ )*

$a_{ij}$  – значение показателя доходности варианта стратегии с максимальной доходностью из имеющихся  $i$ -ых вариантов при наступлении  $j$ -ого сценария развития событий

$a_{\max j}$  - значение показателя доходности  $i$ -ого варианта стратегии при наступлении  $j$ -ого сценария развития событий (элемент платежной матрицы).



## **Матрица рисков (сожалений)**

отражает риск реализации вариантов стратегии для каждой альтернативы развития событий (характеризует риск выбора определенного варианта стратегии), который будет зависеть от уровня риска варианта стратегии при наступлении различных сценариев.

*Среди элементов матрицы рисков сначала выбирается максимальный риск при каждой стратегии, а затем из них выбирается минимальный. То есть в данном случае пессимистично настроенный игрок предполагает, что состояние природы будет таковым, что для любой его стратегии риск будет наибольшим, а стратегию выбирает такую, чтобы этот риск минимизировать.*



**Критерий Сэвиджа** позволяет выбрать вариант стратегии с меньшей величиной риска по сравнению с более высоким, первоначально ожидаемым уровнем риска.

*Данный критерий ориентирует лицо принимающее решение на более благоприятное развитие ситуации по сравнению с наихудшим состоянием, на которое то рассчитывало вначале.*

***Ценой игры*** в чистых стратегиях по критерию Сэвиджа называется минимальный показатель неэффективности среди показателей неэффективности всех чистых стратегий.

**Теорема:** Для того чтобы чистая стратегия была безрисковой, т.е. чтобы её показатель неэффективности по критерию Сэвиджа был нулевым, необходимо и достаточно, чтобы она доминировала каждую из остальных чистых стратегий.

## Решение:

Применяем формулу  $r_{ij} = a_{maxj} - a_{ij}$ , построим матрицу рисков.

### Матрица доходности

Тип товара	Спрос		
	$\Pi_1$	$\Pi_2$	$\Pi_3$
$A_1$	20	15	10
$A_2$	16	12	14
$A_3$	13	18	15

### Матрица рисков

Тип товара	Спрос		
	$\Pi_1$	$\Pi_2$	$\Pi_3$
$A_1$	0	3	5
$A_2$	4	6	1
$A_3$	7	0	0

$$S = \min_j \max_j r_{ij} = \min(5; 6; 7) = 5$$

Полученный результат соответствует стратегии  $A_1$

5) **Критерий Гурвица** (взвешивает пессимистический и оптимистический подходы к анализу неопределенной ситуации) предназначен для выбора некоторого среднего элемента матрицы доходности, отличающегося от крайних состояний – от минимального и максимального элементов:

$$H = \max_i \lambda \cdot \max_j a_{ij} + (1 - \lambda) \cdot \min_j a_{ij},$$

где  $\lambda$  – коэффициент оптимизма,  $0 \leq \lambda \leq 1$

**Коэффициент  $\lambda$**  выражает количественно «меру оптимизма» игрока А при выборе стратегии и определяется им из субъективных соображений на основе статистических исследований результатов принятия решений или личного опыта лица принимающего решение в схожих ситуациях.

если  $\lambda$  коэффициент оптимизма, то  $(1 - \lambda)$  коэффициент пессимизма



**Критерий Гурвица** позволяет избежать пограничных состояний при принятии решения – неоправданного оптимизма и крайнего пессимизма относительно ожидаемой доходности – и выбрать наиболее вероятный вариант стратегии, обеспечивающий наилучшую эффективность.

**Критерий Гурвица** ориентирован на установление баланса между случаями крайнего пессимизма и крайнего оптимизма при выборе стратегии путем взвешивания обоих исходов с помощью коэффициента оптимизма



## Пример:

Тип товара	Спрос		
	$\Pi_1$	$\Pi_2$	$\Pi_3$
$A_1$	20	15	10
$A_2$	16	12	14
$A_3$	13	18	15

Найти оптимальную стратегию по критерию Гурвица.

$$\lambda = 0,5$$

### Решение:

$$H = \max_i \lambda \cdot \max_j a_{ij} + (1 - \lambda) \cdot \min_j a_{ij}$$

$$H_1 = (0,5 \cdot 20) + ((1 - 0,5) \cdot 10) = 10 + 5 = 15$$

$$H_2 = (0,5 \cdot 16) + ((1 - 0,5) \cdot 12) = 8 + 6 = 14$$

$$H_3 = (0,5 \cdot 18) + ((1 - 0,5) \cdot 13) = 9 + 6,5 = 15,5$$

$$H = \max_i (15; 14; 15,5) = 15,5$$

Полученный результат соответствует стратегии  $A_3$

## *Задача о принятии решений в условиях неопределенности*

**W** (Вальда)  $\rightarrow A_3$

**M** (оптимизма)  $\rightarrow A_1$

**P** (пессимизма)  $\rightarrow A_1$

**S** (Сэвиджа)  $\rightarrow A_1$

**H** (Гурвица)  $\rightarrow A_3$

*Оптимальной является стратегия  $A_1$*