

A grayscale photograph of a desk setup. On the left side, there is a computer mouse, several paper clips (one white, one silver), and a pen. The background is a light-colored grid pattern. The text 'Экономические задачи' is overlaid in the center in a bold, red font.

# Экономические задачи

# Задача № 1

Фермер получил кредит в банке под определенный процент годовых. Через год фермер в счет погашения кредита вернул в банк  $\frac{3}{4}$  от всей суммы, которую он должен был банку к этому времени, а еще через год в счет полного погашения кредита он внес в банк сумму на 21% превышающую величину полученного кредита. Каков процент годовых по кредиту в данном банке?

## Решение

Пусть фермер взял сумму  $S$  под  $p$  %

годовых

Через год он должен был банку

сумму

$$S \left( 1 + \frac{p}{100} \right),$$

Вернул в банк три четверти долга  $\frac{3}{4} S \left( 1 + \frac{p}{100} \right),$

И остался должен  $\frac{1}{4} S \left( 1 + \frac{p}{100} \right).$

Еще через год фермер стал

должен

$$\frac{1}{4} S \left( 1 + \frac{p}{100} \right)^2,$$

Внес в банк сумму  $1,21S$

Рассчитался с банком полностью

$$\frac{1}{4}S \left(1 + \frac{P}{100}\right)^2 = 1,21S \Leftrightarrow \left(1 + \frac{P}{100}\right)^2 = 4,84 \underset{p>0}{\Leftrightarrow} 1 + \frac{P}{100} = 2,2 \Leftrightarrow p = 120.$$

Тем самым, банк выдал фермеру кредит под 120% годовых  
(это ограбление).

## Задача № 2

В банк помещена сумма 3900 тысяч рублей под 50% годовых. В конце каждого из первых четырех лет хранения после вычисления процентов вкладчик дополнительно вносил на счет одну и ту же фиксированную сумму. К концу пятого года после начисления процентов оказалось, что размер вклада увеличился по сравнению с первоначальным на 725%. Какую сумму вкладчик ежегодно добавлял к



## Решение

Общая сумма, причитающаяся вкладчику, включая дополнительные вклады в течении четырех лет и все процентные начисления, к концу пятого года хранения денег составляет  $825(100+725)$  процентов от первоначального (3900 тыс. руб.). Эта сумма равна:

$$3900 \cdot 8,25 = 39 \cdot 825 = 3 \cdot 13 \cdot 3 \cdot 5 \cdot 5 \cdot 11 = 3^2 \cdot 5^2 \cdot 11 \cdot 13$$

Поскольку процентная надбавка начислялась в размере 50 % годовых, то за 5 лет хранения этой части вклада вложенная сумма увеличилась в

$$1,5^5 = \frac{3^5}{2^5}$$

То есть стала:

$$\frac{3900 \cdot 3^5}{2^5} = \frac{3 \cdot 13 \cdot 2^2 \cdot 5^2 \cdot 3^5}{2^5} = \frac{3^6 \cdot 5^2 \cdot 13}{2^3}$$

Теперь найдем часть образованную дополнительными вкладами, а также процентными начислениями на эту сумму

$$\begin{aligned} 3^2 \cdot 5^2 \cdot 11 \cdot 13 - \frac{3^6 \cdot 5^2 \cdot 13}{2^3} &= \frac{2^3 \cdot 3^2 \cdot 5^2 \cdot 11 \cdot 13 - 3^6 \cdot 5^2 \cdot 13}{2^3} = \frac{3^2 \cdot 5^2 \cdot 13 \cdot (2^3 \cdot 11 - 3^4)}{2^3} \\ &= \frac{3^2 \cdot 5^2 \cdot 13 \cdot (88 - 81)}{2^3} = \frac{3^2 \cdot 5^2 \cdot 7 \cdot 13}{2^3} \end{aligned}$$

Это - с одной стороны. С другой стороны эта сумма образовалась так:



Пусть вкладчик в конце года и еще три  
раза в следующие годы вносил  
дополнительный вклад в сумме  $x$  тыс.руб.

Начало года, тыс. руб.	Конец года, тыс. руб.
$x$	$3/2 x$
$3/2 x + x = 5/2 x$	$5/2 x * 3/2 = 15/4 x$
$15/4 x + x = 19/4 x$	$19/4 x * 3/2 = 57/8 x$
$57/8 x + x = 65/8 x$	$65/8 x * 3/2 = 195/16 x$ $= ((3 * 5 * 13) / 2^4) x$

Теперь решим уравнение:

$$\frac{3 \cdot 5 \cdot 13}{2^4} \cdot x = \frac{3^2 \cdot 5^2 \cdot 7 \cdot 13}{2^3} \Leftrightarrow x = \frac{3^2 \cdot 5^2 \cdot 7 \cdot 13 \cdot 2^4}{2^3 \cdot 3 \cdot 5 \cdot 13} \Leftrightarrow x = 3 \cdot 5 \cdot 7 \cdot 2 \Leftrightarrow x = 210.$$

Итак, искомая сумма равна 210 тыс.  
руб.

## Задача № 3

15-го января планируется взять кредит в банке на 19 месяцев. Условия его возврата таковы:

- 1-го числа каждого месяца долг возрастёт на  $r$  % по сравнению с концом предыдущего месяца;
- со 2-го по 14-е число каждого месяца необходимо выплатить часть долга;
- 15-го числа каждого месяца долг должен быть на одну и ту же сумму меньше долга на 15-е число предыдущего месяца.

Известно, что общая сумма выплат после полного погашения кредита на 30 % больше суммы, взятой в кредит.

## Решение

Пусть сумма кредита равна  $S$

По условию, долг перед банком по состоянию на 15-е число должен уменьшаться до нуля равномерно:

$$S, \frac{18S}{19}, \dots, \frac{2S}{19}, \frac{S}{19}, 0.$$

Первого числа каждого месяца долг возрастает на  $r$  %.

Пусть  $k = 1 + \frac{r}{100}$ ,

Тогда последовательность размеров долга на 1-ое число каждого месяца такова:

$$kS, \frac{18kS}{19}, \dots, \frac{2kS}{19}, \frac{kS}{19}.$$

Следовательно, выплаты должны быть

следующими:  $(k-1)S + \frac{S}{19}, \frac{18(k-1)S + S}{19}, \dots, \frac{2(k-1)S + S}{19}, \frac{(k-1)S + S}{19}$ .

Всего следует выплатить

$$S + S(k-1) \left( 1 + \frac{18}{19} + \dots + \frac{2}{19} + \frac{1}{19} \right) = S(1 + 10(k-1)).$$

Общая сумма выплат на 30 % больше суммы, взятой в кредит, поэтому:

$$10(k-1) = 0,3 \Leftrightarrow k = 1,03 \Leftrightarrow r = 3.$$



## Задача № 4

31 декабря 2014 года Тимофей взял в банке 7 007 000 рублей в кредит под 20 % годовых. Схема выплат следующая: 31 декабря каждого следующего года банк начисляет проценты на оставшуюся сумму долга (то есть увеличивает долг на 20 %), за чем Тимофей переводит в банк платёж. Весь долг Тимофей выплатит на 3 равных платежа. На сколько рублей меньше он бы отдал банку, если бы смог выплатить долг на 2 равных платежа?

Пусть сумма кредита равна  $S$ , а годовые составляют  $a\%$ .

Коэффициент составит  $b = 1 + 0,01a$ .

После первой половины выплаты  
сумма долга составит  $S_1 = Sb - X$ .

После второй выплаты сумма долга  
составит

$$S_2 = S_1b - X = (Sb - X)b - X = Sb^2 - (1 + b)X.$$

После третьей выплаты сумма  
оставшегося долга равна

$$S_3 = Sb^3 - (1 + b + b^2)X = Sb^3 - \frac{b^3 - 1}{b - 1} \cdot X.$$

По условию тремя выплатами Тимофей погасит кредит полностью, поэтому

$$Sb^3 - \frac{b^3 - 1}{b - 1} \cdot X = 0,$$

откуда 
$$X = \frac{Sb^3(b - 1)}{(b^3 - 1)}.$$

Рассуждая аналогично, находим, что если бы Тимофей гасил долг двумя равными выплатами, то каждый год он должен был бы выплачивать

$$Y = \frac{Sb^2}{b + 1}$$

Значит, он отдал банку на  $3X - 2Y$   
больше

При  $S = 7007000$  и  $b = 1,2$

$$X = \frac{7007000 \cdot 1,728 \cdot 0,2}{0,728} = 3326400$$

$$Y = \frac{7007000 \cdot 1,44}{2,2} = 4586400$$

**Значит  $2X - 3Y = 806400$**



## Задача № 5

Савелий хочет взять в кредит 1,4 млн. рублей. Погашение кредита происходит раз в год равными суммами (кроме, может быть, последней) после начисления процентов. Ставка процента 10 % годовых.

На какое минимальное количество лет может Савелий взять кредит, чтобы ежегодные выплаты были не более 330 тысяч рублей?



## Решение

Чем больше годовые выплаты, тем быстрее будет выплачен долг. Значит, срок кредита будет минимален в том случае, когда выплаты составляют 330 тыс. рублей.

Год	Долг до выплаты, тыс. руб.	Долг после выплаты, тыс. руб.
1	1540	1210
2	1331	1001
3	1101,1	771,1
4	848,21	518,21
5	570,03	240,03
6	264,03	0

## Задача № 6

31 декабря 2013 года Сергей взял в банке кредит 9 930 000 рублей в кредит под 10 % годовых. Схема выплаты кредита следующая: 31 декабря каждого следующего года банк начисляет проценты на оставшуюся сумму долга (то есть увеличивает долг на 10 %), затем Сергей переводит в банк определенную сумму ежегодного платежа.

Какой должна быть сумма ежегодного платежа, чтобы Сергей выплатил долг тремя равными ежегодными платежами?

## Решение

Пусть сумма кредита равна  $a$ , ежегодный платеж равен  $x$  рублей, а годовые составляют  $k$  %.

Коэффициент составит  $m = 1 + 0,01k$

После первой выплаты сумма долга составит:  $a_1 = am - x$

После второй выплаты сумма долга составит:

$$a_2 = a_1 m - x = (am - x)m - x = am^2 - mx - x = am^2 - (1 + m)x.$$

После третьей выплаты сумма оставшегося долга:

$$a_3 = am^3 - (1 + m + m^2)x = am^3 - \frac{m^3 - 1}{m - 1} \cdot x.$$

По условию тремя выплатами Сергей должен погасить кредит полностью, поэтому

$$am^3 - \frac{m^3 - 1}{m - 1} \cdot x = 0,$$

откуда 
$$x = \frac{am^3(m - 1)}{m^3 - 1}.$$

При  $a = 9\,930\,000$  и  $k = 10$ , получаем  $m = 1,1$

$$x = \frac{9930000 \cdot 1,331 \cdot 0,1}{0,331} = 3993000 \text{ (рублей).}$$



## Задача № 7

31 декабря 2014 года Пётр взял в банке некоторую сумму в кредит под некоторый процент годовых. Схема выплаты следующая – 31 декабря каждого следующего года банк начисляет проценты на оставшуюся сумму долга (то есть увеличивает долг на  $a$  %), затем Пётр переводит очередной транш.

Если он будет платить каждый год по 2 592 000 рублей, то выплатит долг за 4 года.

Если по 4 392 000 рублей, то за 2 года. Под какой процент Пётр взял кредит?



## Решение

Пусть  $S$  – сумма кредита. Обозначим ежегодные платежи  $A_1$  и  $A_2$  соответственно

Сумма долга каждый год увеличивается на  $a$  %, то есть умножается на коэффициент  $b = 1 + 0,01 * a$

После первой выплаты сумма долга станет равна

$$S_1 = Sb - A_1,$$

После второй выплаты

$$S_2 = (Sb - A_1)b - A_1,$$

После третьей  
выплаты

$$S_3 = (((Sb - A_1)b - A_1)b - A_1),$$

После четвертой выплаты

$$S_4 = (((((Sb - A_1)b - A_1)b - A_1)b - A_1)b - A_1).$$

Причем, долг будет погашен полностью

$$(((Sb - A_1)b - A_1)b - A_1)b - A_1 = 0.$$

Аналогично получаем уравнение для случая, когда выплаты совершаются размером  $A_2$

$$S'_2 = (Sb - A_2)b - A_2.$$

Имеем систему уравнений

$$\begin{cases} Sb^4 - A_1b^3 - A_1b^2 - A_1b - A_1 = 0, \\ Sb^2 - A_2b - A_2 = 0. \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} Sb^2 \cdot b^2 - A_1b^3 - A_1b^2 - A_1b - A_1 = 0, \\ Sb^2 = A_2b + A_2. \end{cases}$$

Подставим выражение для  $Sb^2$  в первое уравнение

$$(A_2 + A_2b) \cdot b^2 - A_1b^3 - A_1b^2 - A_1b - A_1 = 0.$$

Преобразуем это уравнение

$$(A_2 - A_1)b^3 + (A_2 - A_1)b^2 - A_1b - A_1 = 0 \Leftrightarrow b^2(A_2 - A_1)(b + 1) - A_1(b + 1) = 0$$

$$\Leftrightarrow (b + 1)((A_2 - A_1)b^2 - A_1) = 0 \Leftrightarrow \begin{cases} b = -1, \\ b^2 = \frac{A_1}{A_2 - A_1}. \end{cases}$$

Подставляя числовые значения  
получаем:

$$\begin{cases} b = -1, \\ b = -1, 2, \\ b = 1, 2. \end{cases}$$

Отрицательные корни не подходят по  
условию задачи, значит,  $b = 1, 2$ , откуда  $a = 20$ ,  
то есть Пётр взял деньги в банке по 20 % .

A black and white photograph of a desk. In the top left corner, there is a mouse, a pen, and several paper clips. The rest of the image is a grid pattern.

**Молодцы**  
**!**