

# Начертательная геометрия

Автор: Разумнова Е.А.

# Геометрические тела с вырезом

Для построения проекций линий выреза строят проекции ряда *характерных точек*, лежащих на них, что достигается проведением вспомогательных линий или секущих плоскостей.

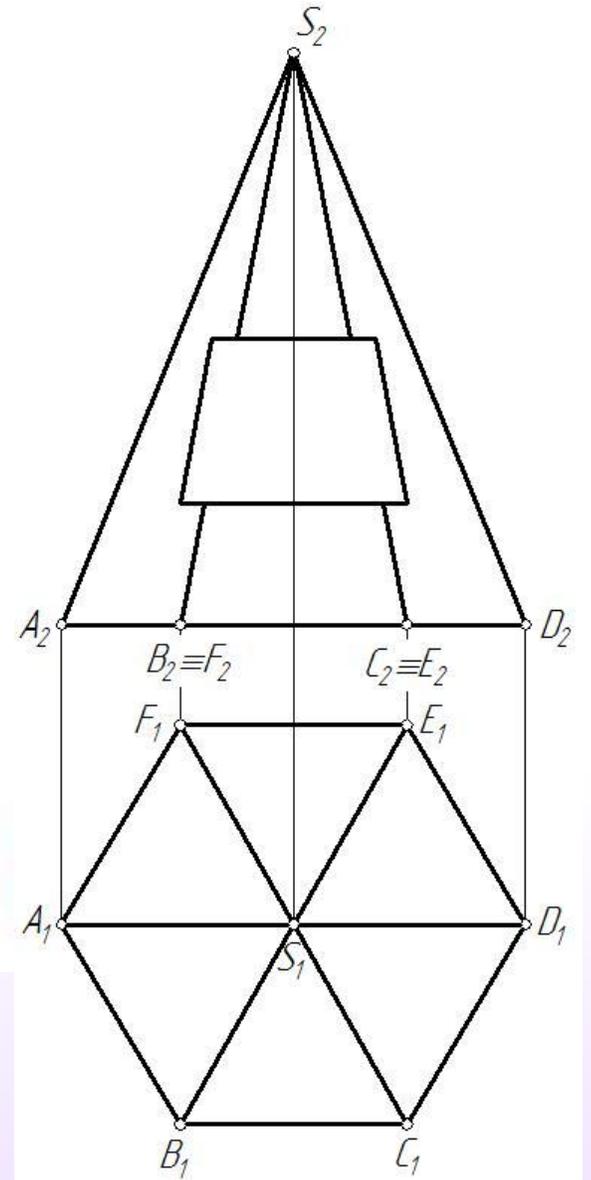
Найденные характерные точки соединяют прямыми или кривыми линиями (в зависимости от характера заданного геометрического тела) и обводят их *с учетом видимости* на каждой проекции.

## Общий план решения задач на построение геометрического тела с вырезом:

1. Определить вид линий пересечения плоскости выреза с поверхностью геометрического тела.
2. Построить проекции линий пересечения на горизонтальной проекции.
3. Построить профильную проекцию геометрического тела и профильную проекцию линий пересечения.

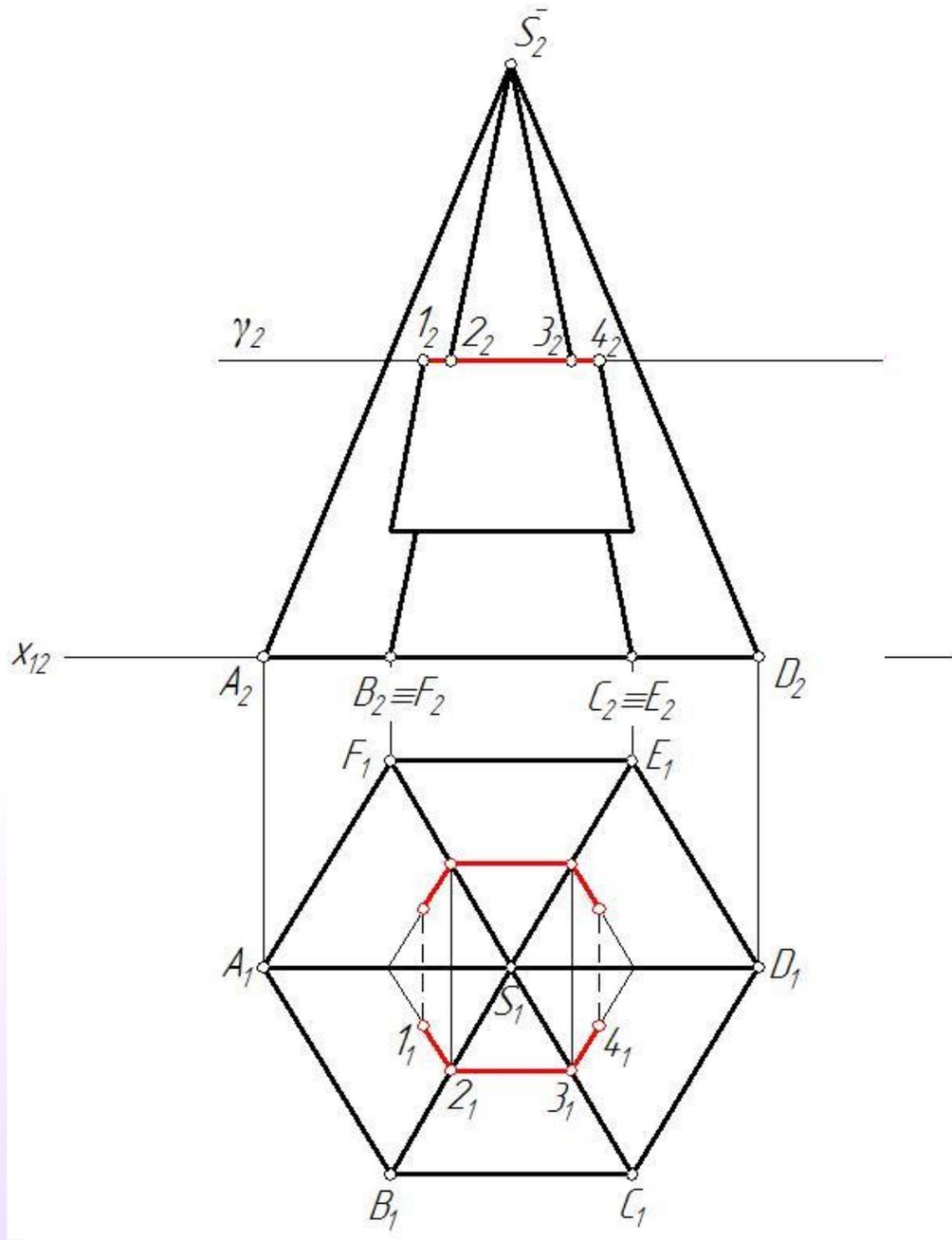
1. Устанавливаем вид линий пересечения плоскостей выреза с гранями и ребрами пирамиды:

плоскость пересекает все грани пирамиды по прямым линиям

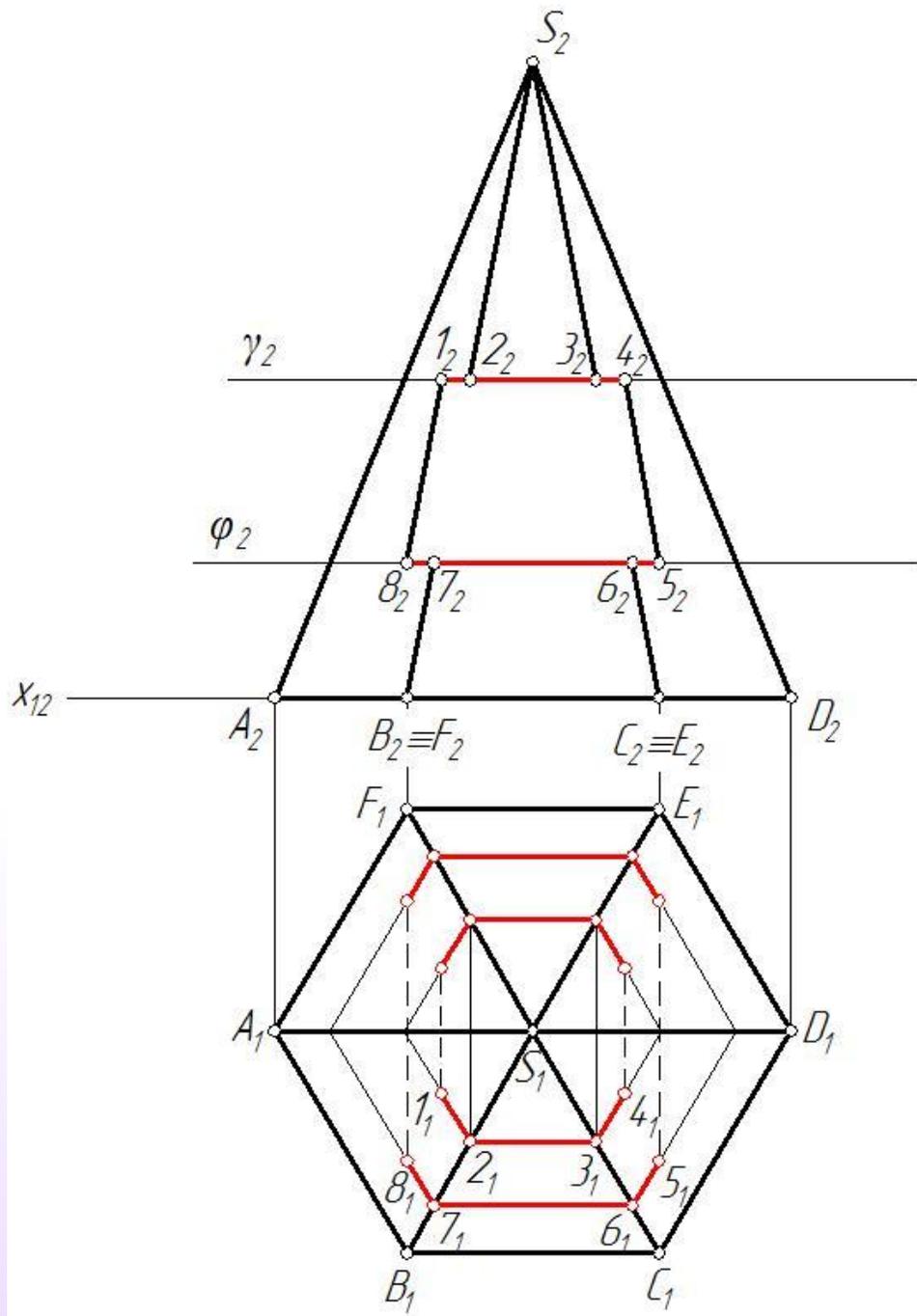


Заданное геометрическое тело -  
шестигранная пирамида  $SABCDEF$  с  
вырезом

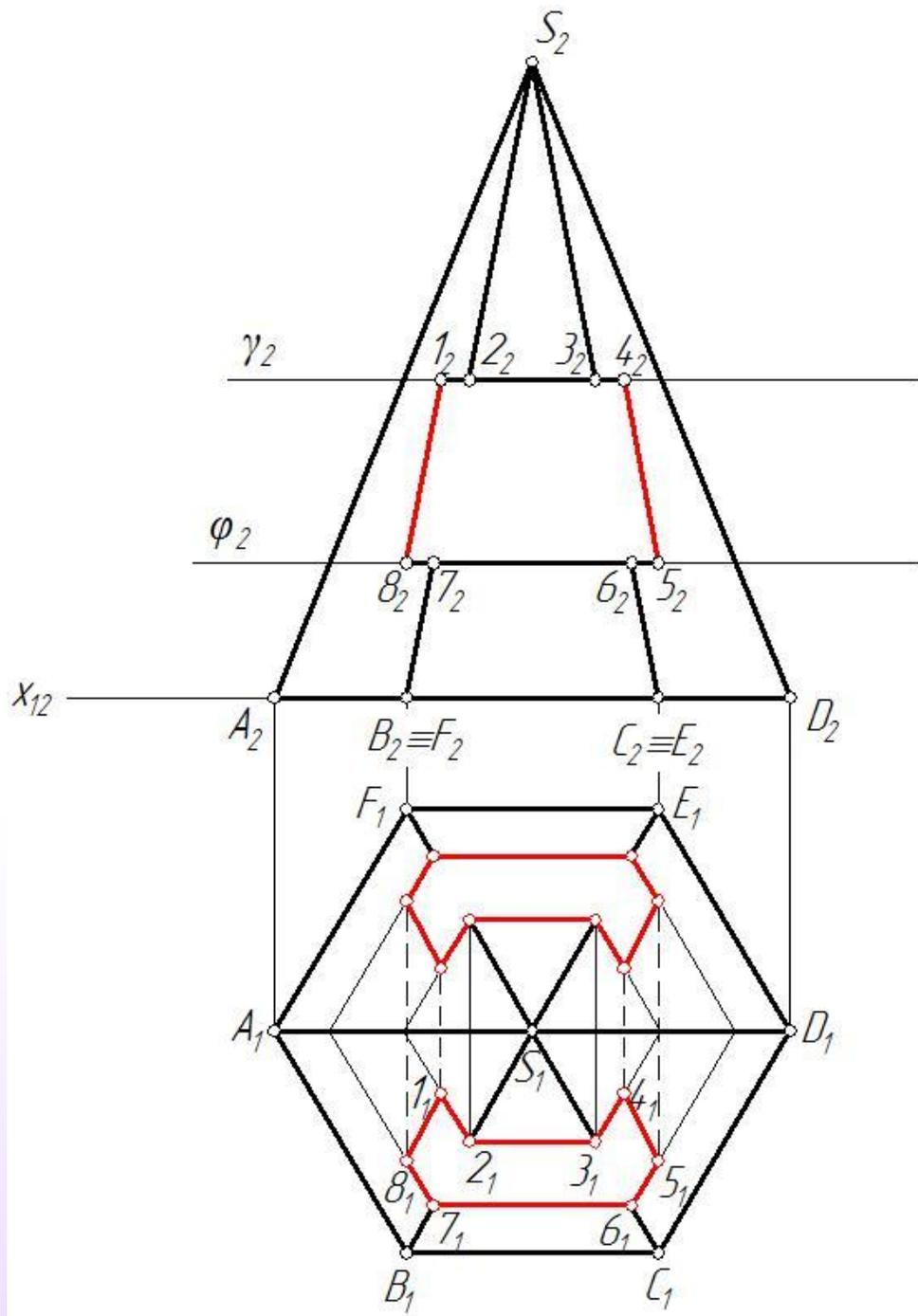
Отмечаем фронтальные проекции  
характерных точек выреза.  
Обязательно отмечаем точки на  
ребрах пирамиды



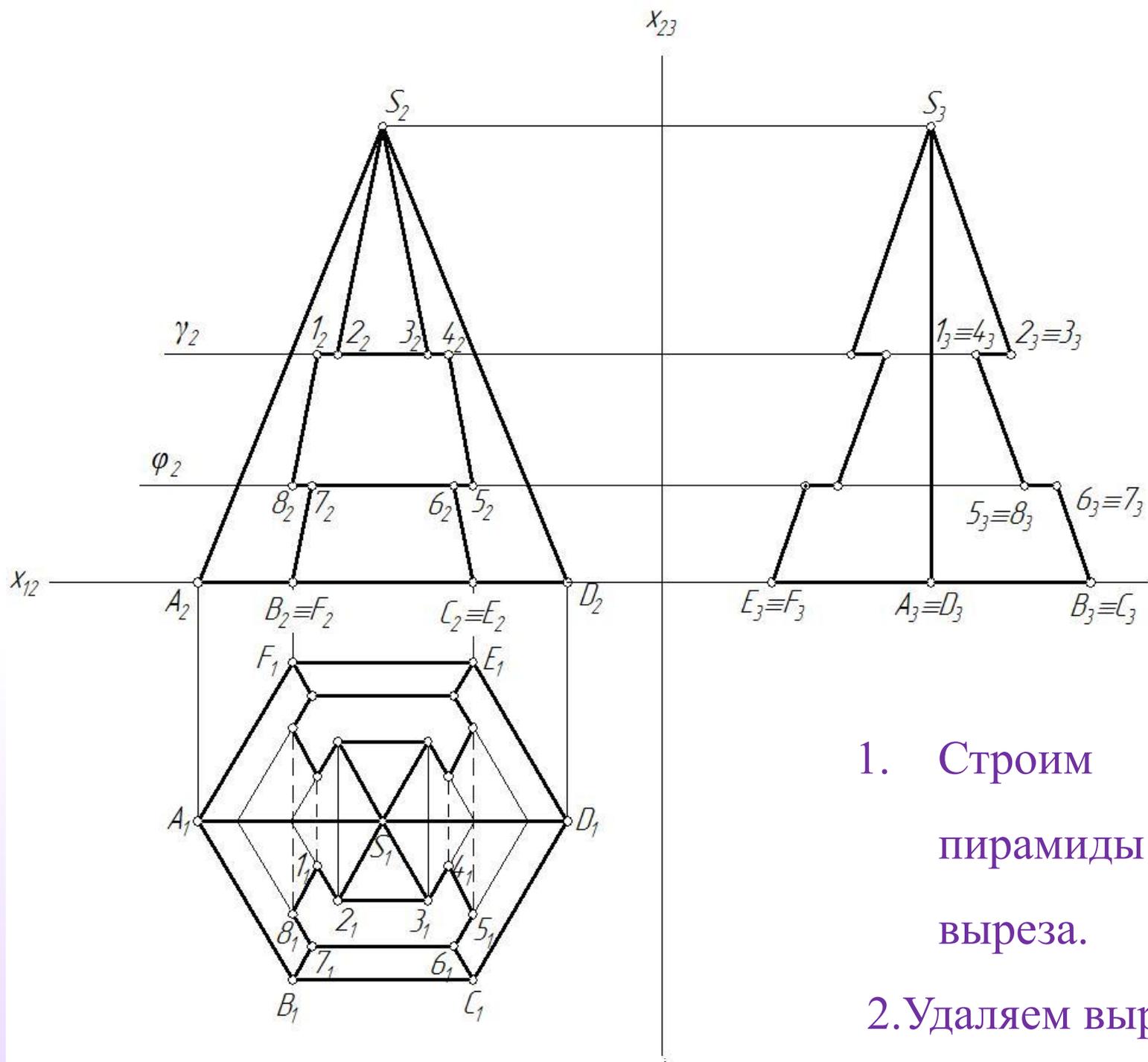
1. Проводим вспомогательных секущую плоскость  $\gamma$  для построения проекций *характерных точек 1,2,3,4*, лежащих на ней.
2. Плоскость  $\gamma \parallel \Pi_1 \Rightarrow$  в сечении получается фигура, подобная основанию.
3. Соединяем точки последовательно.



1. Проводим вспомогательных секущую плоскость  $\varphi$  для построения проекций *характерных точек 5, 6, 7, 8*, лежащих на ней.
2. Плоскость  $\varphi \parallel \Pi_1 \Rightarrow$  в сечении получается фигура, подобная основанию.
3. Соединяем точки последовательно.



1. Соединяем последовательно точки выреза.
2. Удаляем вырезанные участки ребер.



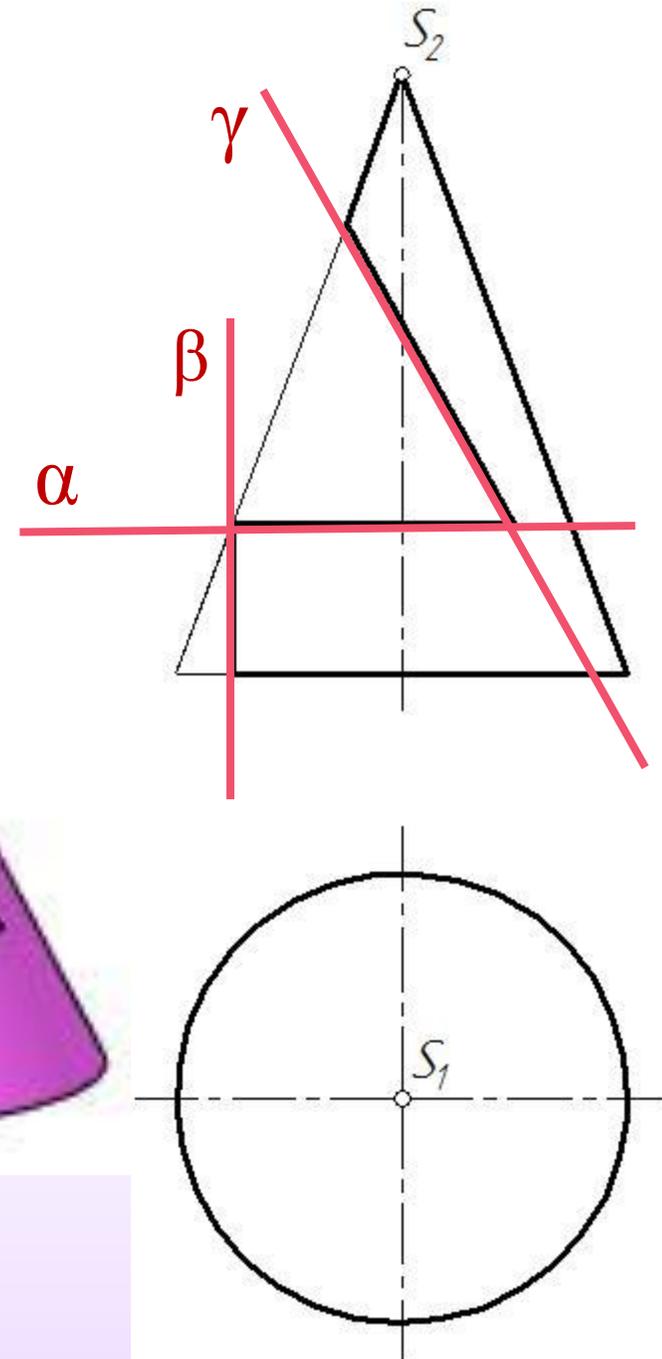
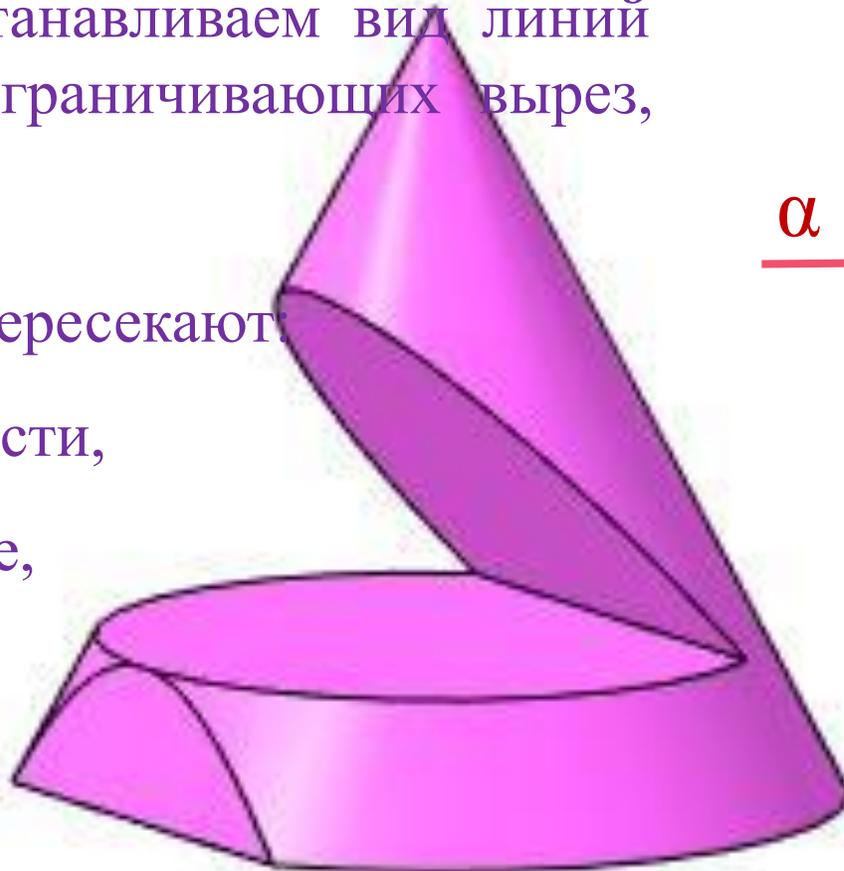
1. Строим профильную проекцию пирамиды и профильные проекции точек выреза.
2. Удаляем вырезанные ребра

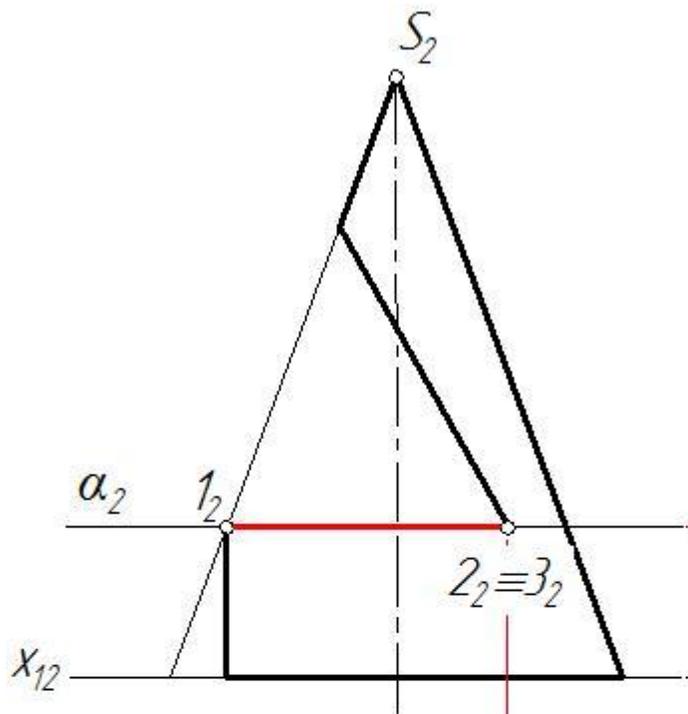
По исходному чертежу устанавливаем вид линий пересечения плоскостей, ограничивающих вырез, с конусом.

Коническую поверхность пересекают

- плоскость  $\alpha$ - по окружности,
- плоскость  $\beta$  по гиперболе,
- плоскость  $\gamma$ - по эллипсу.

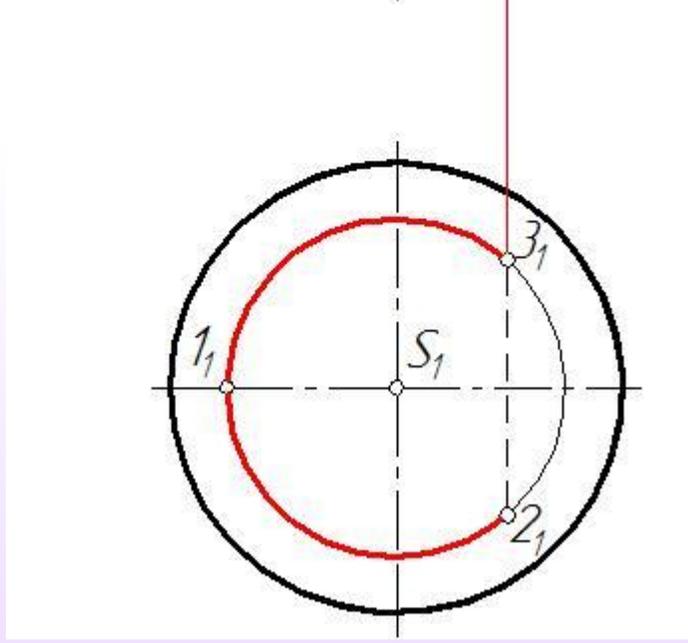
Заданное геометрическое тело – конус с вырезом

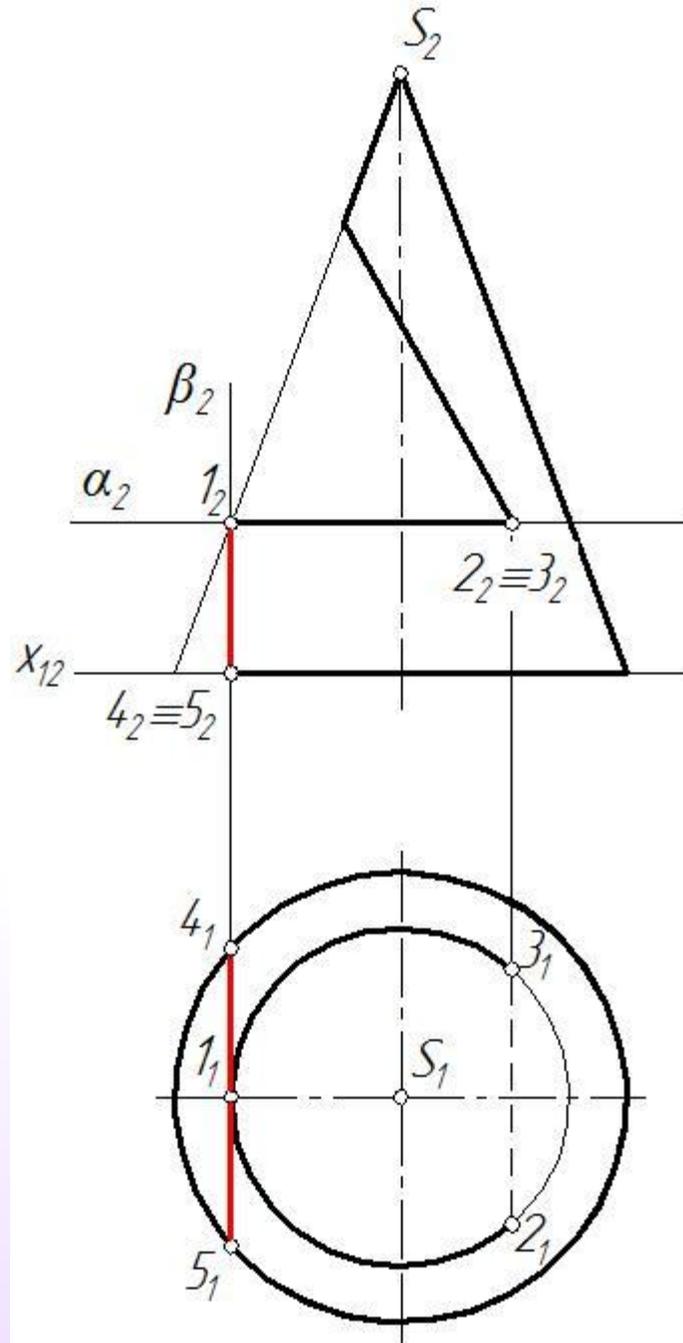




Коническую поверхность плоскость  $\alpha$  пересекает по окружности,

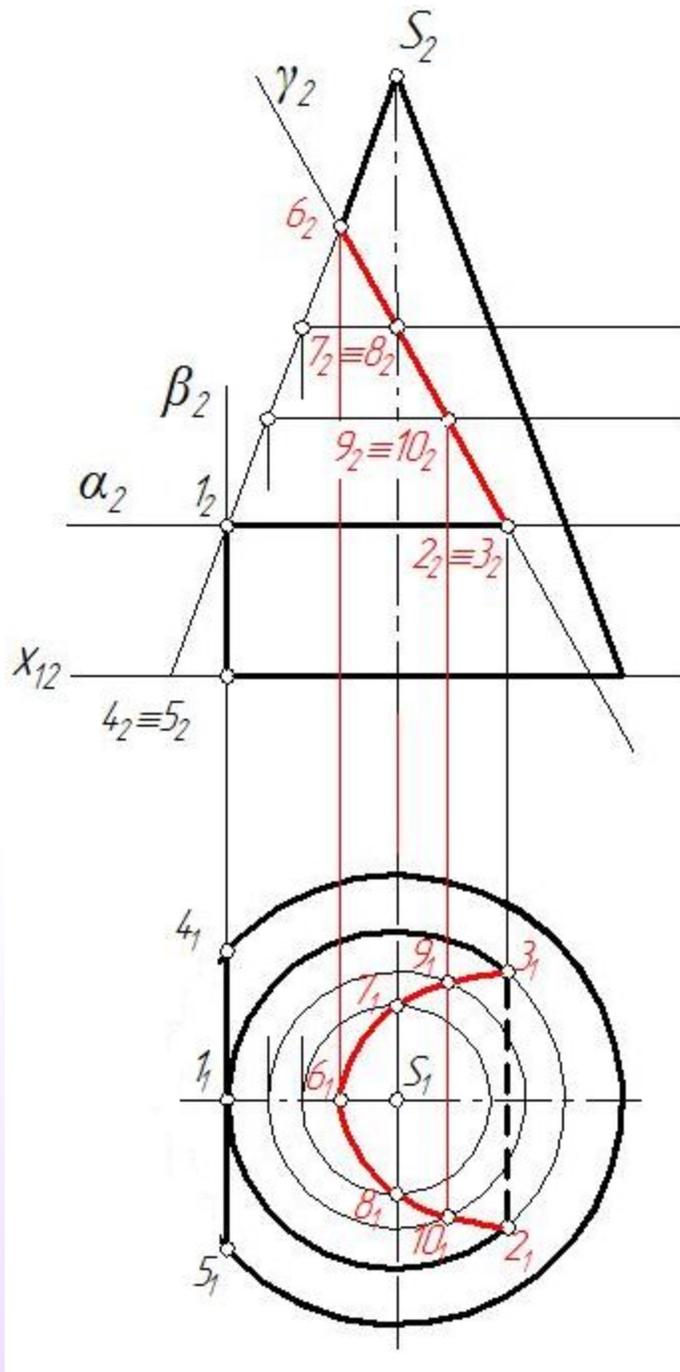
Часть линии выреза – дуга





Коническую поверхность плоскость  $\beta$  пересекает по гиперболе, горизонтальная проекция которой – прямая, а профильная проекция – гипербола.

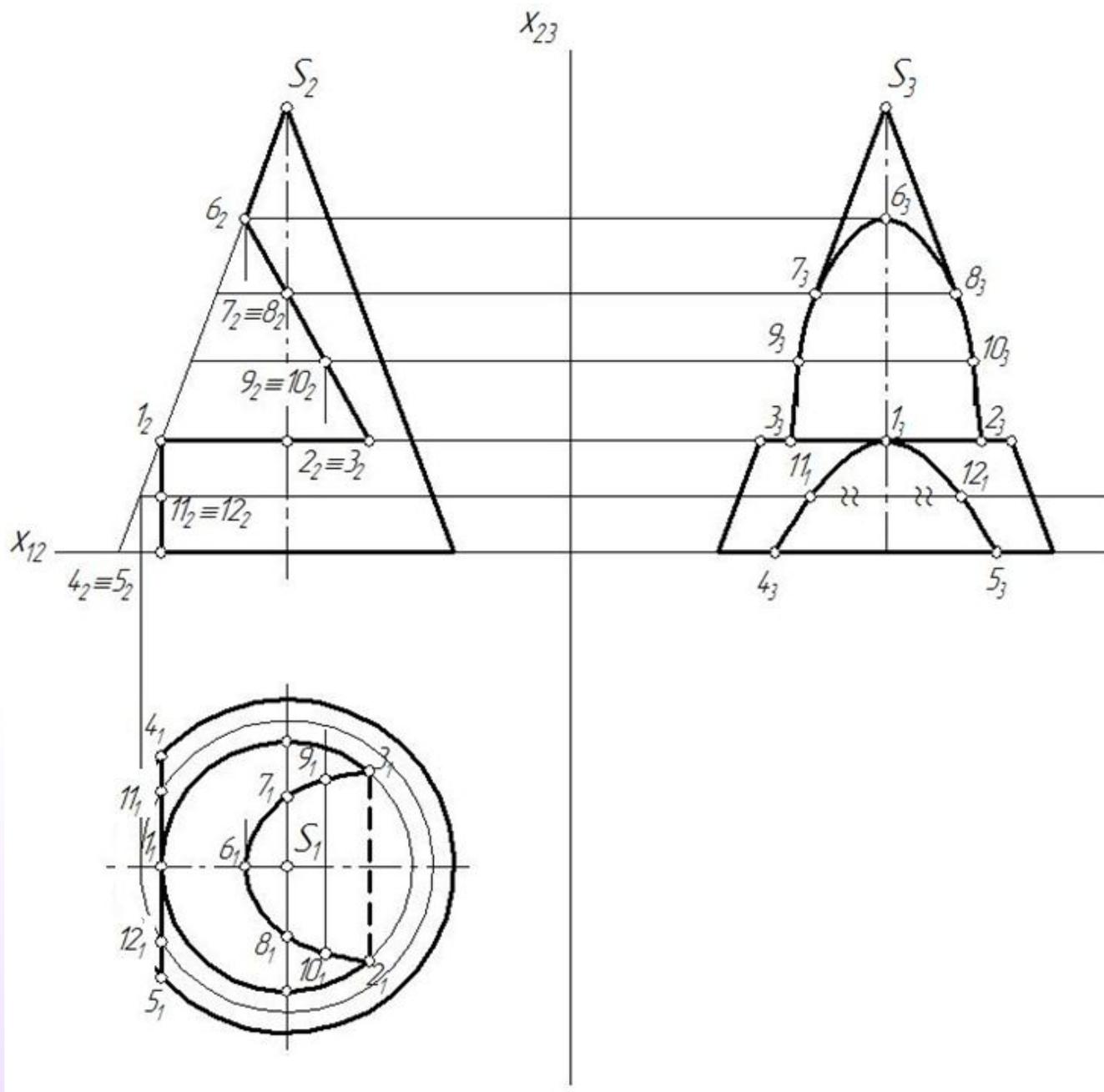
$$\beta \perp \Pi_3$$



Коническую поверхность плоскость  $\gamma$ - пересекает по эллипсу.

Для построения кривой линии строим

- Опорные точки-6,7,8
- Промежуточные точки для уточнения линии-9,10



Строим профильную проекцию конуса и профильные проекции точек выреза. Для построения профильной проекции гиперболы отмечаем точки 11 и 12. Находим горизонтальные и профильные проекции этих точек.

# **Пересечение поверхности плоскостью общего положения**

Линия пересечения поверхности с плоскостью является *линией*, одновременно принадлежащей поверхности и секущей плоскости. Поэтому необходимо построить точки и линии, которые *одновременно принадлежат* поверхности и плоскости.

*Замкнутая фигура*, образованная линией пересечения поверхности тела секущей плоскостью, которая называется *сечением*.

*Линия пересечения строится с использованием метода **секущих плоскостей – посредников** или способом **дополнительного ортогонального проецирования(перемена плоскостей проекций)***

**Способ *дополнительного ортогонального проецирования(перемена плоскостей проекций)***

**используется для преобразования плоскости общего положения в плоскость частного положения. В некоторых случаях это облегчает решение задачи.**

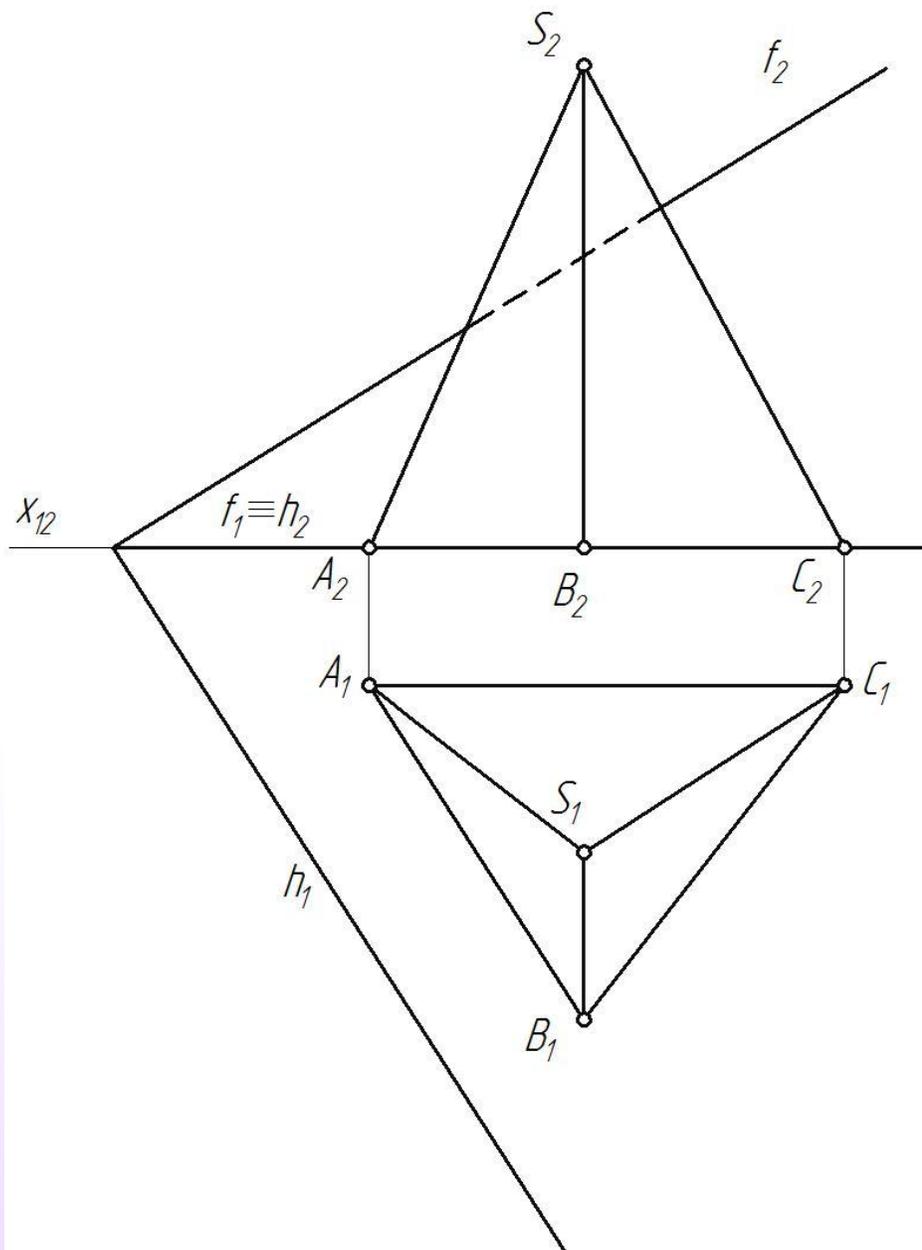
**Пересечение**

**многогранников плоскостью**

**общего положения**

При сечении многогранника плоскостью образуется **ломанная линия**.

Проекциями сечения многогранников, в общем случае являются **многоугольники**, вершины которых принадлежат **ребрам**, а стороны — **граням** многогранника.



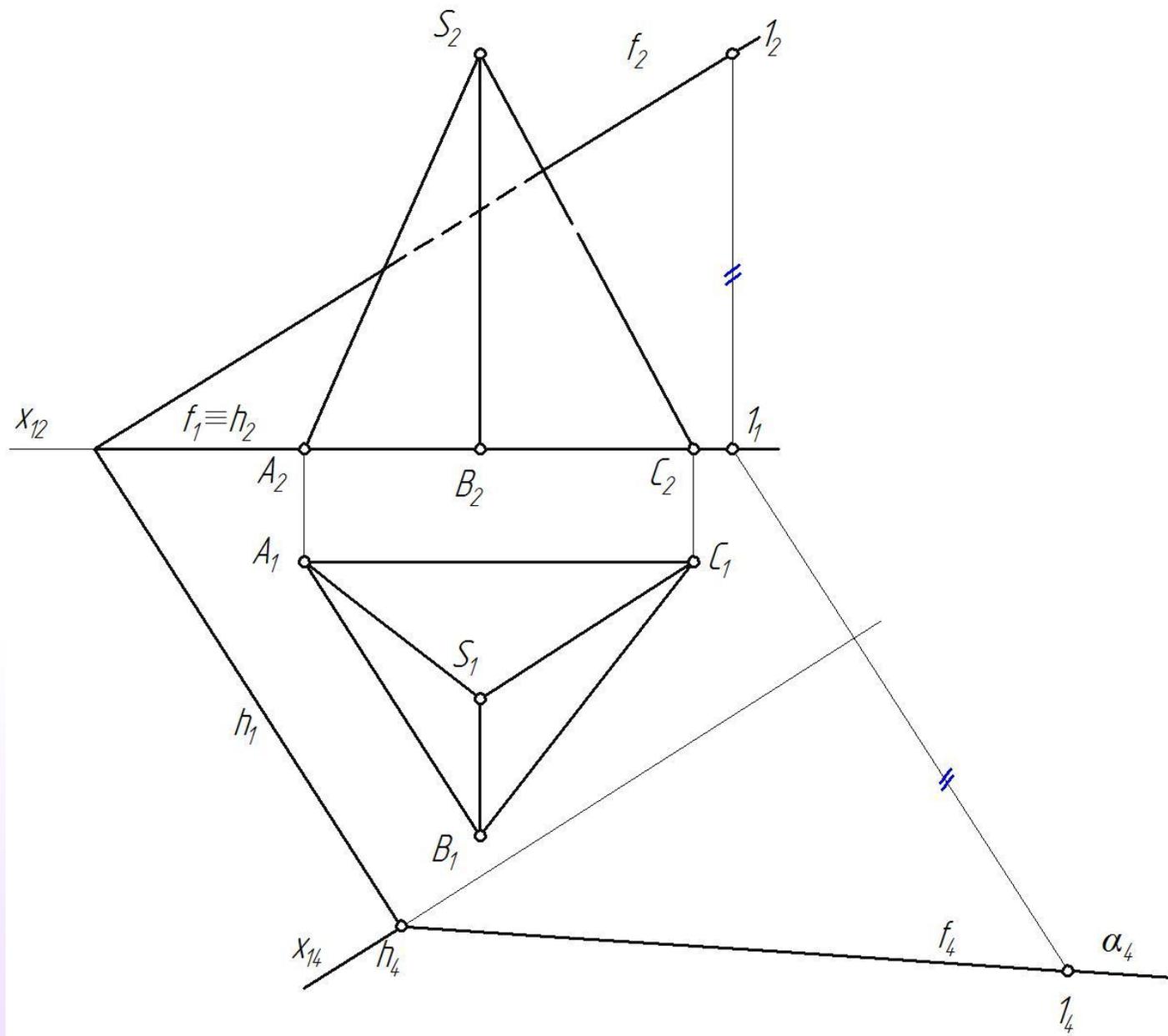
## Задача 1

Пирамида  $\Phi\{SABC\}$  и плоскость  $\alpha$

$(h \cap f)$

$m = \Phi \cap \alpha$ ;  $m \{M, N, K\}$  - ?

**Ребро  $SB$  – профильная прямая.**



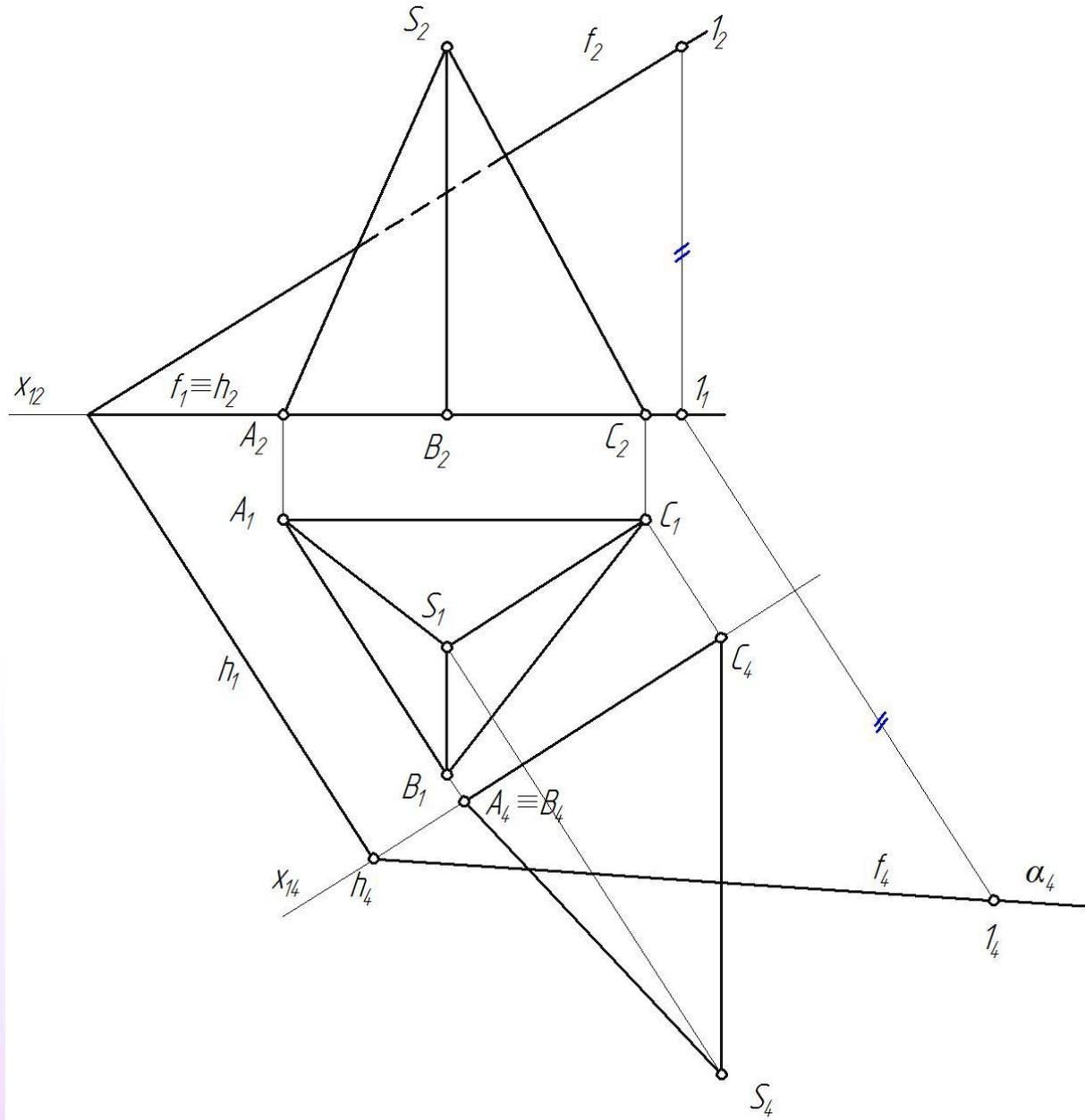
Введем плоскость  $\Pi_4$

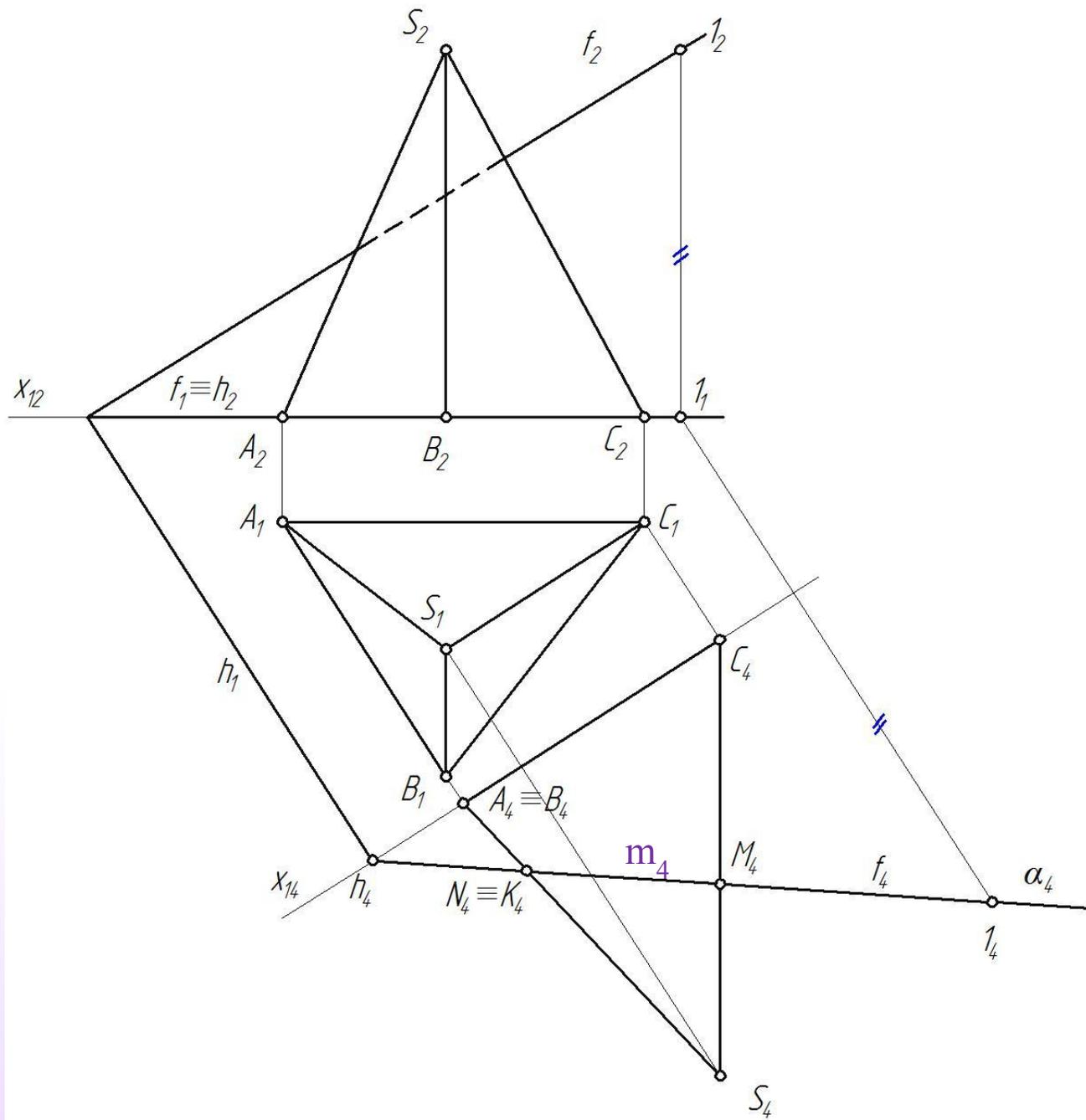
$$\Pi_4 \perp \Pi_1$$

$$\left. \begin{array}{l} \Pi_4 \perp \alpha \end{array} \right\}$$

Плоскость  $\alpha$  преобразуем из  
плоскости общего положения в  
частное

Построим пирамиду  $\Phi\{SABC\}$  на плоскости  $\Pi_4$ .





$$m = \Phi \cap \alpha;$$

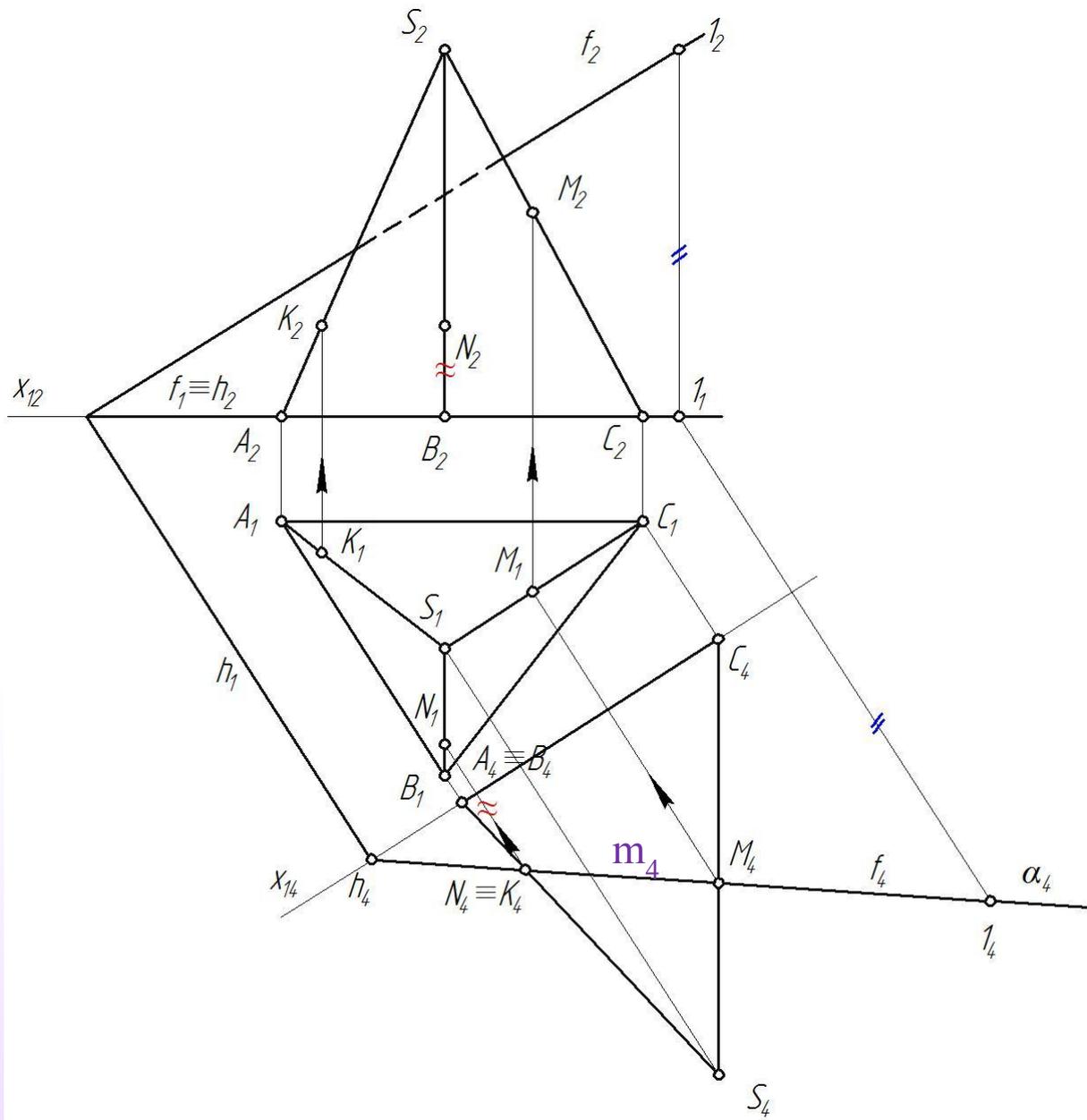
$$\alpha \perp \Pi_4 \Rightarrow \alpha_4 \equiv m_4$$

$$m \{M, N, K\}$$

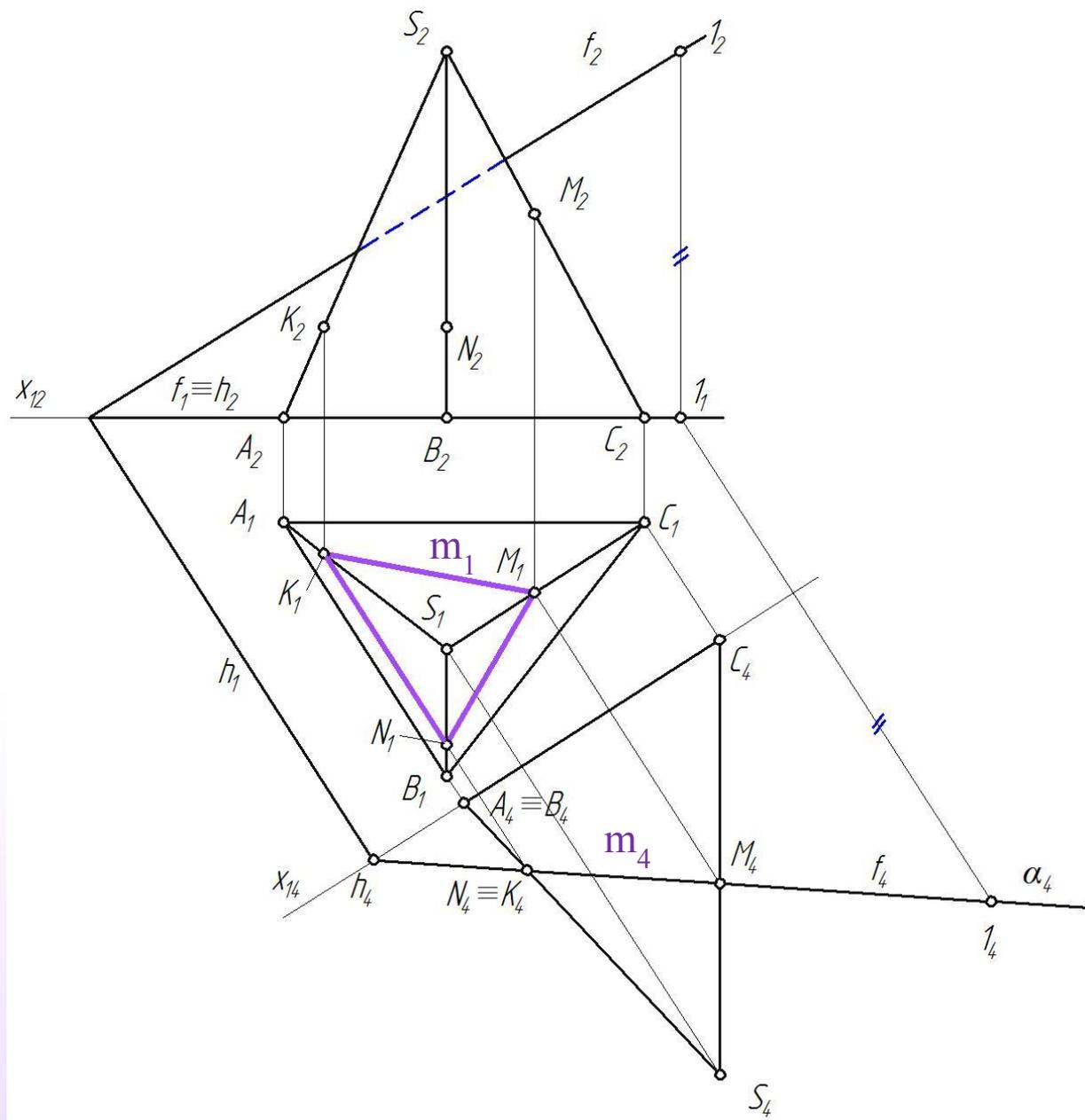
$$K = AS \cap \alpha;$$

$$M = CS \cap \alpha;$$

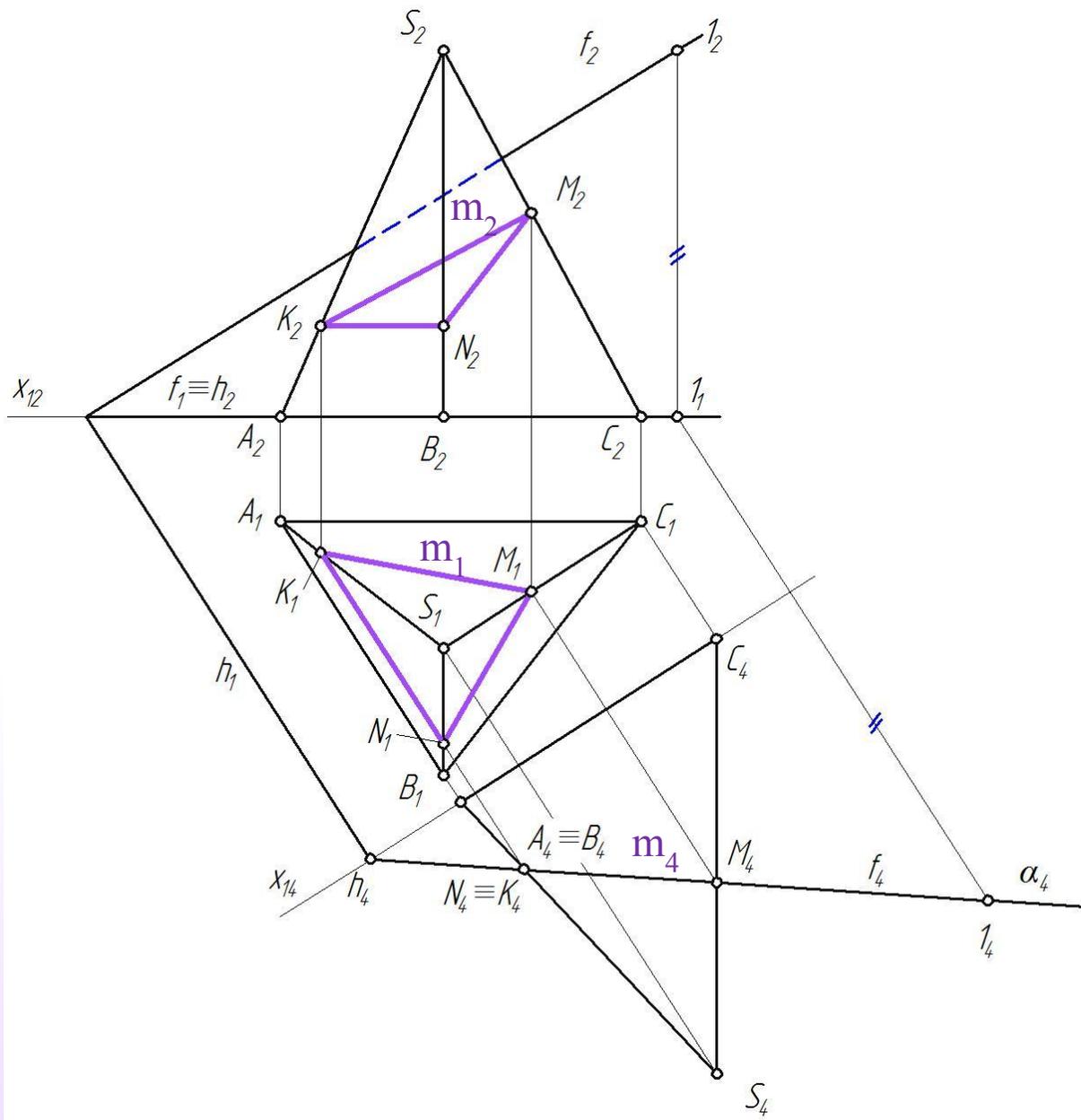
$$N = BS \cap \alpha$$



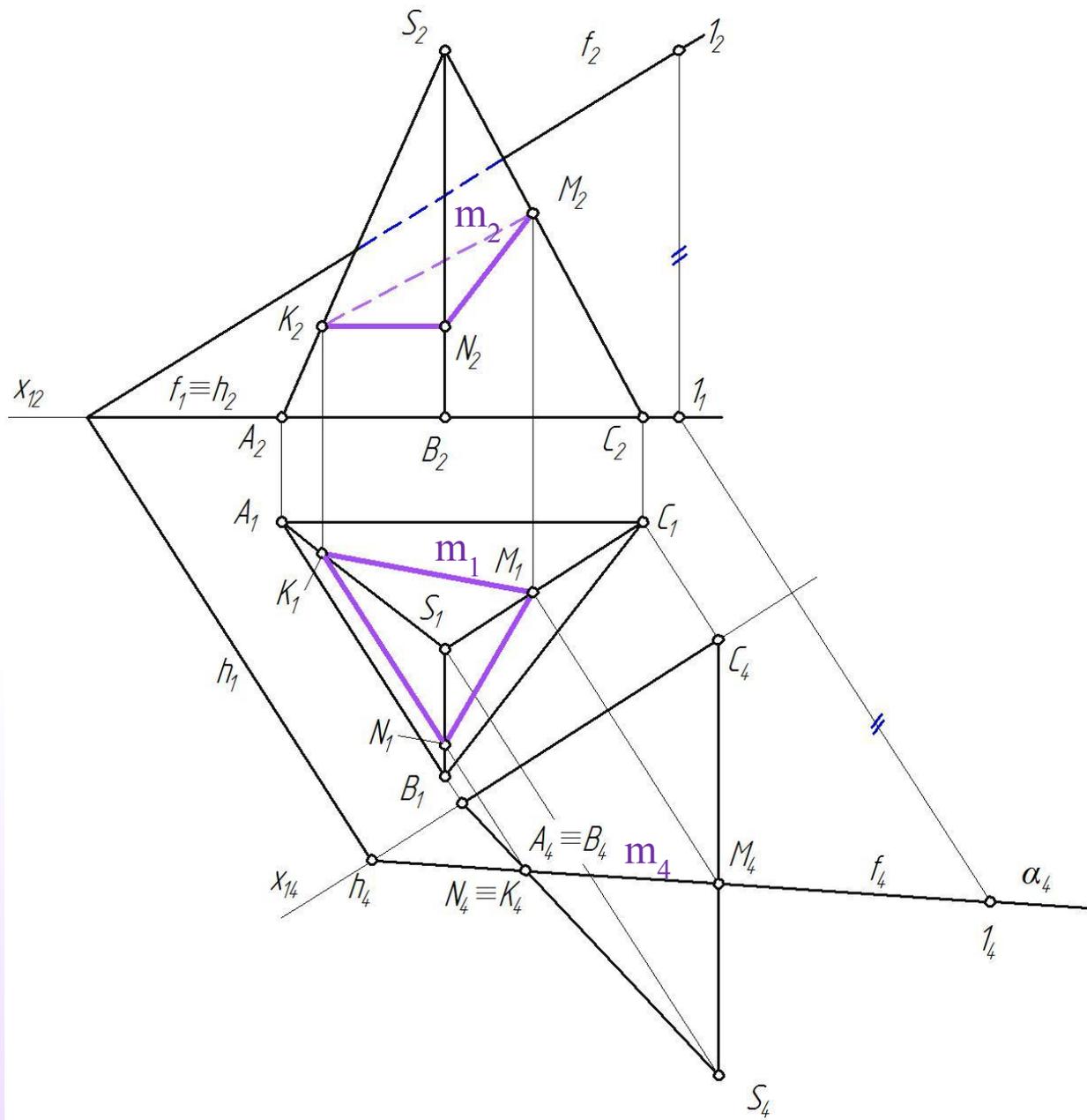
**Строим**  
**горизонтальные и**  
**фронтальные**  
**проекции точек**  
**пересечения**  
 $\mathbf{K} = AS \cap \alpha;$   
 $\mathbf{M} = CS \cap \alpha;$   
 $\mathbf{N} = BS \cap \alpha$



$m_1 \{M_1, N_1, K_1\}$



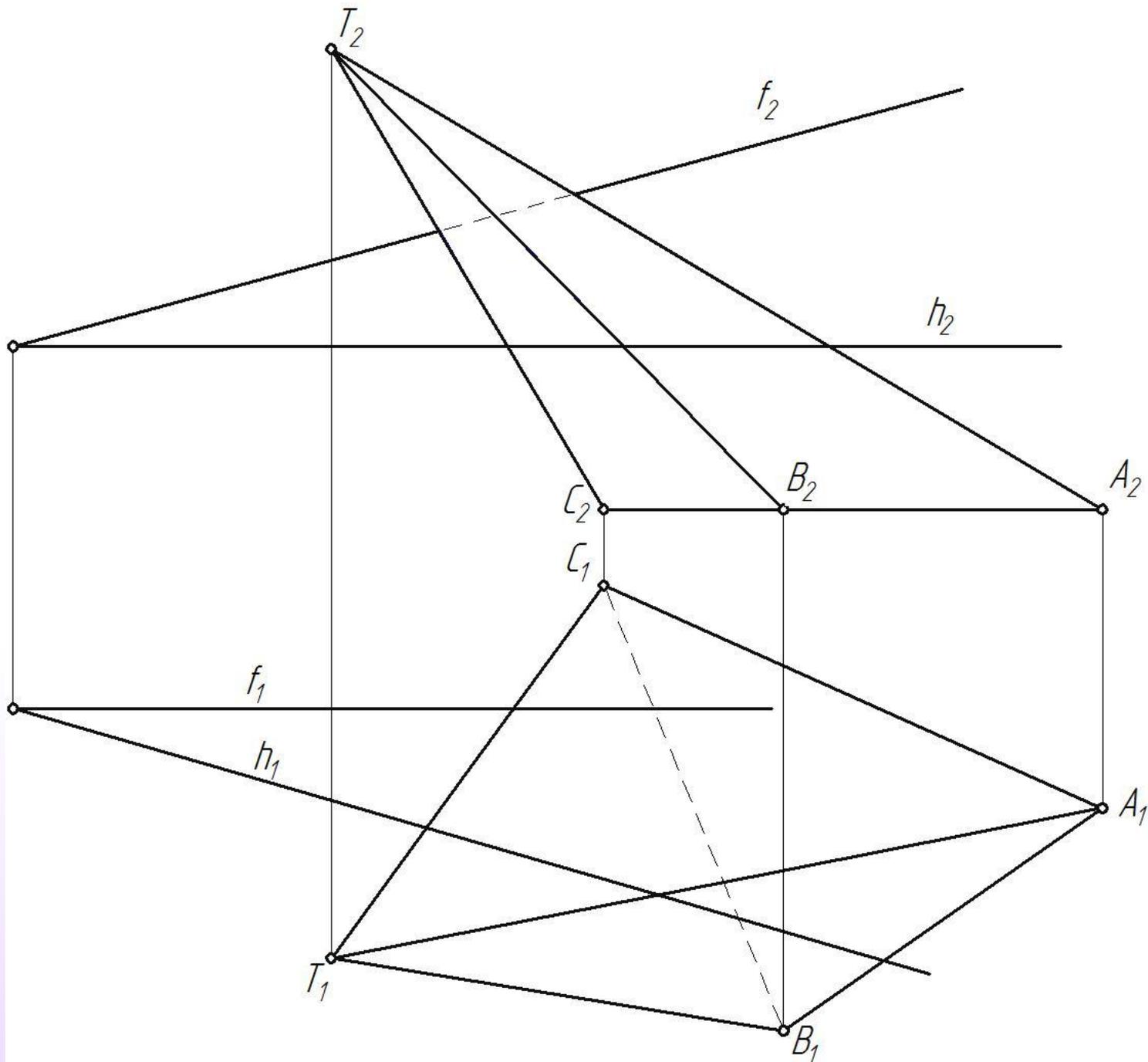
$m_2 \{M_2, N_2, K_2\}$



*Определяем видимость линии пересечения*

**Задача по определению сечения многогранника сводится к многократному решению задач:**

- **Определение точки пересечения прямой (*ребер многогранника*) с плоскостью**
- **Нахождение линии пересечения двух плоскостей (*грани многогранника и секущей плоскости*).**



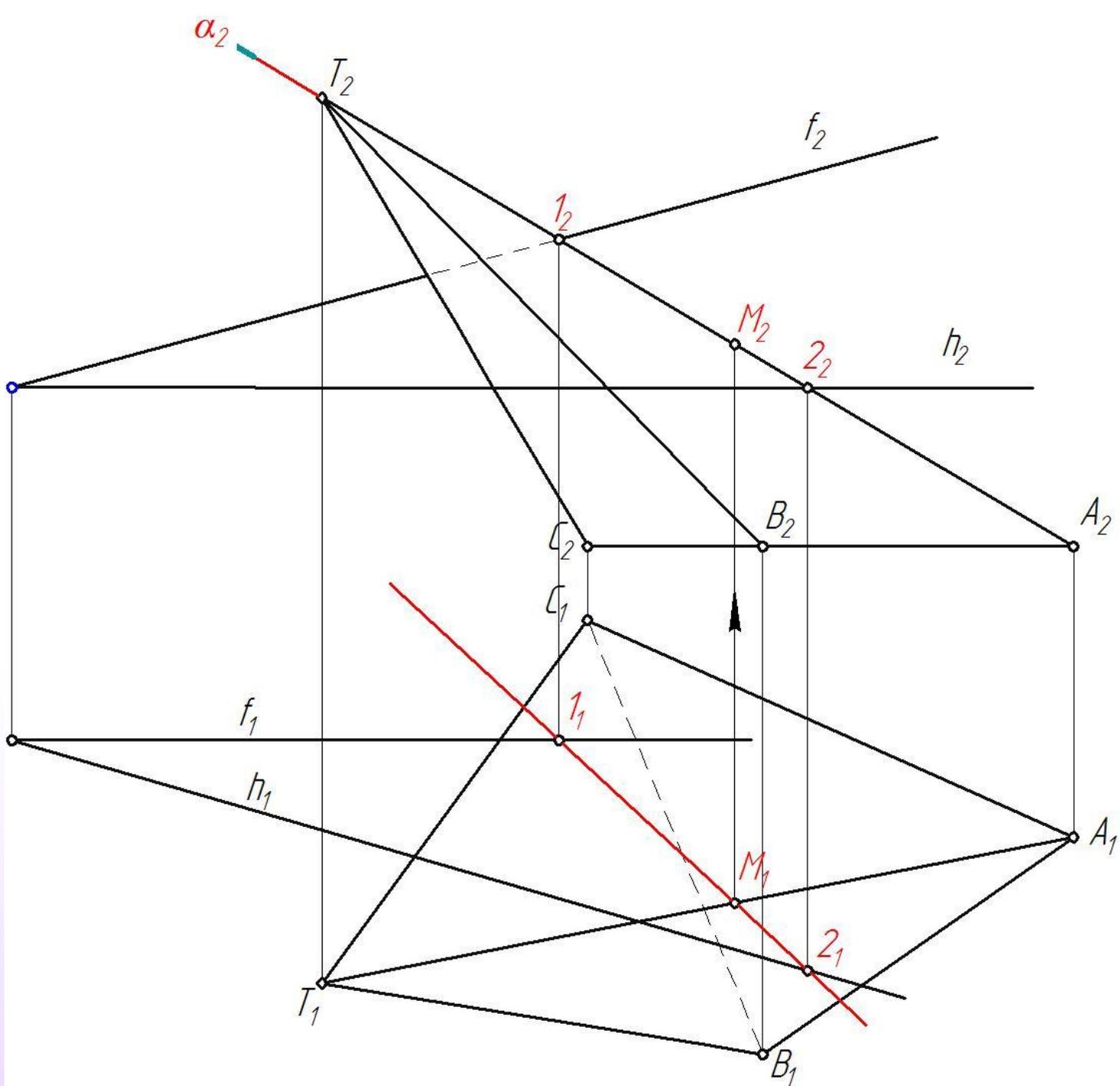
## Задача 2

Пирамида  $\Phi\{TABC\}$  и  
плоскость  $\delta(h \cap f)$

$m = \Phi \cap \delta$ ;  $m\{M, N, L\}$  - ?

*Линия пересечения строится с  
использованием метода  
секущих плоскостей –  
посредников*

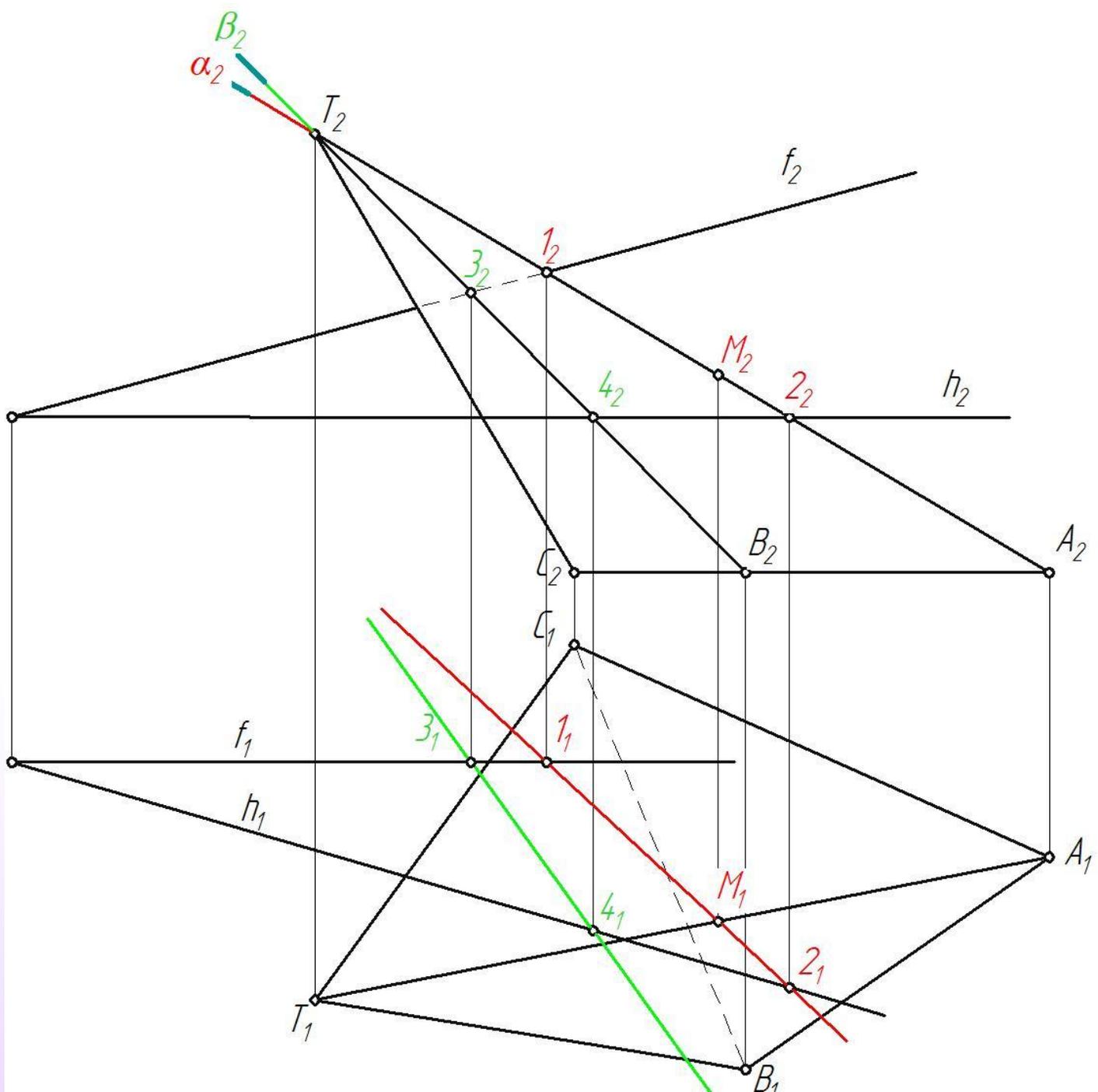




3. Точка пересечения построенной прямой (12) с ребром (ТА) есть первая точка линии пересечения

$$(12) \cap (ТА) \equiv M$$

*Повторяем алгоритм еще два раза (по количеству ребер многогранника)*

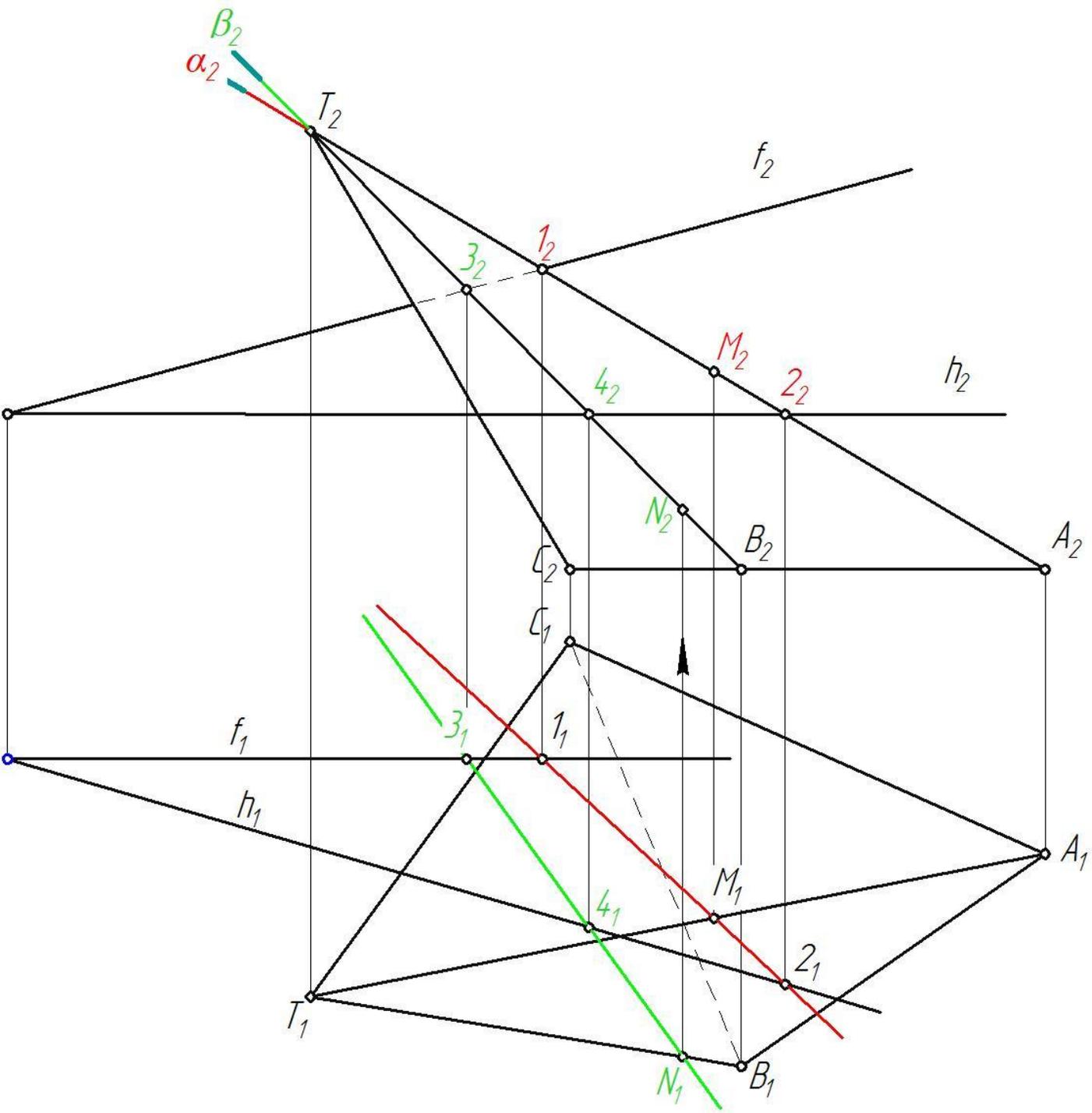


4. Вводим плоскость – посредник  $\beta$

$$\beta \perp \Pi_2, (TV) \subset \beta,$$

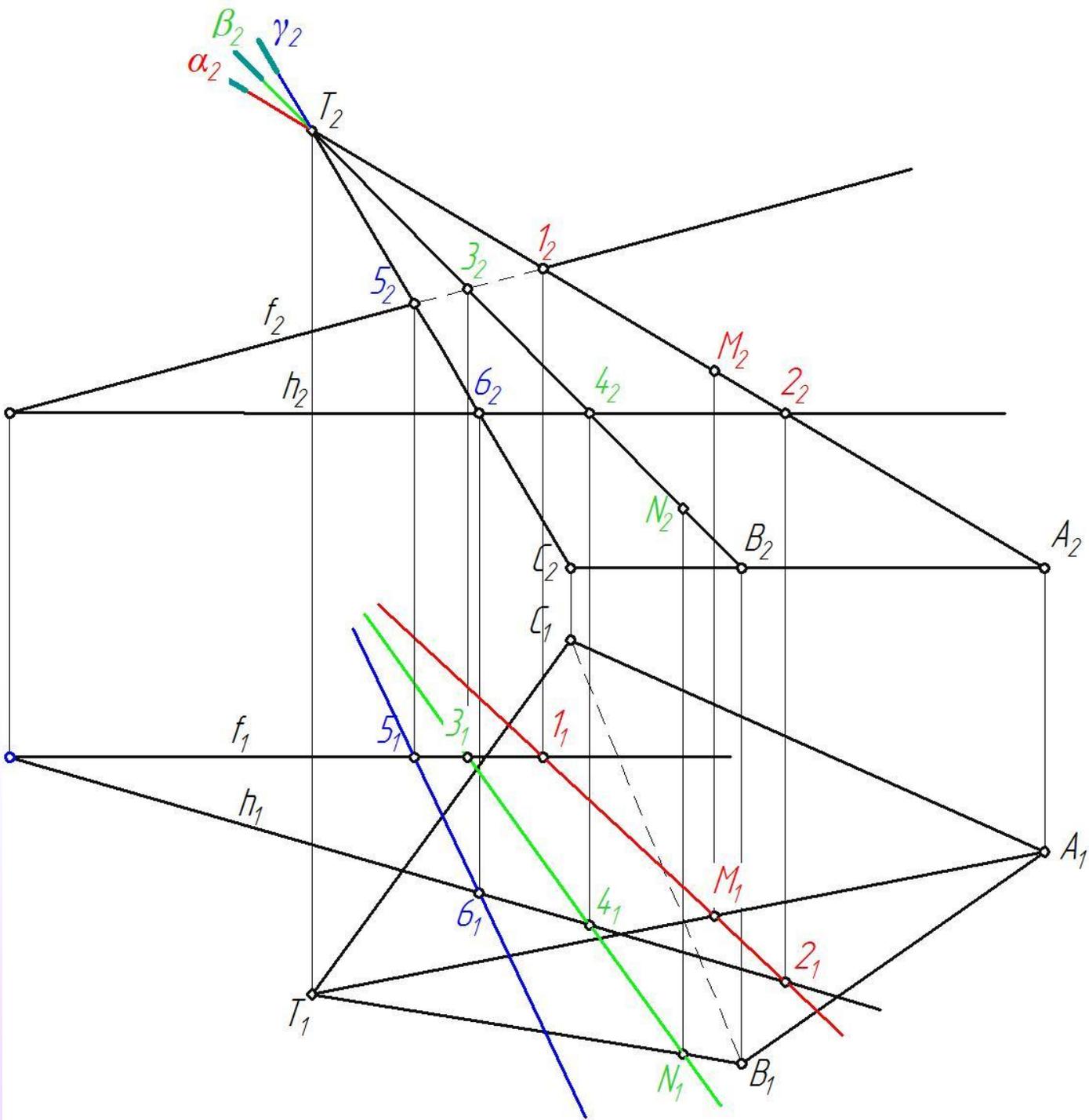
5. Находим линию пересечения  
заданной плоскости  $\delta$  и введенной  
плоскости  $\beta$

$$\beta \cap \delta \equiv (34)$$



6. Точка пересечения  
 построенной прямой (34) с  
 ребром (ТВ) есть точка линии  
 пересечения

$$(34) \cap (ТВ) \equiv N$$



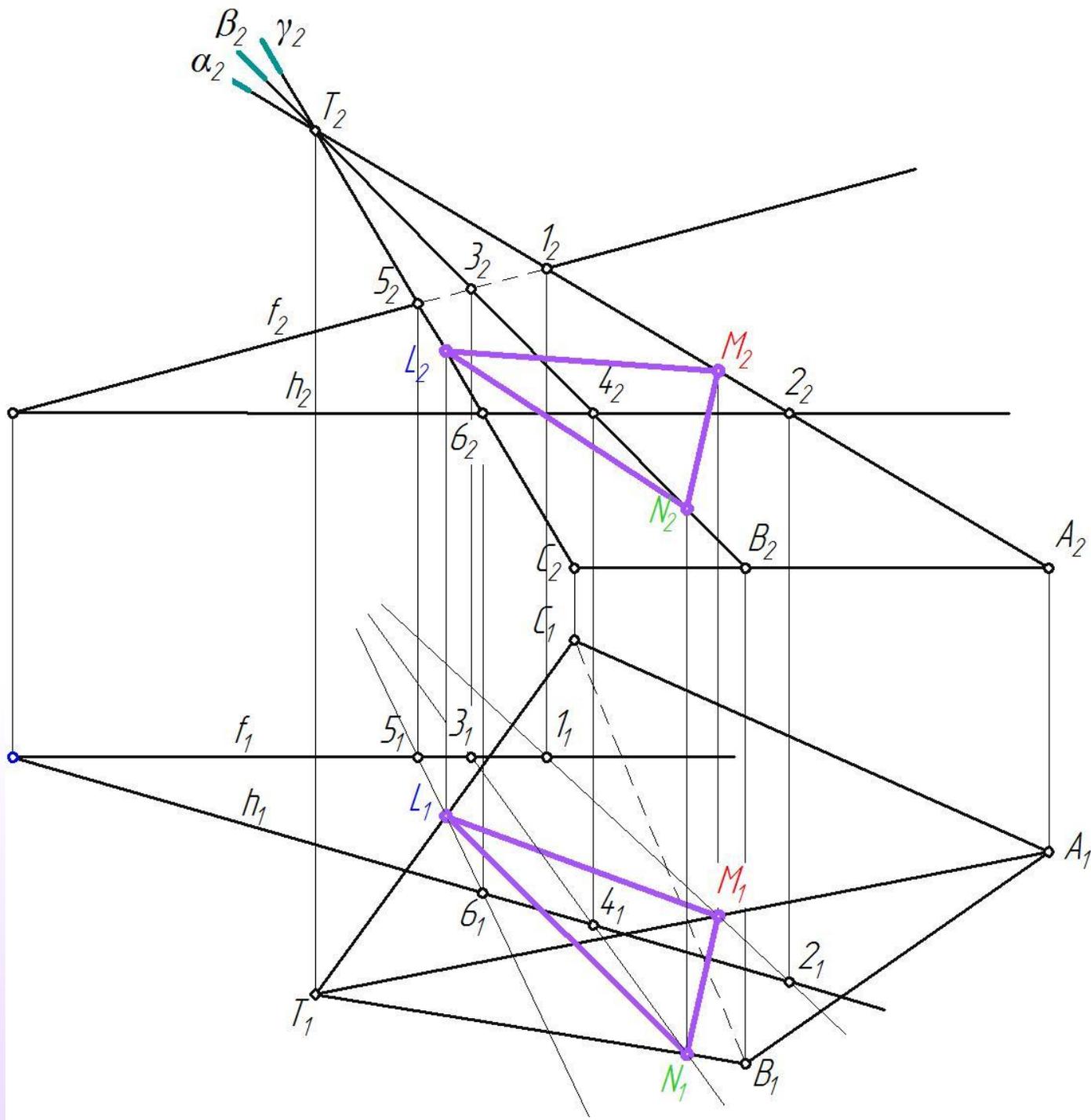
7. Вводим плоскость – посредник  $\gamma$

$$\gamma \perp \Pi_2, (TC) \subset \gamma,$$

8. Находим линию пересечения заданной плоскости  $\delta$  и введенной плоскости  $\gamma$

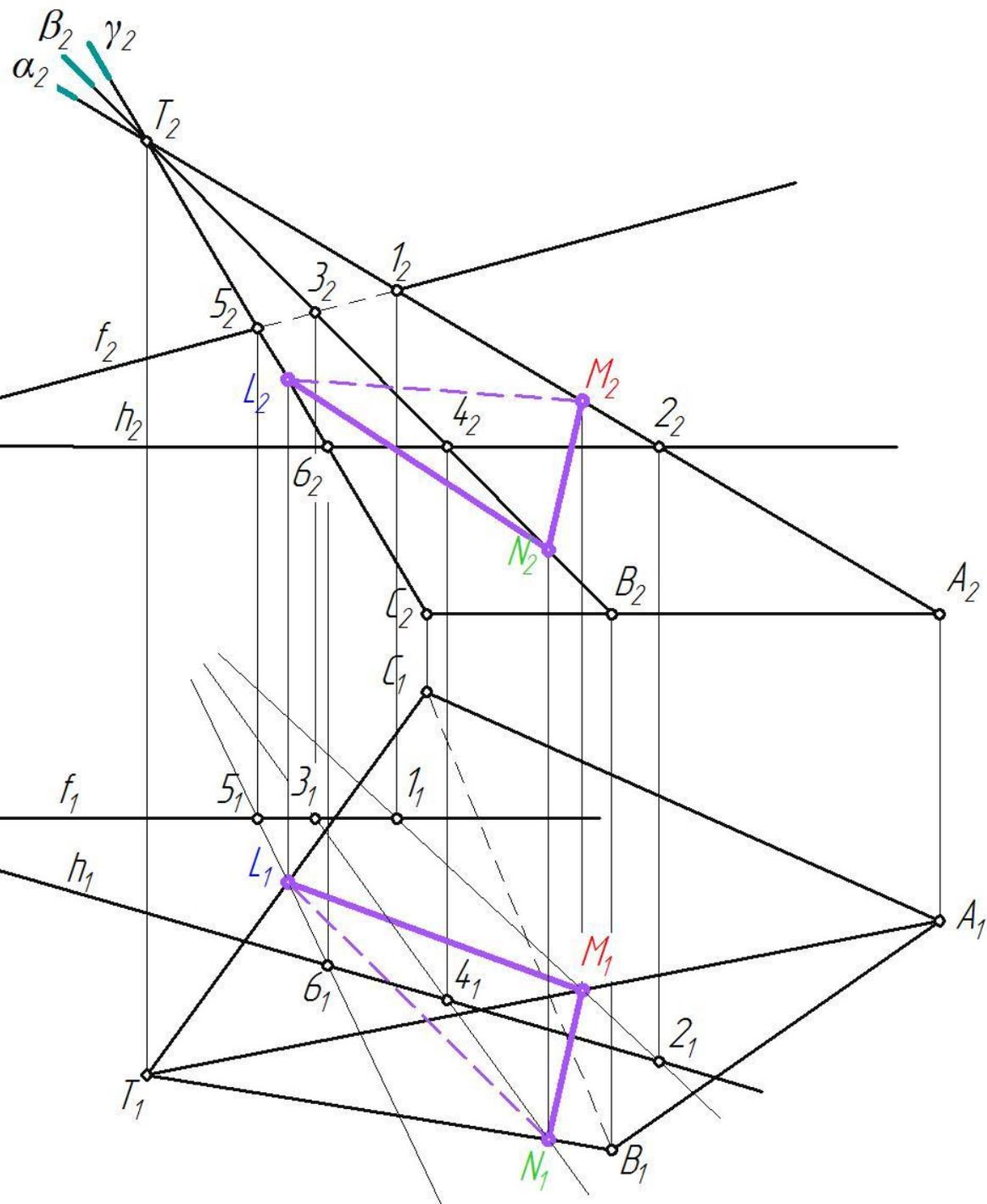
$$\gamma \cap \delta \equiv (56)$$



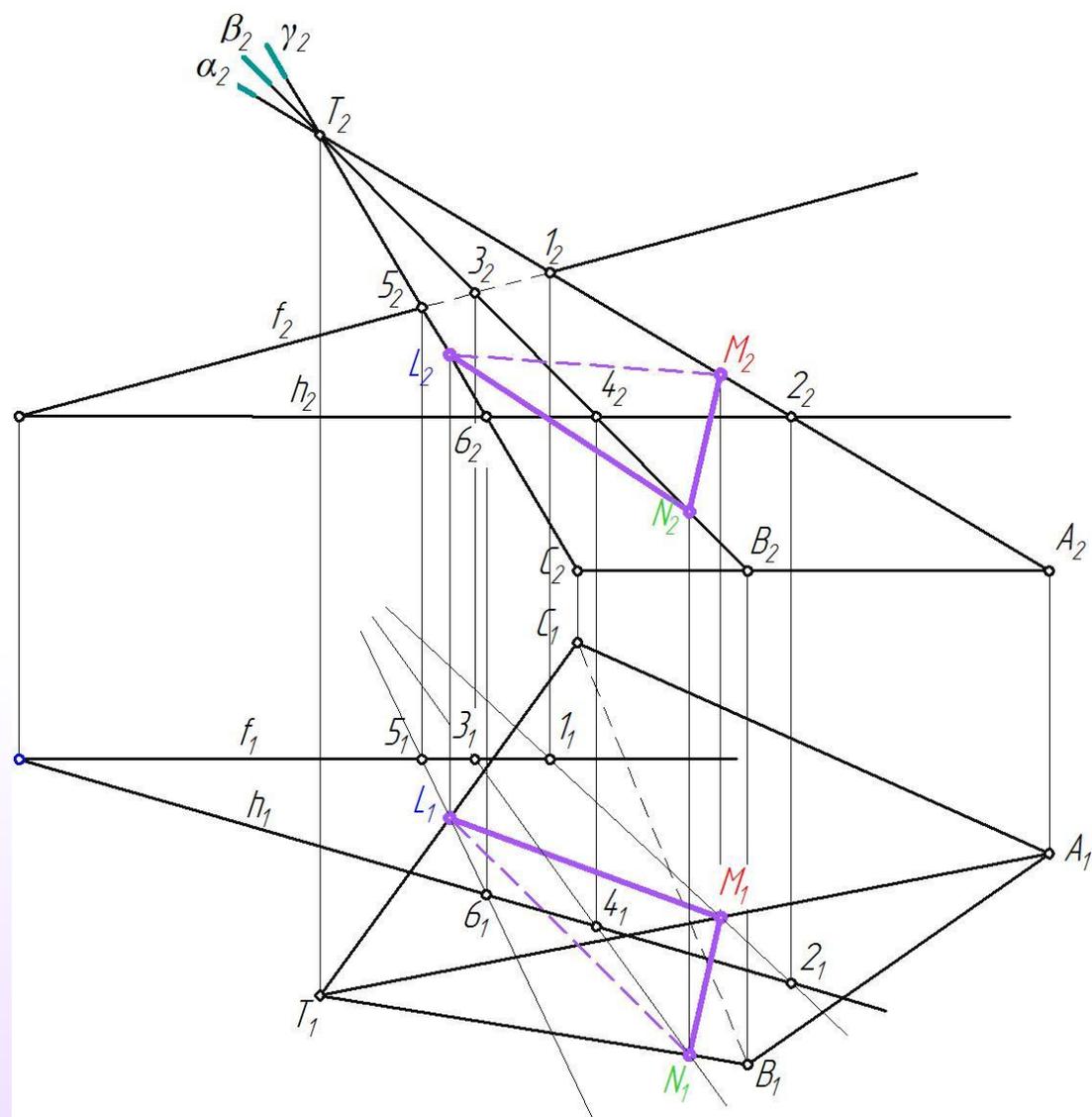
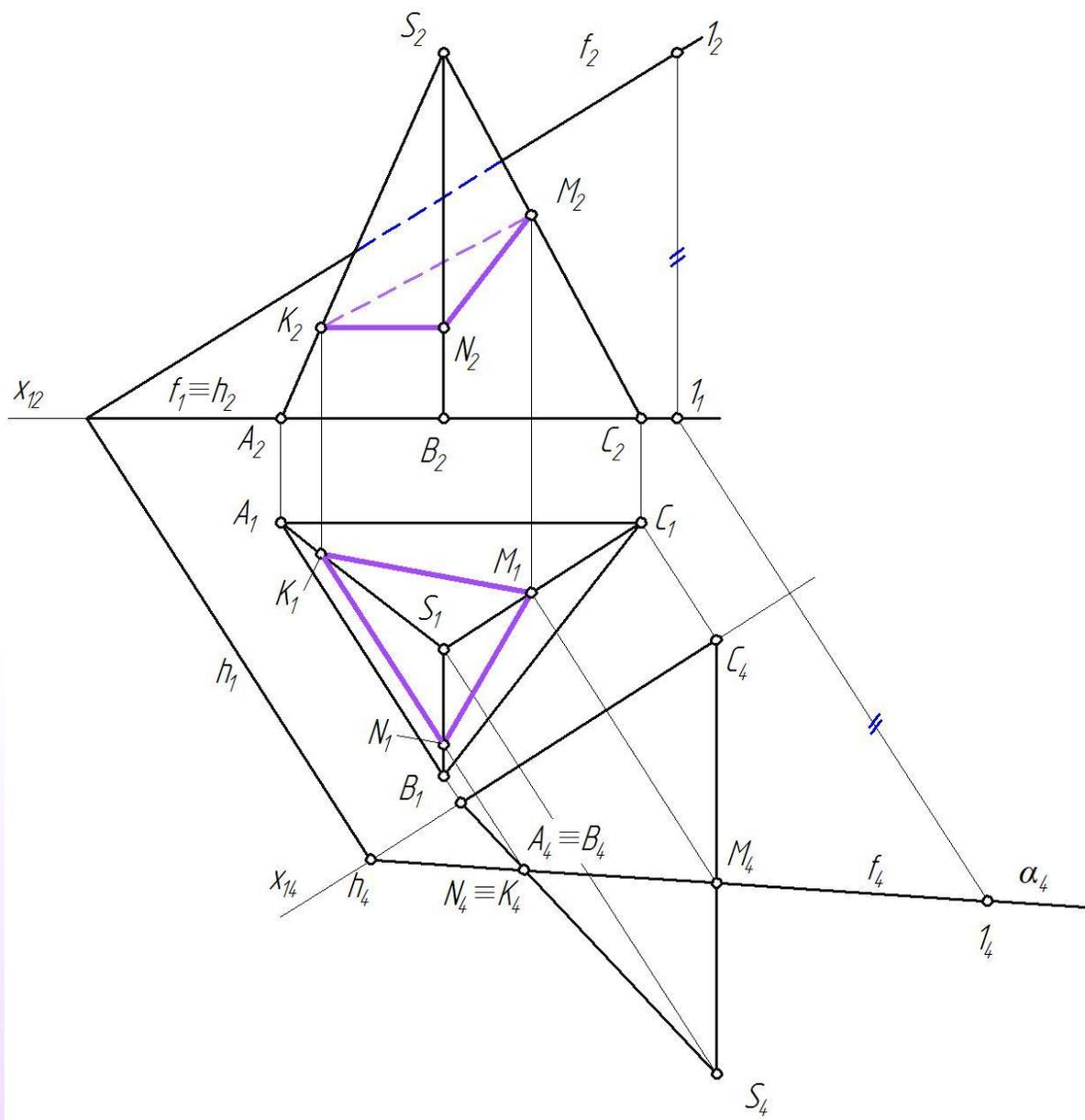


10. Строим линию пересечения

$$m \equiv \Phi \cap \delta; \quad m \in \{M, N, L\}$$



Определяем видимость  
 построенной линии пересечения  
 $m\{M, N, L\}$



**Пересечение поверхностей  
вращения плоскостью  
общего положения**

## Алгоритм решения задач на пересечение поверхности с плоскостью общего положения

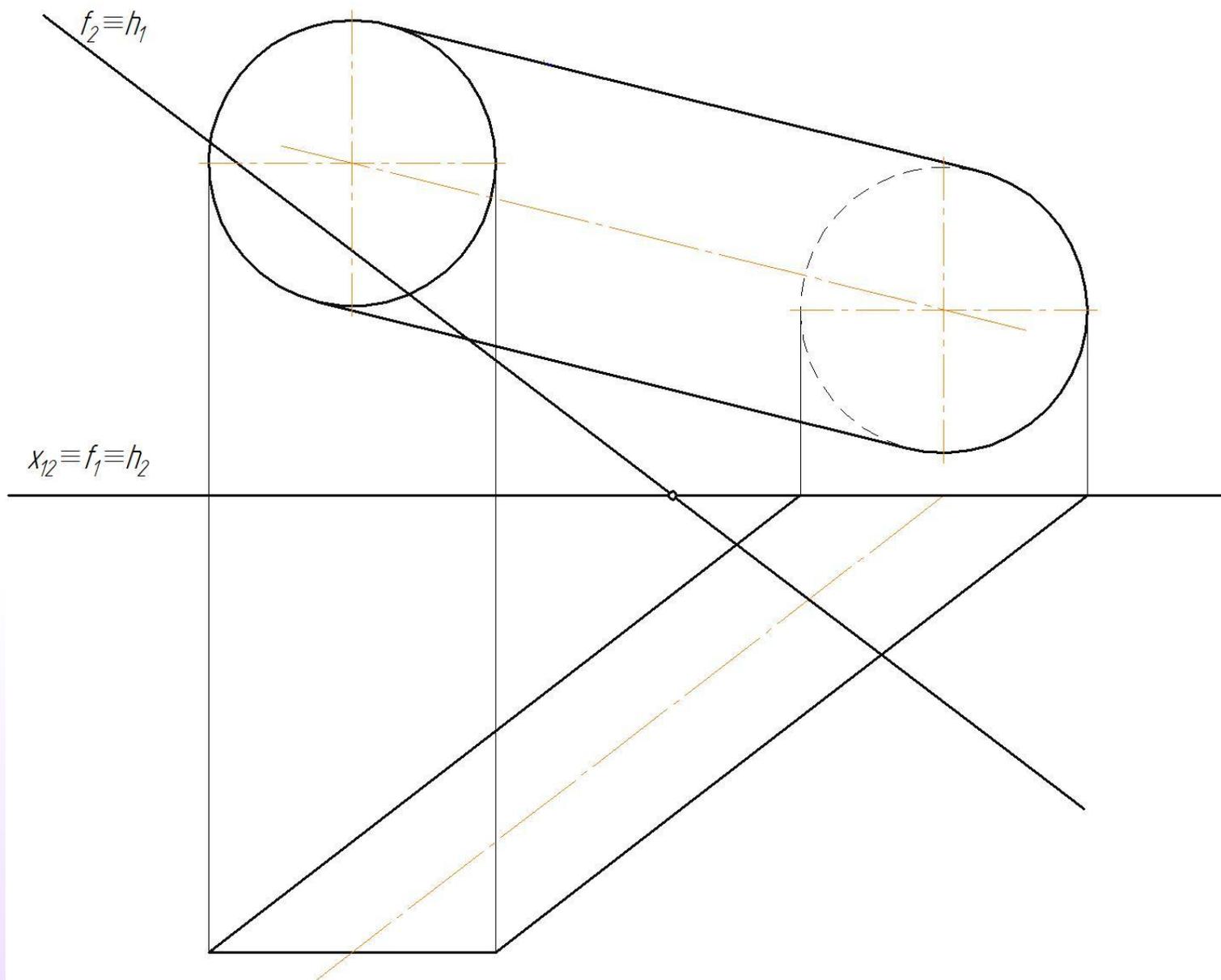
1. Образующую поверхности заключаем во вспомогательную плоскость – посредник  $\gamma$ .
2. Находим линию пересечения плоскости – посредника  $\gamma$  с заданной плоскостью  $\alpha$ :  $(12) = \alpha \cap \gamma$ .
3. Отмечаем точку, в которой построенная линия пересекается с образующей поверхности:  $M \equiv (12) \cap a$ .
4. Точка  $M$ , являясь общей для данных поверхности и плоскости будет точкой искомой линии пересечения.
5. Для построения линии пересечения необходимо найти еще ряд точек, используя плоскости – посредники.

*Обе проекции искомой линии строятся в плоскостях  $\Pi_1$  и  $\Pi_2$ .*

Количество точек, используемых для построения линии пересечения, определяется формой поверхности и точностью построения.

Но из всего множества точек линии пересечения **обязательно** должны быть построены следующие точки:

1. **Опорные точки** – точки расположенные на *очерковых образующих поверхности*. Эти точки определяют границы видимости проекции кривой.
2. Точки, определяющие **габариты фигуры сечения**;
3. Для уточнения линии пересечения строим **промежуточные точки**.

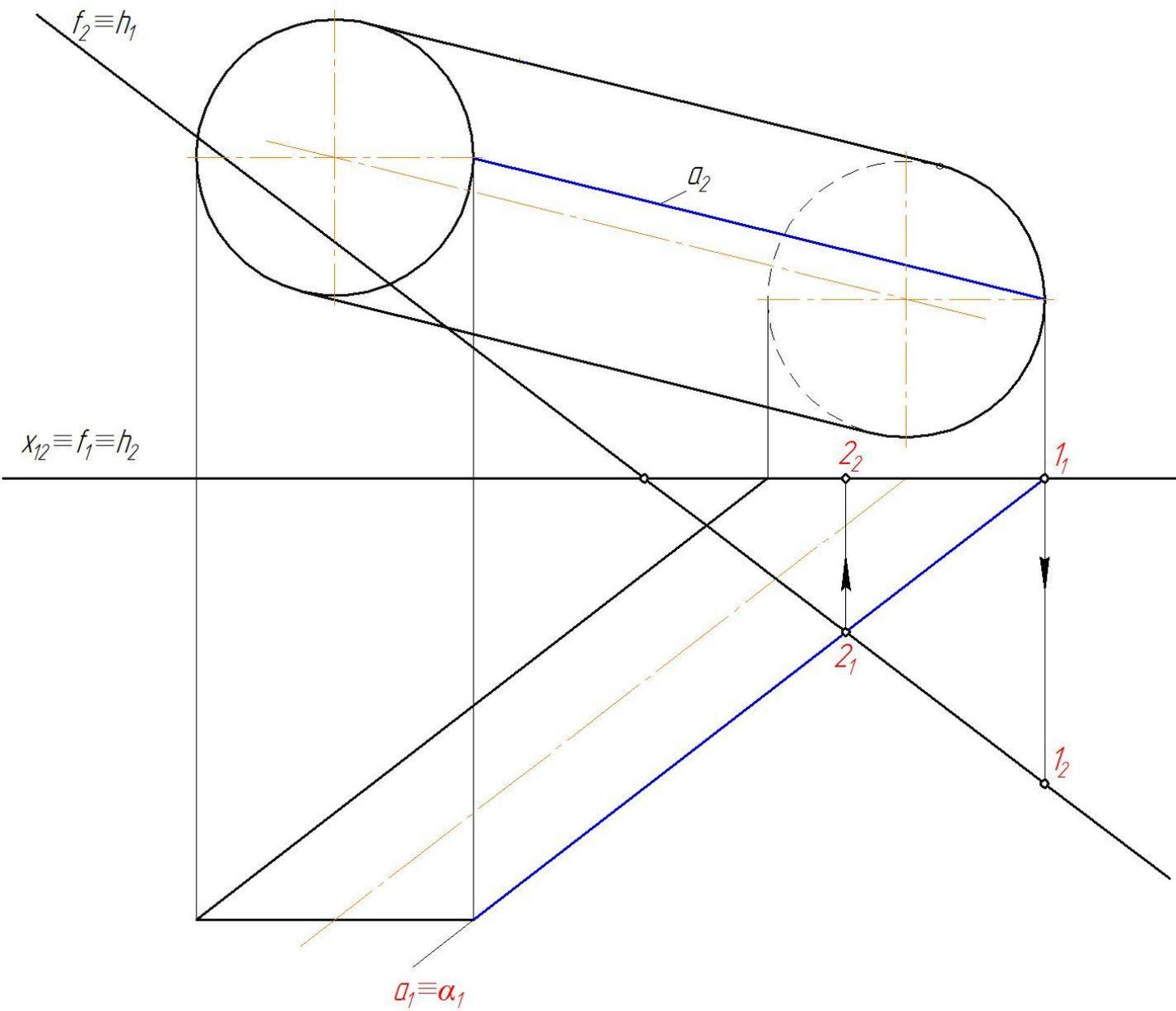


### Задача 3

Цилиндр  $\Phi$  и плоскость

$\gamma(\mathbf{h} \cap \mathbf{f})$

$q = \Phi \cap \gamma - ?$

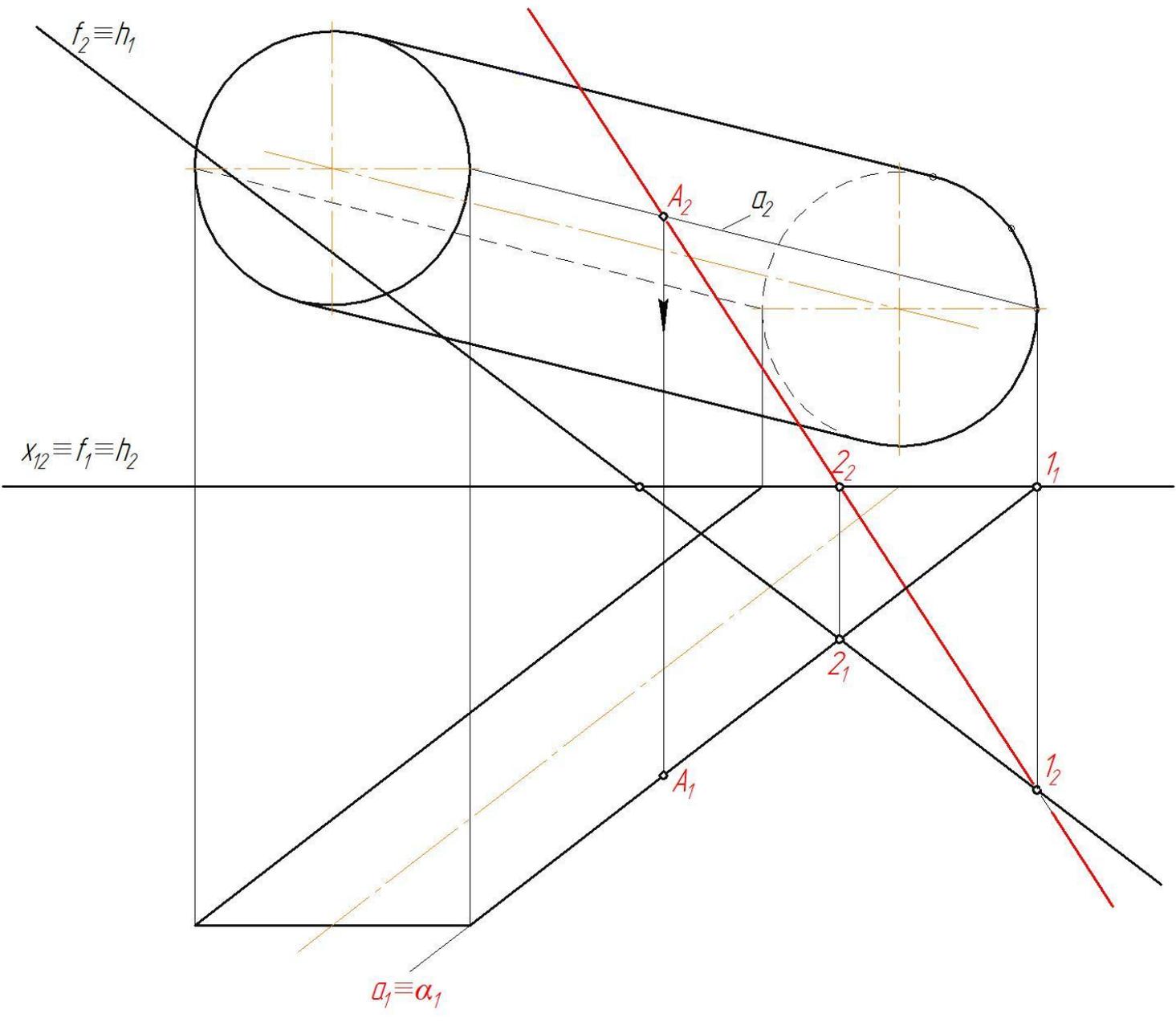


1. Образующую поверхности **a** заключаем во вспомогательную плоскость – посредник **α**.

$$\alpha \perp \Pi_1, a \subset \alpha,$$

Находим точки пересечения плоскости – посредника **α** с заданной плоскостью **γ** :

$$1,2 = \alpha \cap \gamma.$$

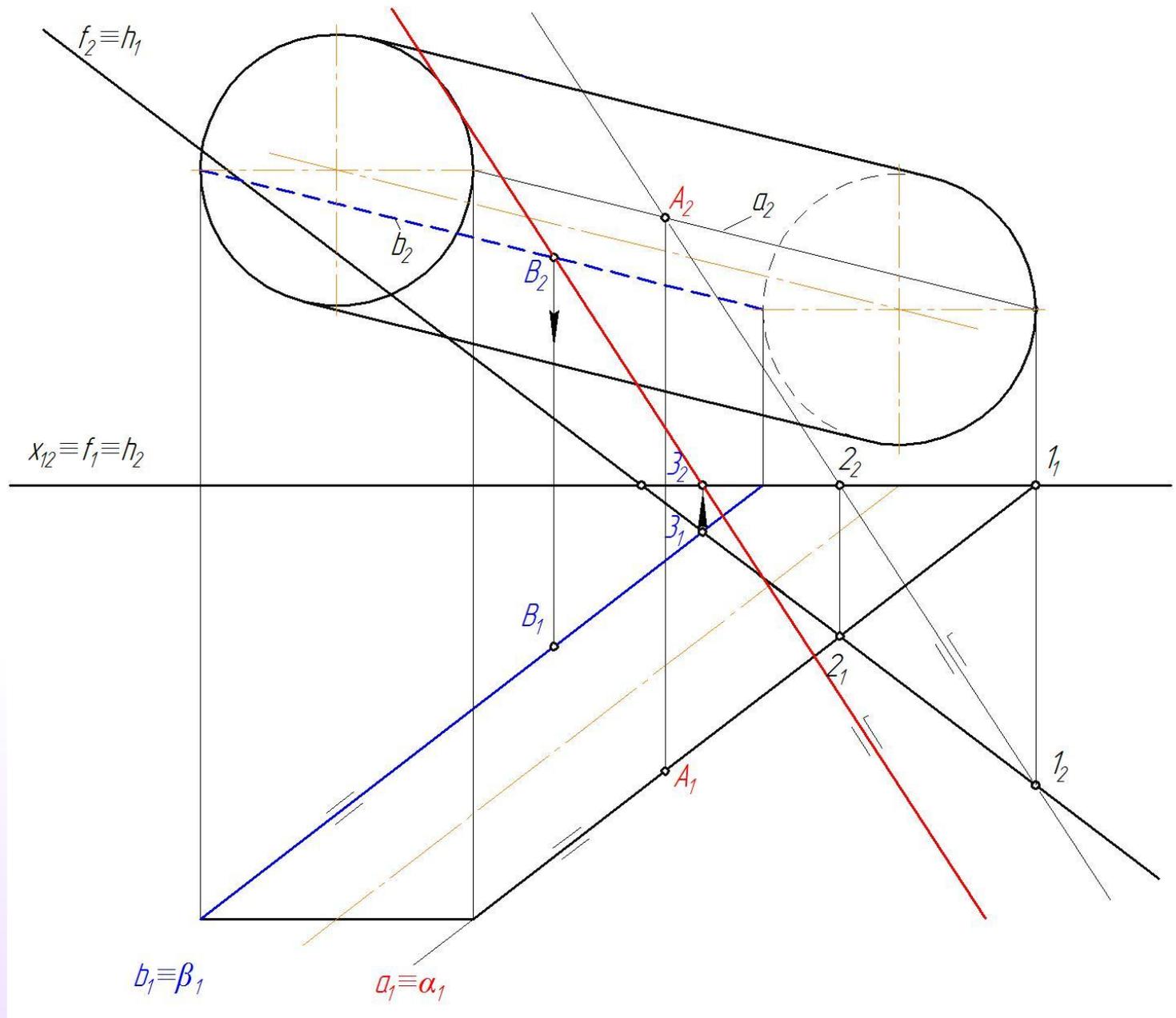


2. Находим линию пересечения плоскости – посредника  $\alpha$  с заданной плоскостью  $\gamma$  :

$$(12) = \alpha \cap \gamma.$$

3. Отмечаем точку, в которой построенная линия пересекается с образующей поверхности :

$$A \equiv (12) \cap a.$$

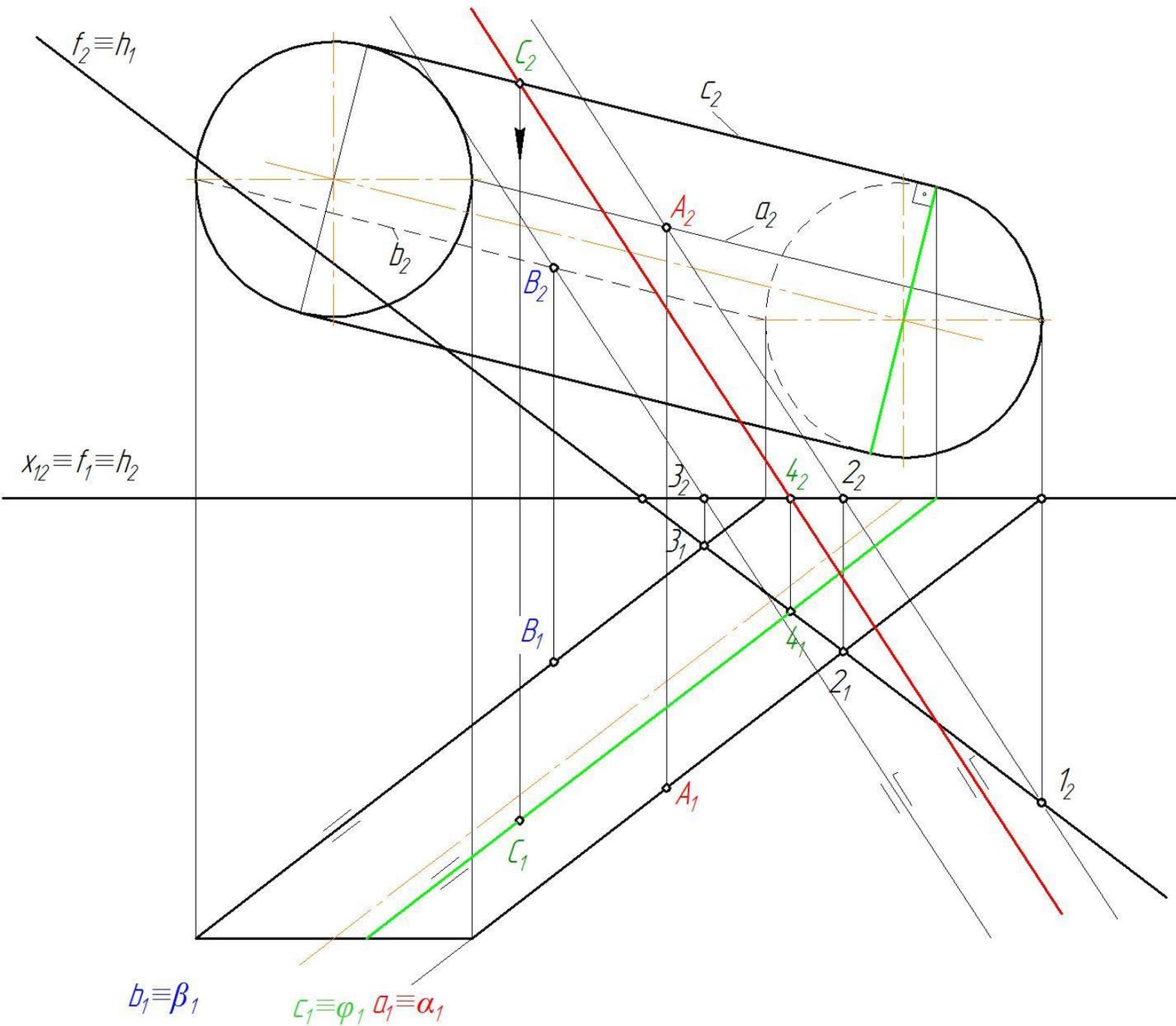


1.  $\beta \perp \Pi_1, b \subset \beta,$

2.  $(3) = \beta \cap \gamma.$

$\beta \parallel \alpha \Rightarrow (3) \parallel (12)$

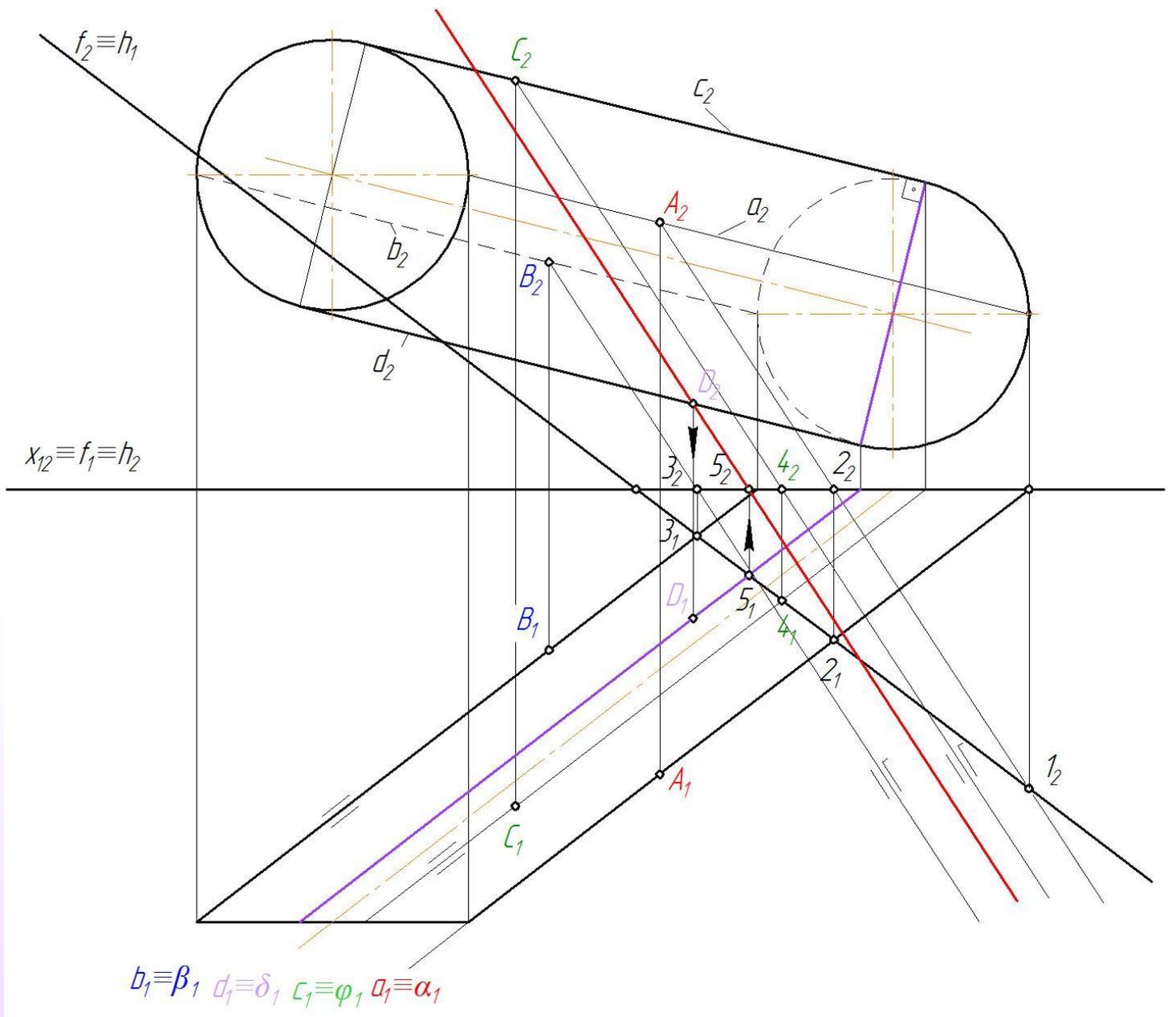
3.  $B \equiv (3) \cap b.$



1.  $\varphi \perp \Pi_1, c \subset \varphi,$

2.  $(4) = \varphi \cap \gamma.$   
 $\varphi \parallel \alpha \Rightarrow (4) \parallel (12)$

3.  $C \equiv (4) \cap c.$



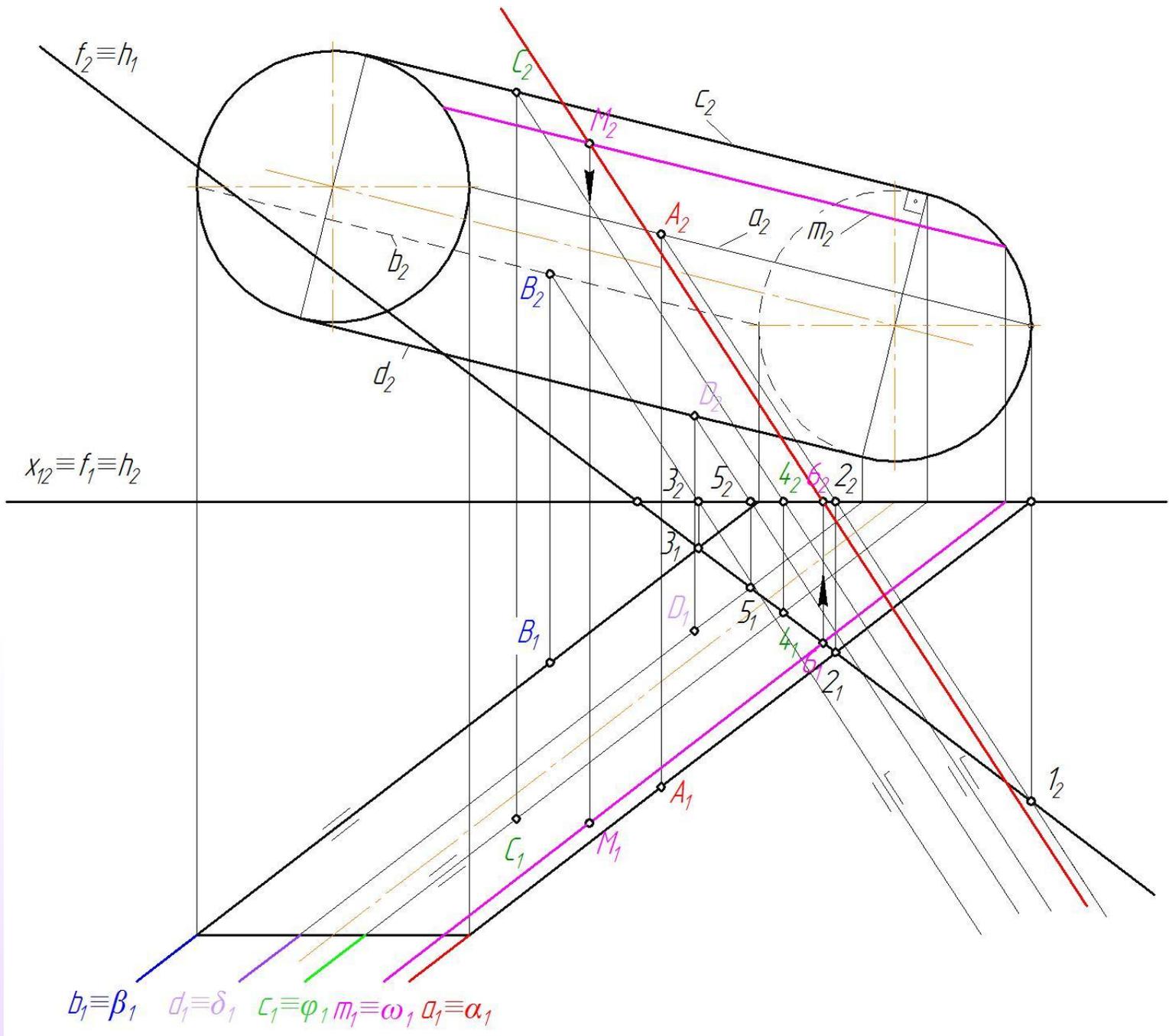
1.  $\delta \perp \Pi_1, d \subset \delta,$

2.  $(5) = \delta \cap \gamma.$

$\delta \parallel \alpha \Rightarrow (5) \parallel (12)$

3.  $D \equiv (5) \cap d.$

Для построения линии пересечения необходимо найти еще ряд точек, используя плоскости – посредники.

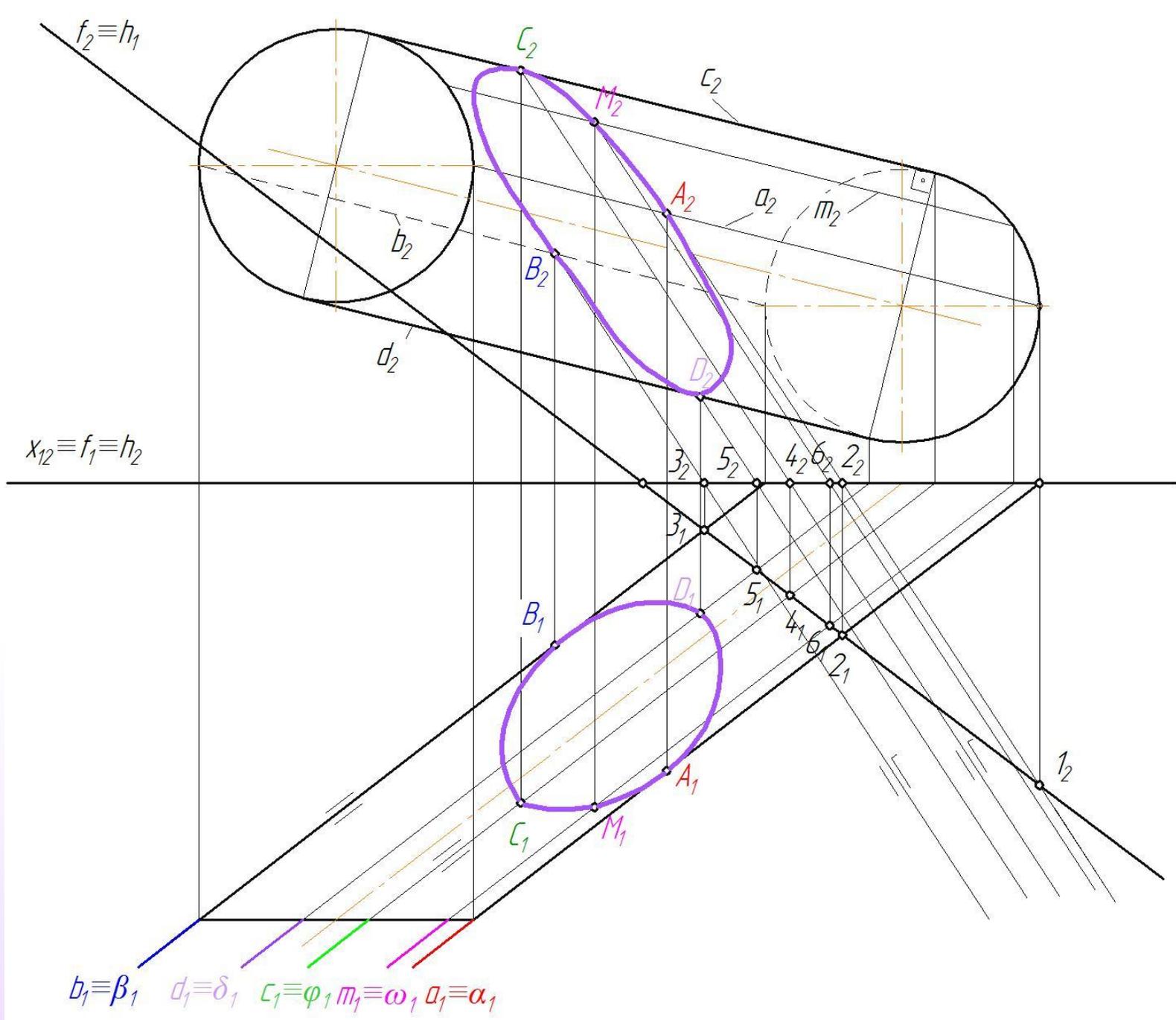


1.  $\omega \perp \Pi_1, m \subset \omega,$

2.  $(6) = \omega \cap \gamma.$

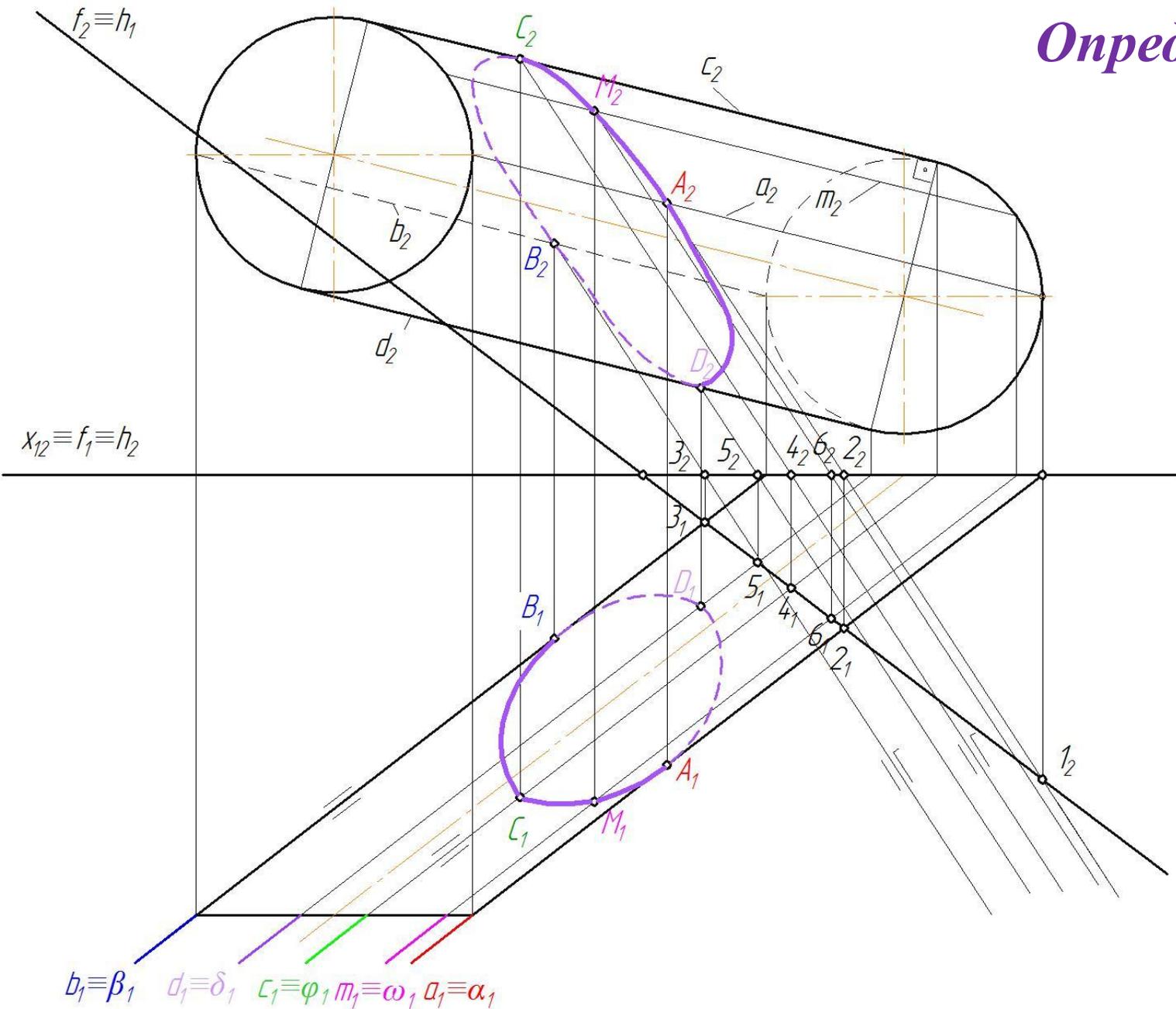
$\omega \parallel \alpha \Rightarrow (6) \parallel (12)$

3.  $M \equiv (6) \cap m.$



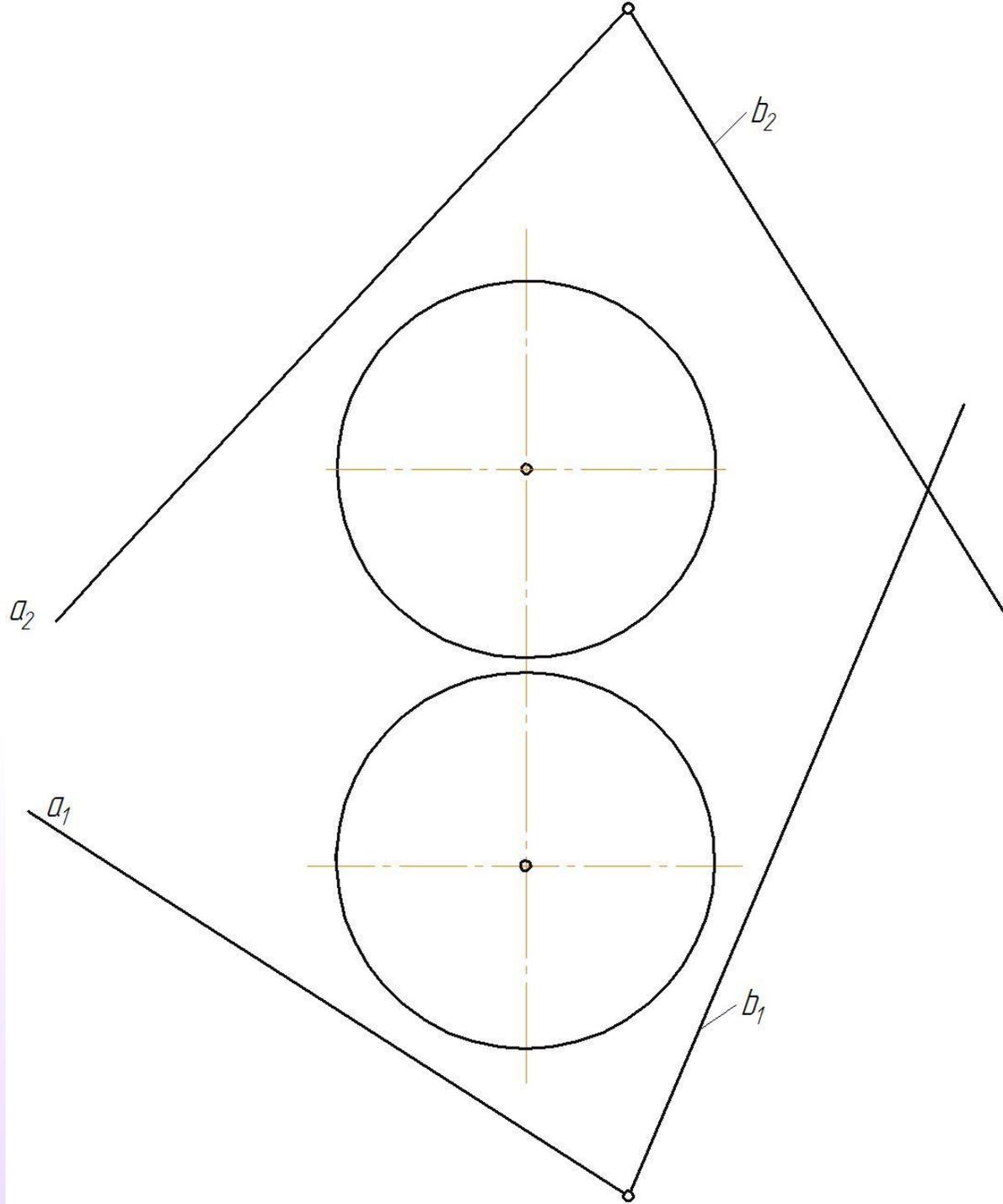
**Точки А, В, С, D, М,**  
 являясь общими для  
 данных поверхности и  
 плоскости будут  
 точками искомой линии  
 пересечения.

*Определяем видимость сечения.*



Точки пересечения плоскости со сферой можно рассматривать как точки пересечения окружностей сферы с плоскостью.

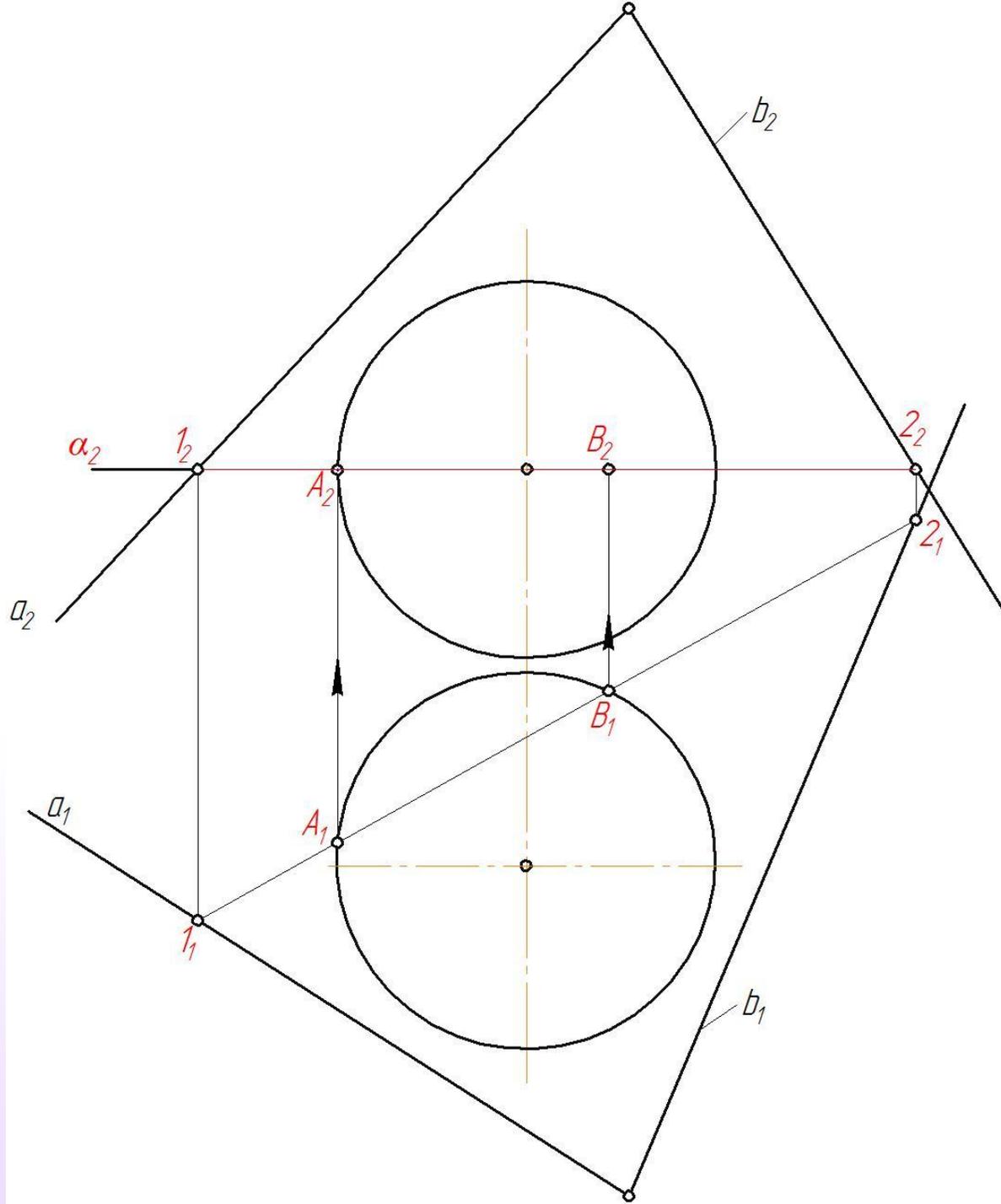
Плоскость пересекает сферу по окружности, проекции которой в общем случае на ортогональном чертеже изобразятся эллипсами.



## Задача 4

Сфера  $\Phi$  и плоскость  $\varphi(a \cap b)$

$$m = \Phi \cap \varphi - ?$$



*Определяем опорные точки*

Вводим вспомогательную плоскость – посредник  $\alpha$  через экватор.

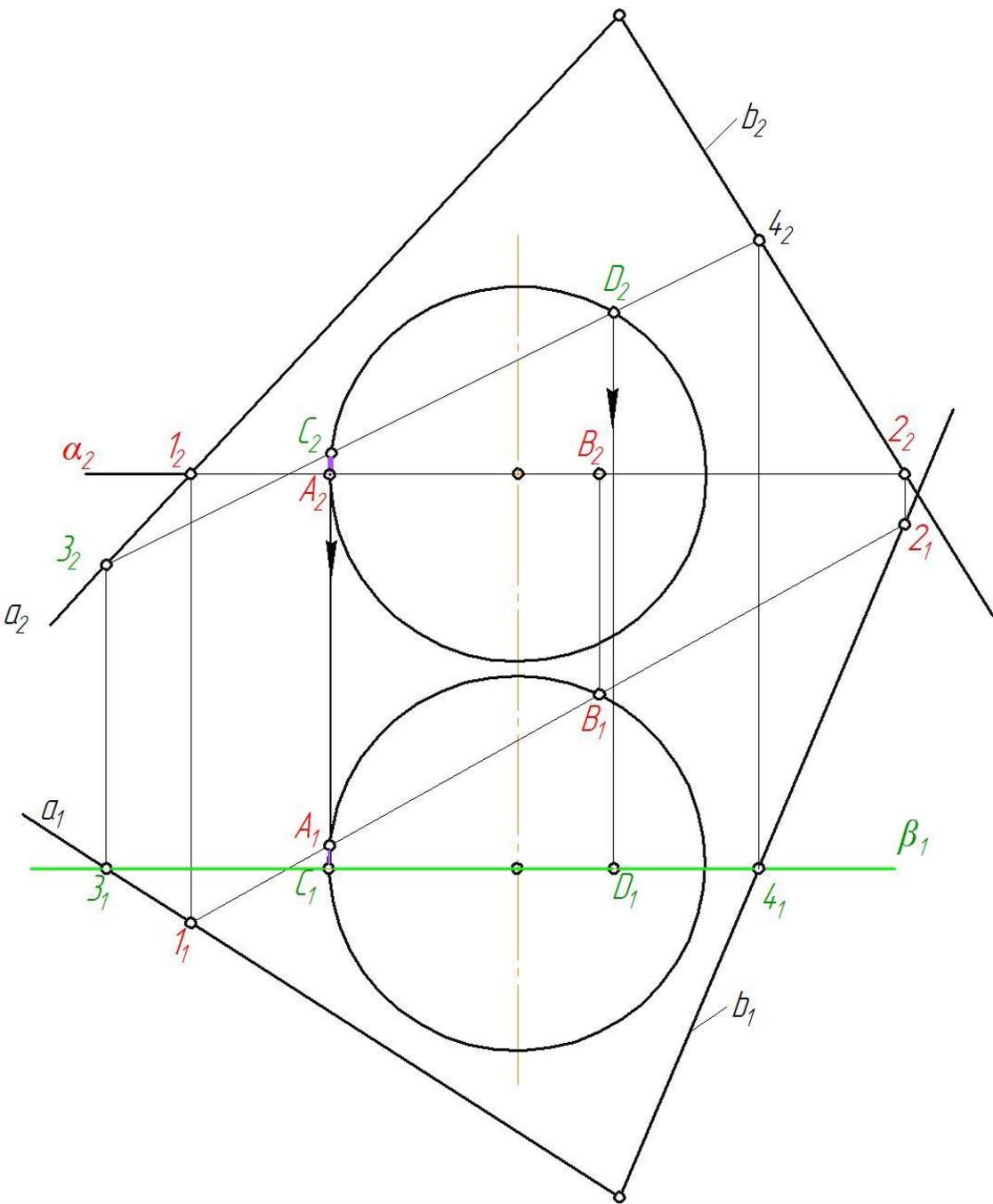
$$\alpha \parallel \Pi_1$$

Находим точки пересечения плоскости – посредника  $\alpha$  с заданной плоскостью  $\varphi(a \cap b)$  :

$$1,2 = \alpha \cap \varphi.$$

Находим точки пересечения плоскости – посредника  $\alpha$  с экватором сферы  $\Phi$ :

$$A,B = \alpha \cap \Phi.$$



Вводим вспомогательную плоскость – посредник  $\beta$  через главный меридиан.

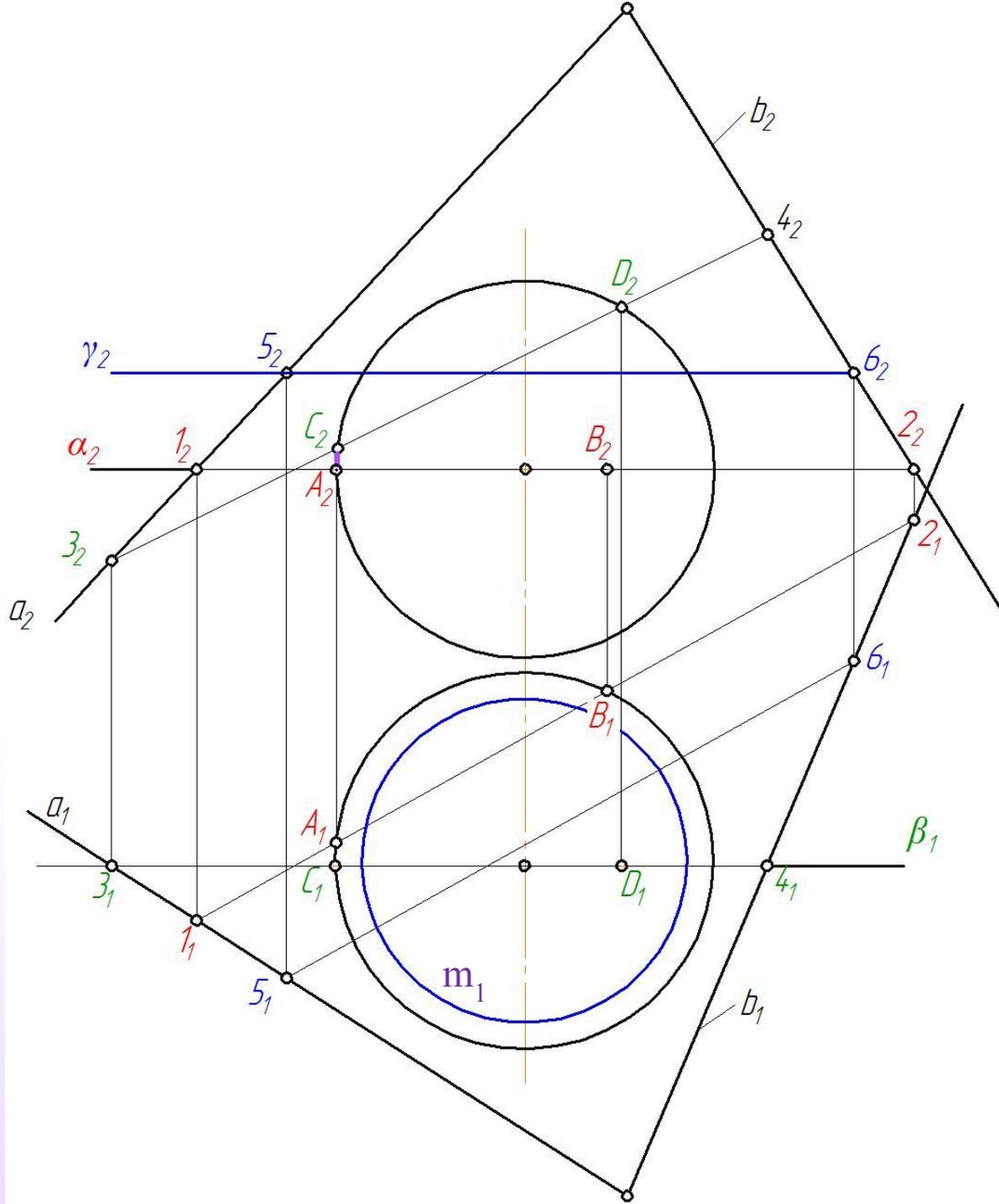
$$\beta \parallel \Pi_2$$

Находим точки пересечения плоскости – посредника  $\beta$  с заданной плоскостью  $\varphi(a \cap b)$ :

$$3,4 = \beta \cap \varphi.$$

Находим точки пересечения плоскости – посредника  $\beta$  с главным меридианом сферы  $\Phi$ :

$$C,D = \beta \cap \Phi.$$



Для уточнения линии пересечения строим  
**промежуточные точки.**

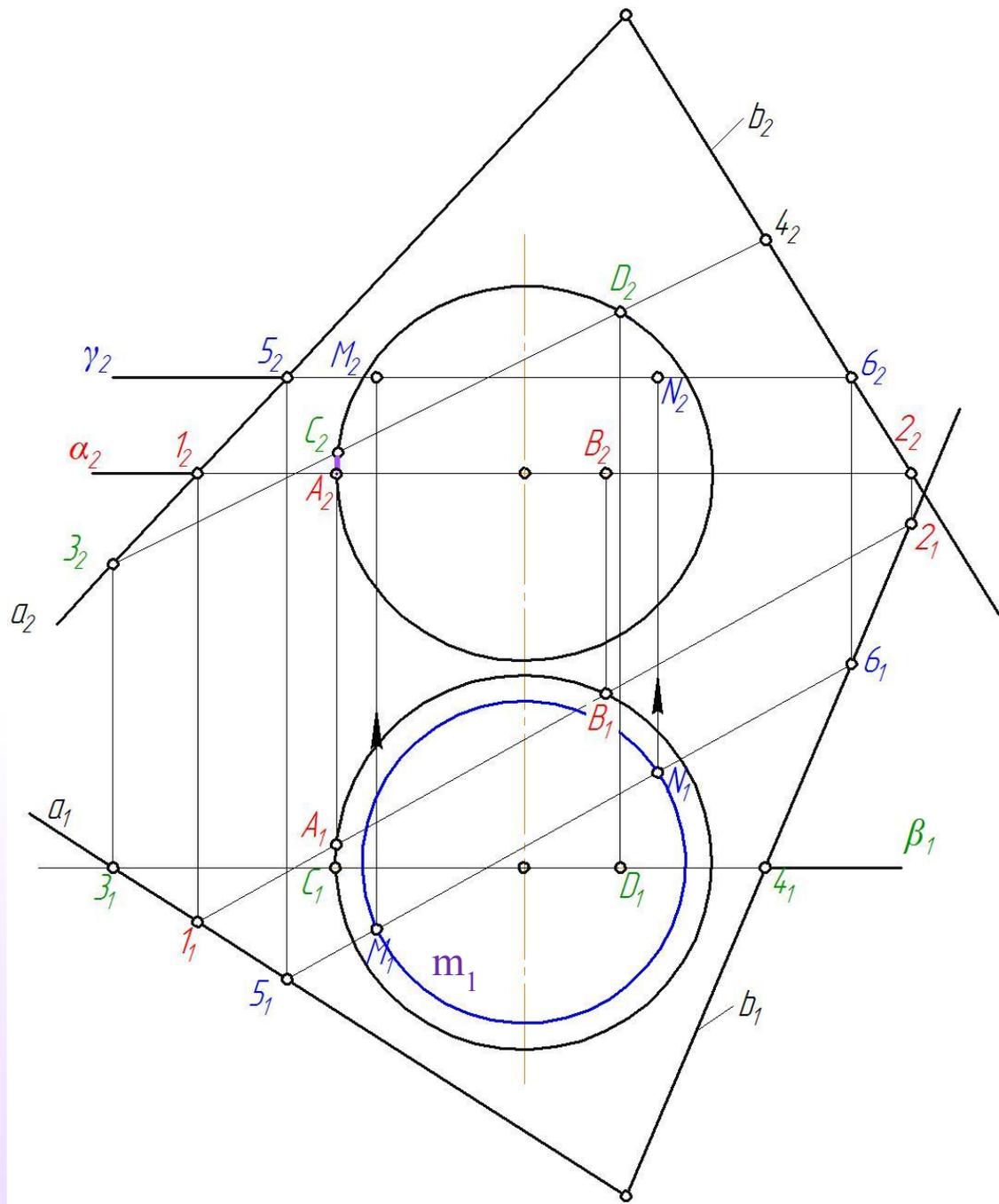
Вводим произвольно  
 вспомогательную плоскость –  
 посредник  $\gamma$ .

$$\gamma \parallel \Pi_1$$

Находим точки пересечения  
 плоскости – посредника  $\gamma$  с  
 заданной плоскостью  $\varphi(a \cap b)$  :

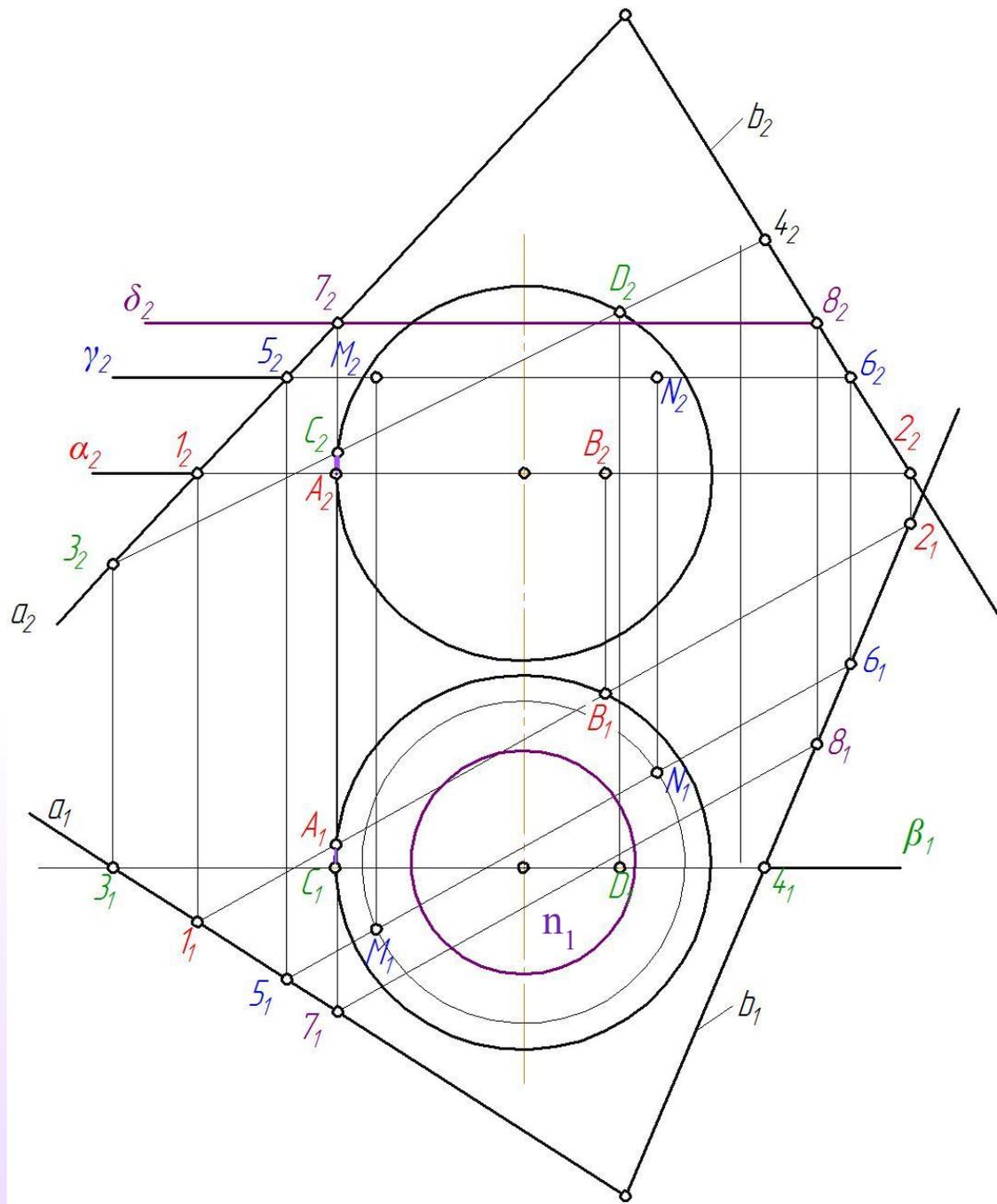
$$5,6 = \gamma \cap \varphi.$$

Находим окружность пересечения  
 плоскости – посредника  $\gamma$  со  
 сферой  $\Phi - m$



Находим точки пересечения  
 построенной окружности сечения  
 сферы **m** и горизонтали **5,6**  
 плоскости  $\varphi$ :

$$M, N = (5,6) \cap m.$$



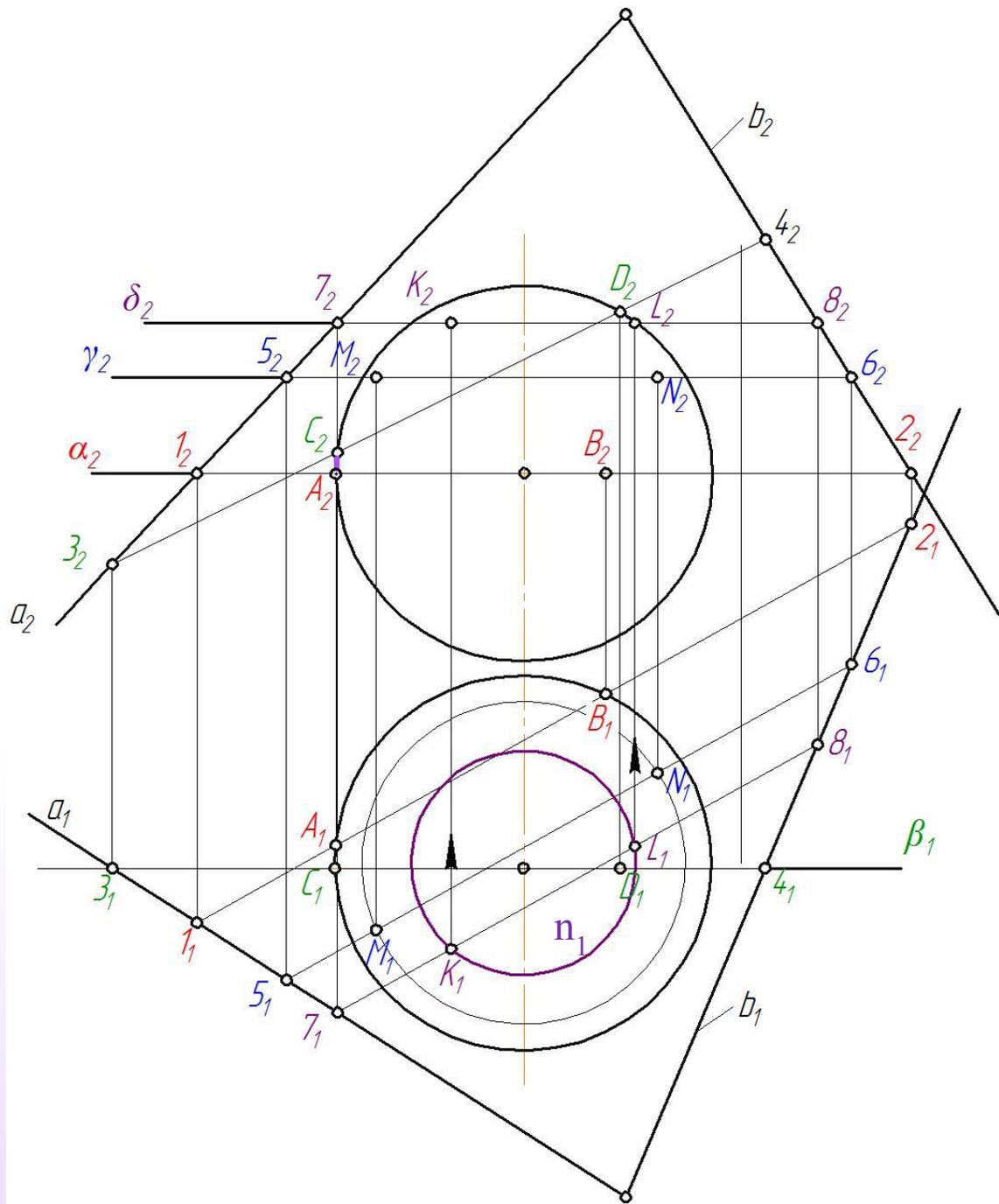
Вводим произвольно  
вспомогательную плоскость –  
посредник  $\delta$ .

$$\delta \parallel \Pi_1$$

Находим точки пересечения  
плоскости – посредника  $\delta$  с  
заданной плоскостью  $\varphi(a \cap b)$  :

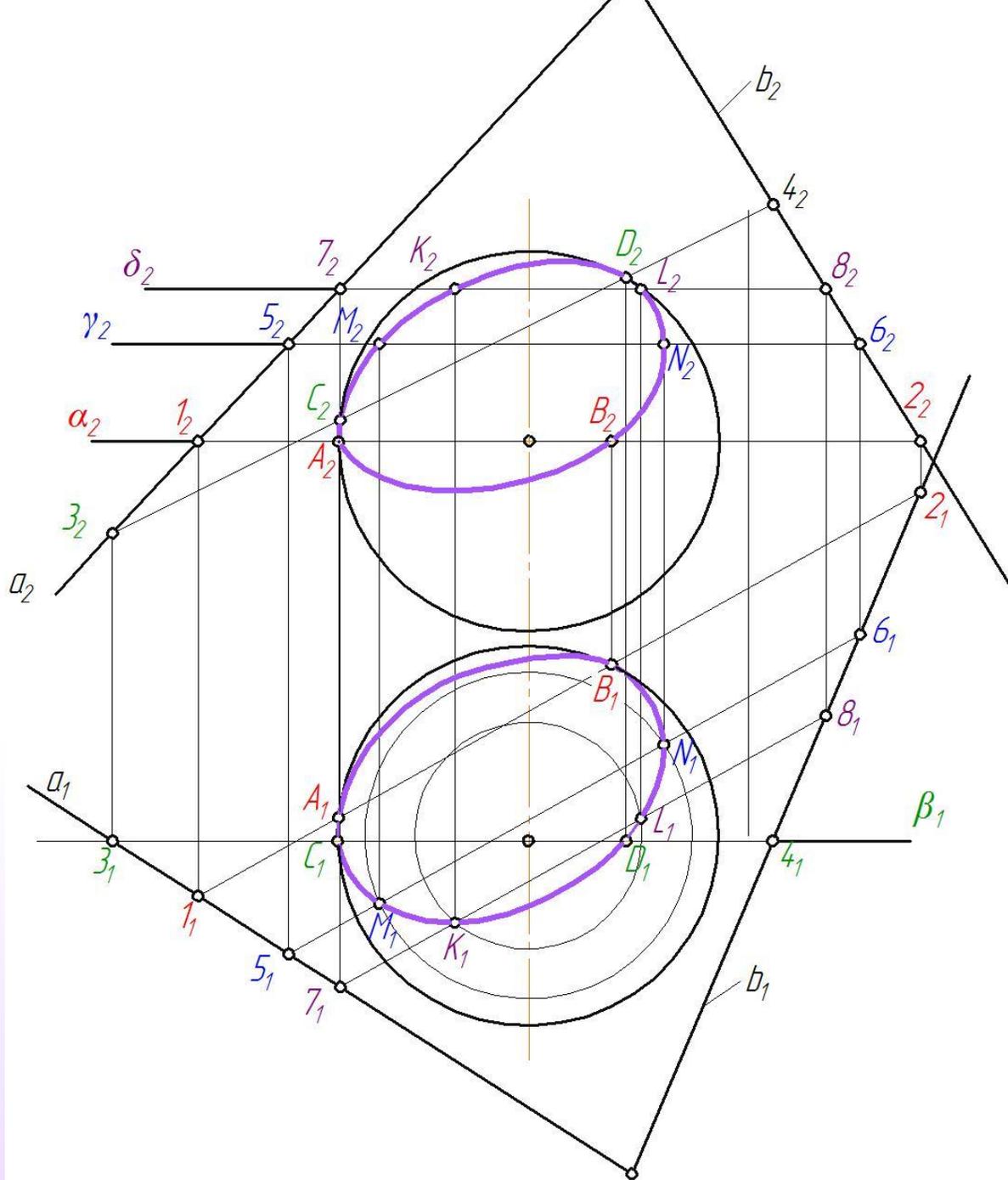
$$7,8 = \delta \cap \varphi.$$

Находим окружность пересечения  
плоскости – посредника  $\delta$  со  
сферой  $\Phi - n$

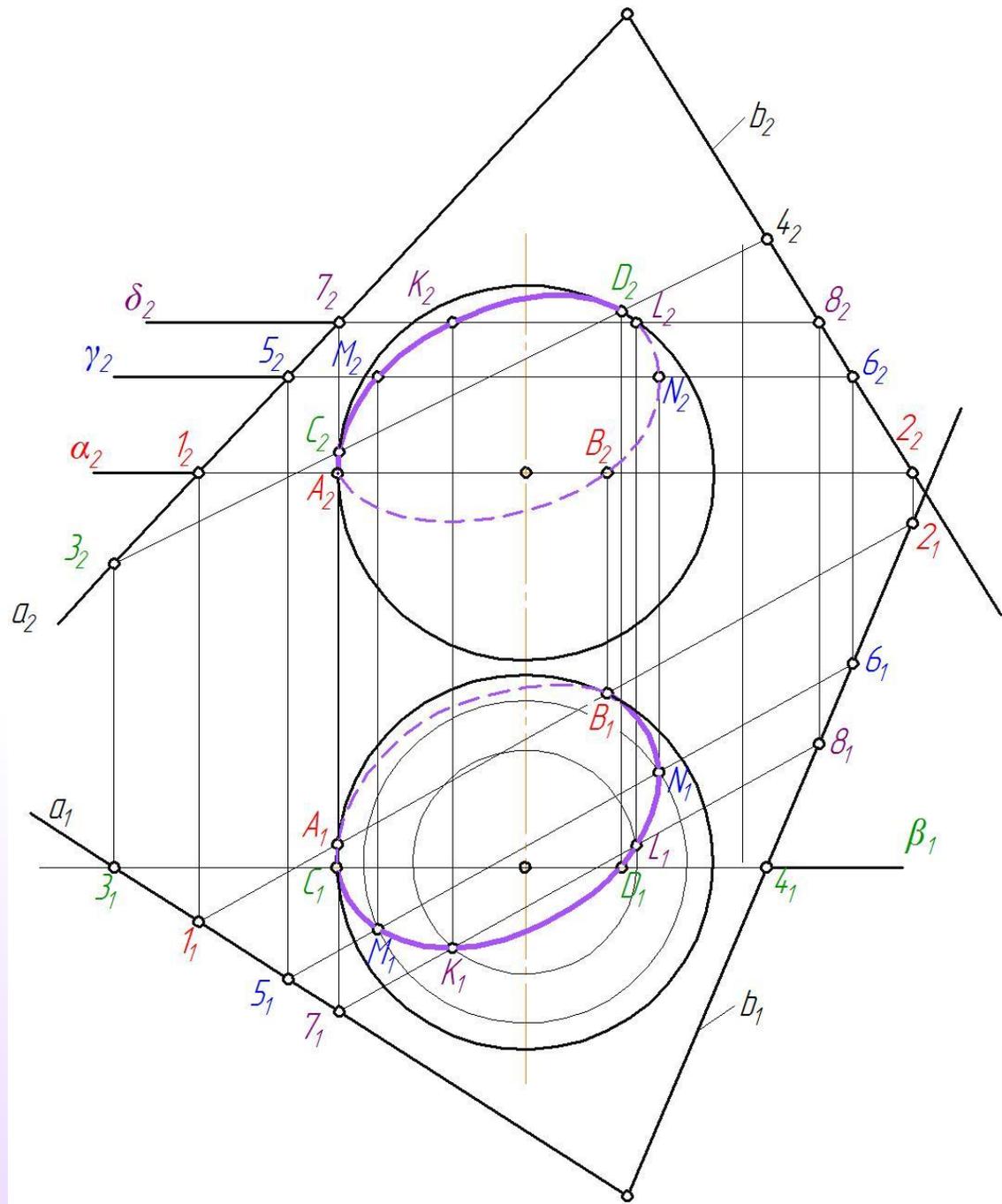


Находим точки пересечения  
 построенной окружности сечения  
 сферы и горизонтали сечения  
 плоскости  $\varphi$ :

$$K, L = (7, 8) \cap n.$$



**Точки А, В, С, D, М, N, К, L, являясь общими для данных поверхности и плоскости будут точками искомой линии пересечения.**



*Определяем видимость сечения.*