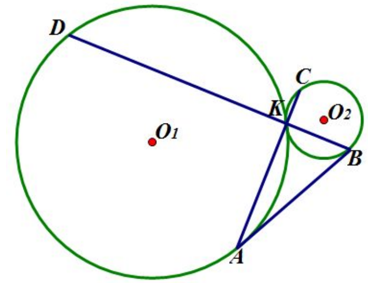
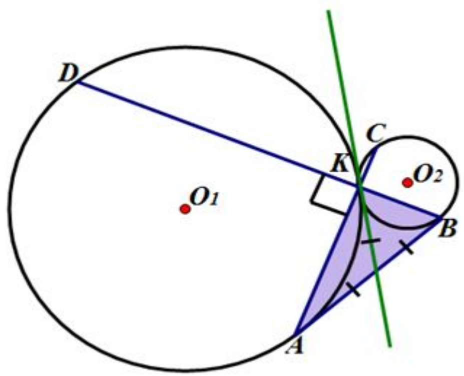
Окружность и круг в задачах повышенного уровня сложности по планиметрии в КИМ на ЕГЭ по математике

Задание 16
Демонстрационный вариант ЕГЭ 2018

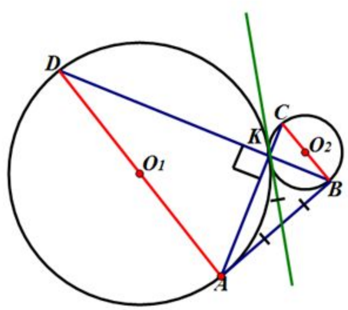
Две окружности касаются внешним образом в точке К. Прямая АВ касается первой окружности в точке А, а второй – в точке В. Прямая ВК пересекает первую окружность в точке D, прямая АК пересекает вторую окружность в точке С.
а) Докажите, что прямые AD и BC параллельны.
б) Найдите площадь треугольника АВК, если известно, что радиусы окружностей равны 4 и 1.



Решение. а)



$\angle AKB=90°$



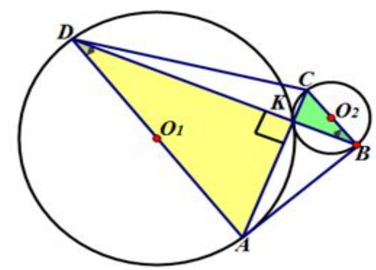
AD − диаметр ⇒ AD⊥AB,
BC − диаметр ⇒ BC⊥AB, ⇒ AD ∥ BC.

б) AK – общая высота ΔABD и ΔAKB

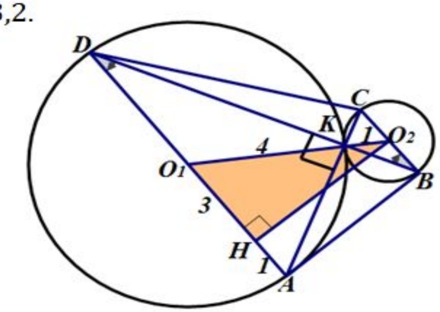
$\Delta AKD \sim \Delta BKC$ (по двум углам)

$\frac{AD}{BC}=\frac{4}{1}$ $\frac{S_{ADK}}{S_{BKC}}=\left(\frac{AD}{BC}\right)^2=16.$ Пусть $S_{BKC}=S.$

$S_{ADK}=16S$
$S_{AKB}=4S$
$S_{ABCD}=25S$



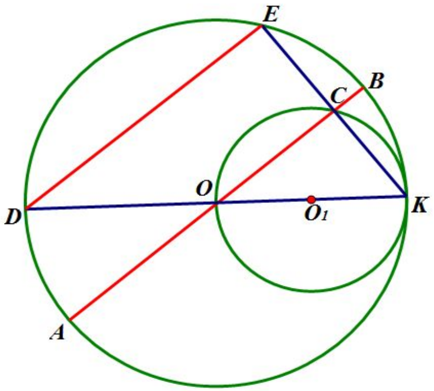
$O_2H=AB=4.$
$S_{ABCD}=\frac{AD+BC}{2}\cdot AB$
$S_{ABCD}=20=25S,$
$S_{ABK}=4S=3{,}2.$



Ответ. 3,2

Задача 1

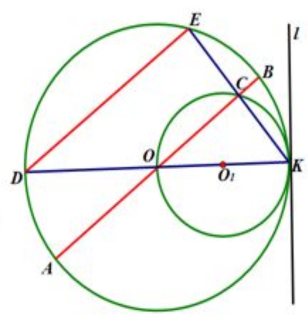
Две окружности касаются внутренним образом в точке К, причем меньшая окружность проходитчерез центр О большей окружности. Диаметр АВ большей окружности вторично пересекает меньшую окружность в точке С, отличной от К. Лучи КО и КС вторично пересекает большую окружность в точках D и E соответственно. Точка В лежит на дуге ЕК большей окружности, не содержащей точку D. а) Докажите, что прямые DE и AB параллельны. б) Известно, что sin ∠KOB = $\frac{\sqrt{15}}{8}$. ПрямыеDB и EK пересекаются в точке L. Найдите отношение EL:LK.



а)

l- общая касательная, OK ⊥ *l*, O₁K ⊥ *l* ⇒
D,O, O₁, K лежат на одной прямой.

∠DEK=∠OCK=90° ⇒
⇒DE∥AB.



б) AB ⊥ EK ⇒ EC=CK ⇒
⇒∪ KB=∪BE

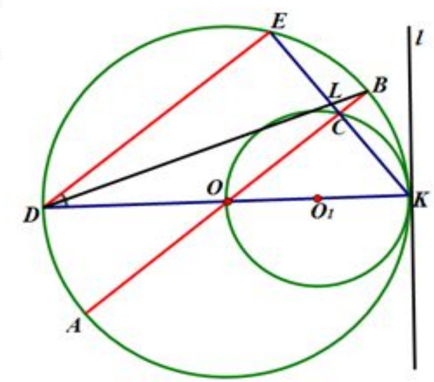
DB – биссектриса ∠EDK.

$\frac{EL}{LK} = \frac{DE}{DK} = cos$ ∠EDK=

$= cos$ ∠BOK (AE∥AB)=

$=\sqrt{1 - sin^2 \angle BOK} =$

$= \sqrt{1 - \frac{15}{64}} = \frac{7}{8}$.



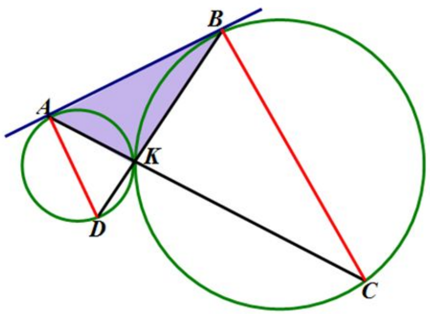
Ответ. $\frac{7}{8}$

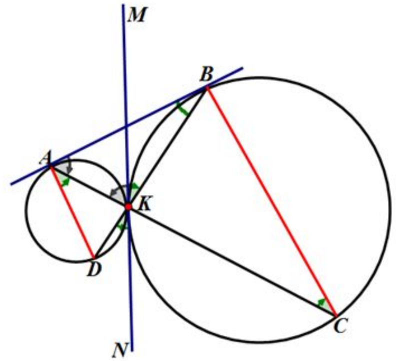
Задача 2

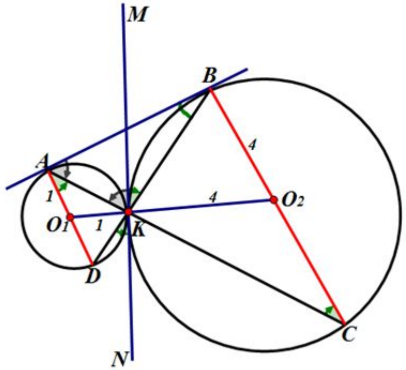
Две окружности касаются внешним образом в точке K. Прямая AB касается первой окружности в точке A, а второй – в точке B. Прямая BK пересекает первую Окружность в точке D, прямая AK пересекает вторую окружность в точке C.

а) Докажите, что прямые AD и BC параллельны.

б) Найдите площадь треугольника AKB, если известно, что радиусы окружностей равны 4 и 1.







$\Delta SKO_1 \sim \Delta O_1TO_2$

$$\frac{SK}{TO_2} = \frac{O_1K}{O_1O_2} \qquad \frac{SK}{3} = \frac{1}{5}$$

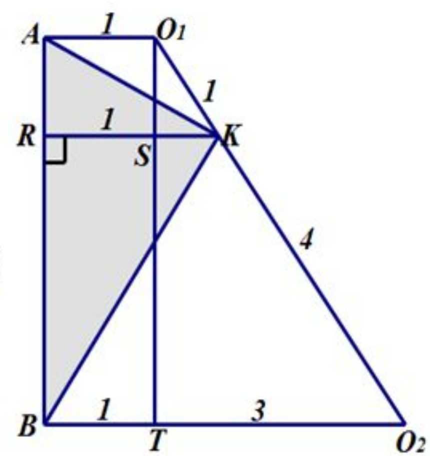
$$SK = \frac{3}{5} \qquad RK = \frac{8}{5}$$

$$AB = O_1T = \sqrt{O_1O_2^2 - TO_2^2}$$

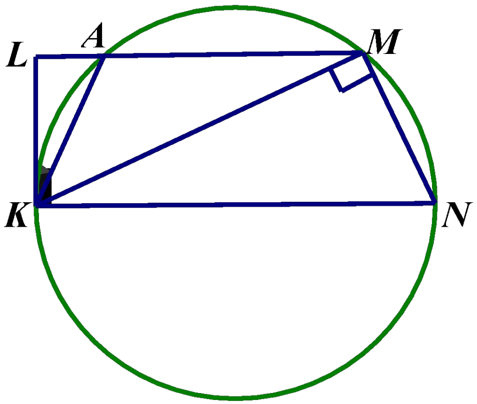
$$AB = 4$$

$$S_{ABK} = \frac{1}{2} AB \cdot RK$$

$$S_{ABK} = \frac{1}{2} \cdot 4 \cdot \frac{8}{5} = \frac{16}{5} = 3{,}2$$



Задача 3
(задание 16 ЕГЭ 2017)



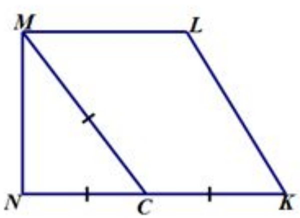
В прямоугольной трапеции KLMN с основаниями KN и LM (KN>LM) окружность,построенная на большем основании как на диаметре, пересекает меньшее основание в точках A и M.

а) Докажите, что угол AKL равен углу MKN.

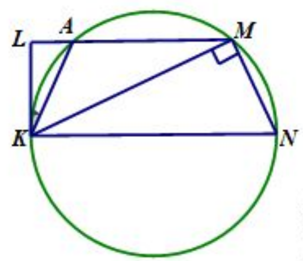
б) Диагонали трапеции пересекаются в точке O. Найдите площадь треугольника KLO, если KL=3 , LM=6LA.

Рассмотрим два случая:

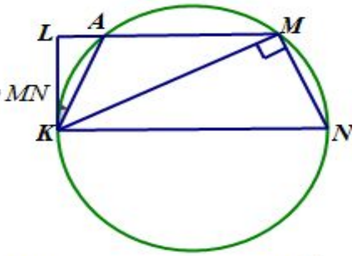
1. ∠ MNK= 90°.
MC=NC,
что невозможно (катет не равен гипотенузе).



2. ∠ LKN= 90°.
KN - диаметр, следовательно, KL – касательная,
AK – хорда.



Решение.

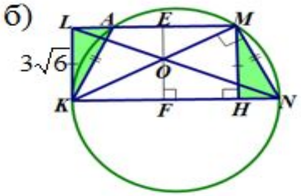


а) $\angle AKL=\frac{1}{2}\cup AK$, $\angle MKN=\frac{1}{2}\cup MN$

$\cup AK=\cup MN$

$\angle AKL=\angle MKN$.

б)



$$\frac{AL}{LK}=\frac{LK}{LM} \qquad \frac{AL}{3\sqrt{6}}=\frac{3\sqrt{6}}{6AL}$$

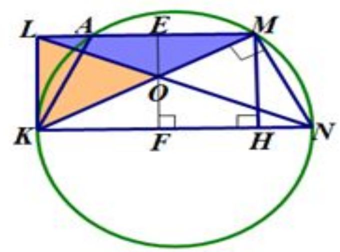
$6AL^2=6\cdot 9$, $AL=3$, $LM=18$,

$\Delta AKL=\Delta MHN \Rightarrow AL=HN$

$KN=KH+HM=$
$=LM+LA=18+3=21.$

$\Delta ALK\sim\Delta LKM$, $LM=6LA$

$S_{LOK}=S_{LKM}-S_{LOM}$



$$S_{LKM}=\frac{1}{2}LK\cdot LM=\frac{3\sqrt{6}}{2}\cdot 18=27\sqrt{6}$$

$$S_{LOM}=\frac{1}{2}LM\cdot OE=9\cdot OE$$

$\Delta LOM\sim\Delta KON$

$$\frac{LM}{NK}=\frac{OE}{OF} \qquad \frac{LM}{NK}=\frac{OE}{EF-OE}$$

$$\frac{18}{21}=\frac{OE}{3\sqrt{6}-OE} \qquad \frac{OE}{3\sqrt{6}-OE}=\frac{6}{7}$$

$$OE=\frac{18\sqrt{6}}{13}$$

$$S_{LOM}=9\cdot\frac{18\sqrt{6}}{13}=\frac{162\sqrt{6}}{13}$$

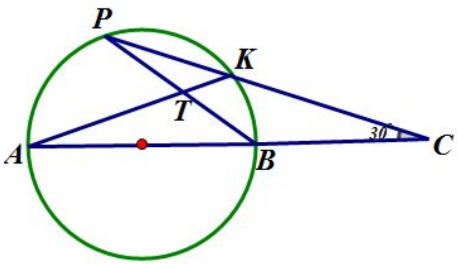
$$S_{LOK}=27\sqrt{6}-\frac{9\cdot 18\sqrt{6}}{13}=$$

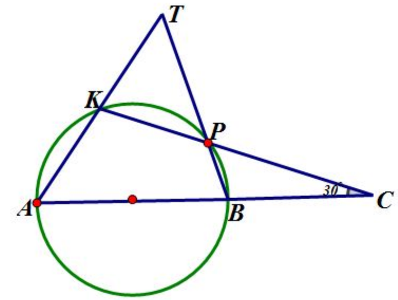
$$=9\sqrt{6}\left(3-\frac{18}{13}\right)=$$

$$=\frac{9\cdot 21\sqrt{6}}{13}=\frac{189\sqrt{6}}{13}$$

Задача 4 Дана окружность. Продолжения диаметра AB и хорды PKпересекаются под углом 30° в точке C. Известно, что CB:AB=1:4; AK пересекает BP в точке T.

а) Докажите, что AP:AT=3:4., б) Найдите площадь четырехугольника с вершинами в точках A, B, P и K, если радиус окружности равен 4.





Решение. а)

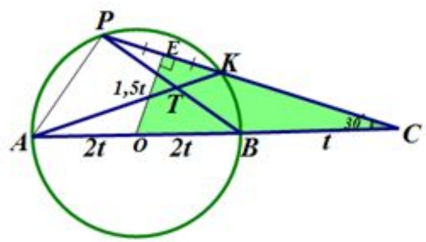
1.Проведем OE ⊥PC,
KE=EP, OE=$\frac{3}{2}t$,

EC=OC · cos C = $\frac{3\sqrt{3}}{2}t$.

2. PE=$\frac{\sqrt{7}}{2}t$ (ΔPOE);   PK = $\sqrt{7}t$.

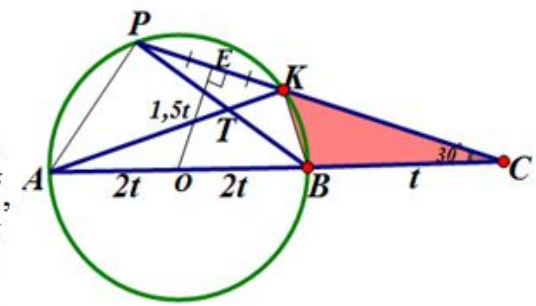
3. ΔATB~ΔKTP (∠ATB=∠KTP как вертикальные, ∠PKT=∠ABT как вписанные, опирающиеся на одну дугу. $\frac{AB}{KP}=\frac{AT}{PT}$; PT= $\frac{AT\sqrt{7}}{4}$.

4. $AP^2 = AT^2 - PT^2 = \frac{9AT^2}{16}$, AP=$\frac{3AT}{4}$; $\frac{AP}{AT} = \frac{3}{4}$



AO=4, t=2

AC=10, BC=2,
PC= $3\sqrt{3}+\sqrt{7}$,
KC=$3\sqrt{3}-\sqrt{7}$



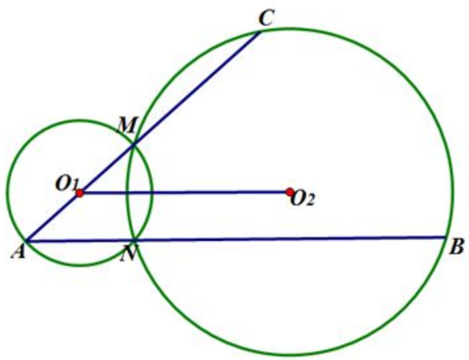
$$S_{APKB} = S_{APC} - S_{BKC}$$
$$= \frac{1}{2}AC \cdot PC \cdot sin30° - \frac{1}{2}BC \cdot KC \cdot sin30° =$$
$$=6\sqrt{3} + 3\sqrt{7}.$$

Задача 5

Две окружности с центрами O_1 и O_2 пересекаются в точках M и N, причем точки O_1 и O_2 лежат по разные стороны от прямой MN. Продолжение диаметра AM первой окружности и хорды AN этой же окружности пересекают вторую окружность в точках C и B соответственно.

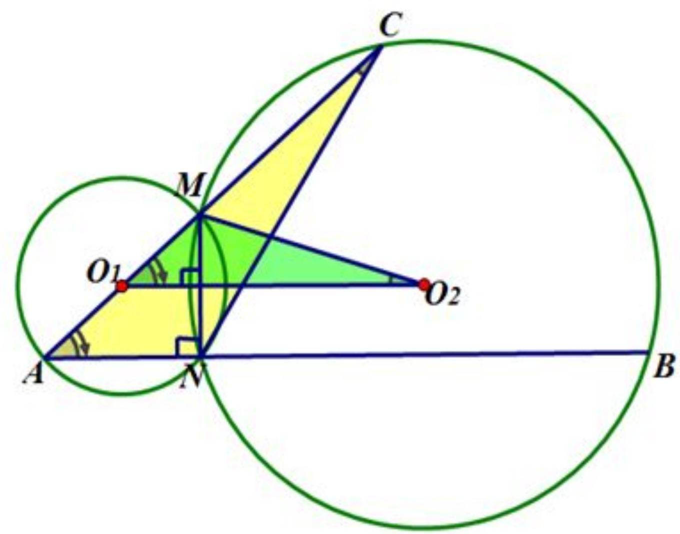
а) Докажите, что треугольники ANC и O_1MO_2 подобны;

б) Найдите MC, если $\angle CMB = \angle NMA$, а радиус второй окружности в 2,5 раза больше радиуса первой и MN=2.

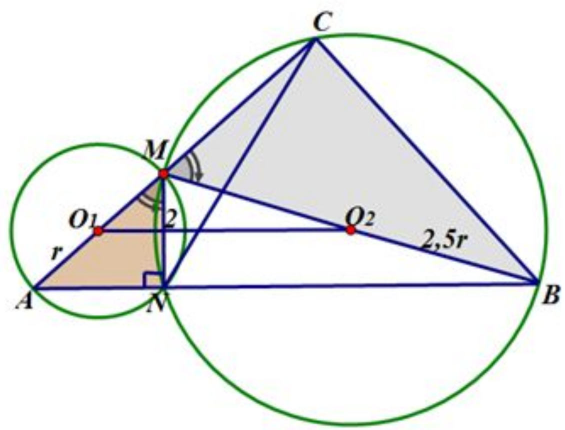


Решение.

а)



б)



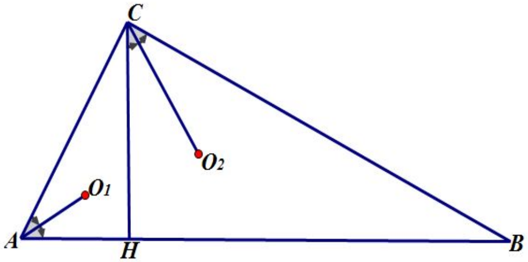
$$\frac{MC}{MN} = \frac{MB}{AM} \qquad \frac{MC}{2} = \frac{5r}{2r} \qquad \text{MC=5}$$

Задача 6

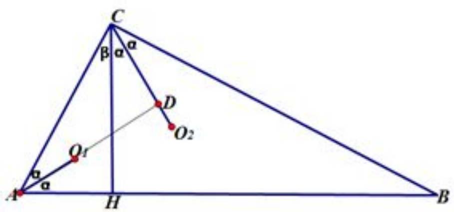
В прямоугольном треугольнике ABC из вершины прямого угла C проведена высота CH. В треугольники ACH и BCH вписаны окружности с центрами O_1 и O_2 соответственно, касающиеся отрезка CH в точках M и N соответственно.

а) Докажите, что прямые A O_1 и C O_2 перпендикулярны.

б) Найдите площадь четырехугольника M O_1 N O_2, если AC=7, BC=24.



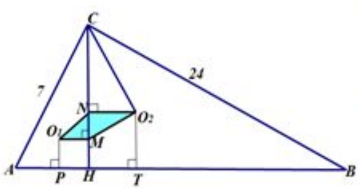
а)



б) O_1NO_2M – трапеция. $S_{O_1NO_2M} = \frac{O_1M+O_2N}{2}\cdot MN$

Пусть $O_1M = r_1$, $O_1N = r_2$

$S_{O_1NO_2M} = \frac{r_1+r_2}{2}\cdot(r_1 - r_2)$

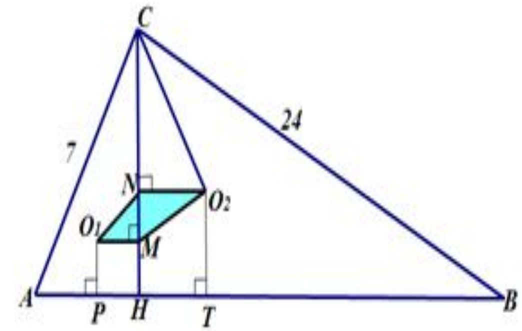


$AC\cdot BC = CH\cdot AB$

$AB = 25,\ CH = \frac{7\cdot24}{25}$

$AH = \frac{49}{25},\ BH = \frac{576}{25}.$

$r = \frac{a+b-c}{2}$



$$r_1 = \frac{\frac{49}{25}+\frac{7\cdot24}{25}-7}{2} = \frac{7}{2\cdot25}(7+24-25) = \frac{21}{25};$$

$$r_2 = \frac{\frac{576}{25}+\frac{7\cdot24}{25}-24}{2} = \frac{24}{2\cdot25}(7+24-25) = \frac{72}{25};$$

$$S_{O_1NO_2M} = \frac{\frac{72}{25}+\frac{21}{25}}{2}\cdot\left(\frac{72}{25}-\frac{21}{25}\right) = \frac{51\cdot93}{2\cdot625} = \frac{4743}{1250}$$

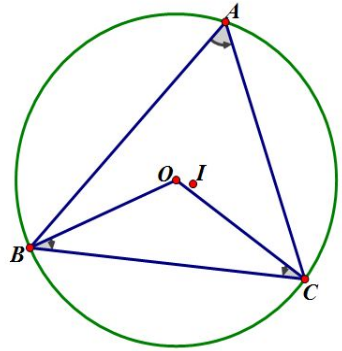
Ответ. $\frac{4743}{1250}$

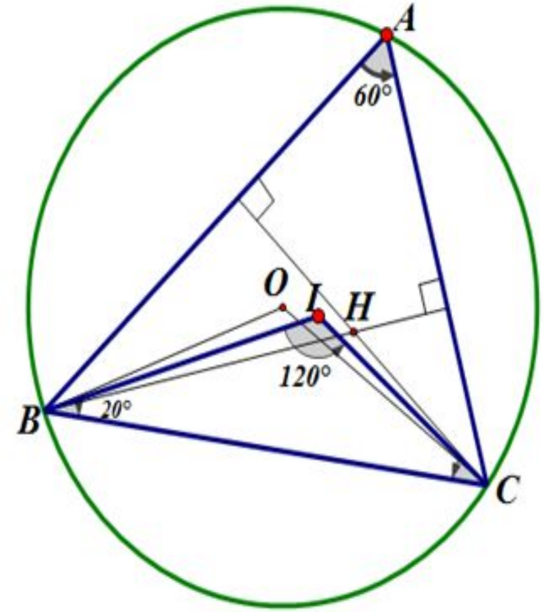
Задача 7

Точка O – центр окружности, описанной около остроугольного треугольника ABC, I – центр вписанной в него окружности, H – точка пересечения высот. Известно, что $\angle BAC = \angle OBC + \angle OCB$, угол $ABC = 50°$.

а) Докажите, что точка H лежит на окружности, описанной около треугольника BOC.

б) Найдите $\angle OIH$.





Решение.

1. $\angle BOC = 2\angle A$,

$\angle BOC = 180° - (\angle OBC + \angle OCB) =$

$= 180° - \angle A \Rightarrow 2\angle A = 180° - \angle A$

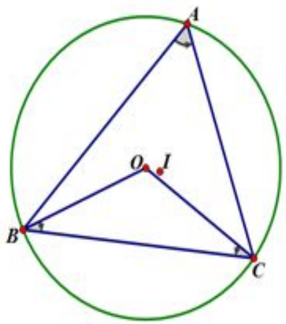
$\angle A = 60°$, $\angle BOC = 120°$

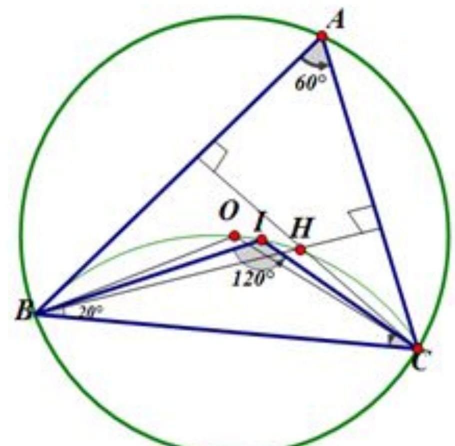
$\angle A = 60°$, $\angle B = 50° \Rightarrow \angle C = 70°$.

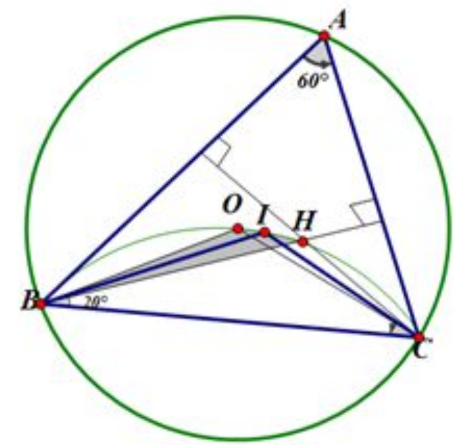
2. ΔBOC: $\angle OBC = OCB = 30° \Rightarrow$

$\angle ABO = 50° - 30° = 20°$

$\angle ACO = 70° - 30° = 40°$



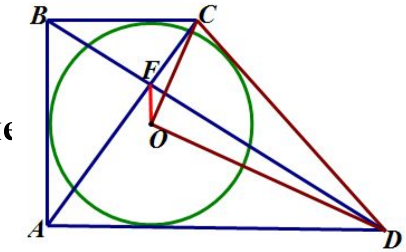




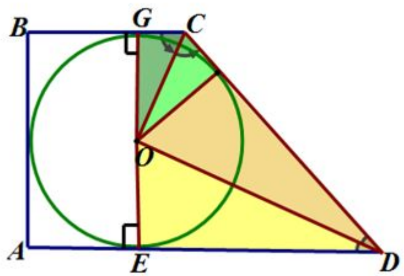
$\angle OIH + \angle OBH = 180°$, $\angle OBH = 10° \Rightarrow \angle OIH = 170°$

Задача 8 **В прямоугольную трапецию ABCD с большим основанием AD и прямыми углами A и B вписана окружность с центром в точке O.**

а) Докажите, что $CO^2+OD^2=CD^2$; **б) Найдите расстояние от точки O до точки пе[ресечения] диагоналей трапеции, если высота трапеции равна 2 и** $\angle ADC=60^0$.



а)

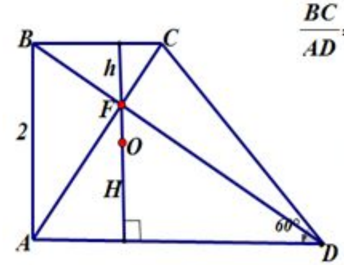


$$FM=\frac{ab}{b+a}\qquad FM=\frac{\left(1+\frac{1}{\sqrt3}\right)(1+\sqrt3)}{\left(1+\frac{1}{\sqrt3}\right)+(1+\sqrt3)}=\frac{(1+\sqrt3)^2}{\sqrt3\left(2+\frac{1}{\sqrt3}+\sqrt3\right)}=1$$

$$BC=1+\frac{1}{\sqrt3}$$

$$AD=1+\sqrt3\qquad FO=H-R\qquad R=1$$

$$\frac{BC}{AD}=\frac{2-H}{H}\qquad H=\frac{2\sqrt3}{1+\sqrt3}$$



$$FO=H-1=\frac{2\sqrt3}{1+\sqrt3}-1=2-\sqrt3$$

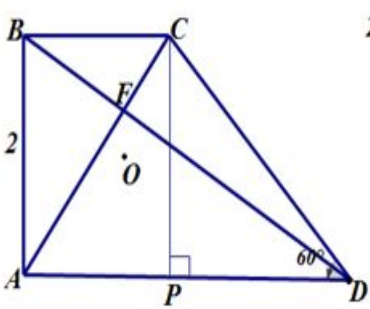
б)

$$AB+CD=BC+AD$$

$$2+\frac{4}{\sqrt3}=2BC+PD$$

$$2+\frac{4}{\sqrt3}=2BC+\frac{2}{\sqrt3}$$

$$BC=1+\frac{1}{\sqrt3}$$

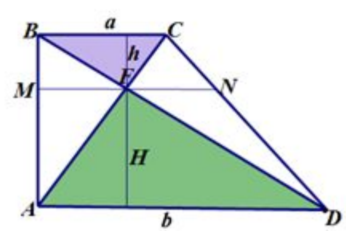


Рассмотрим ΔCDP:

$$\frac{CP}{CD}=\cos30°\qquad \frac{2}{CD}=\frac{\sqrt3}{2}$$

$$CD=\frac{4}{\sqrt3}\qquad PD=\frac{2}{\sqrt3}$$

$$AD=AP+PD=BC+PD=1+\frac{3}{\sqrt3}=1+\sqrt3$$



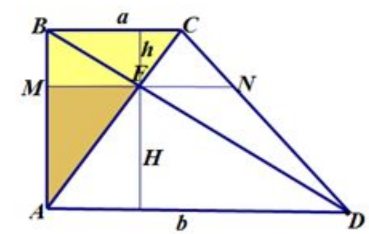
$$\Delta AFD \sim \Delta BFC$$

$$\frac{AF}{FC}=\frac{FD}{BF}=\frac{AD}{BC}=\frac{b}{a}=\frac{H}{h}$$

$$\Delta ABC \sim \Delta AFM$$

$$\frac{BC}{FM}=\frac{AC}{AF}=\frac{AB}{AM}=\frac{H+h}{H}$$

$$\frac{H+h}{H}=\frac{1+\frac{h}{H}}{1}=1+\frac{a}{b}=\frac{b+a}{b}$$



$$\frac{BC}{FM}=\frac{b+a}{b}\qquad FM=\frac{ab}{b+a}$$

$$FM=\frac{ab}{b+a}$$

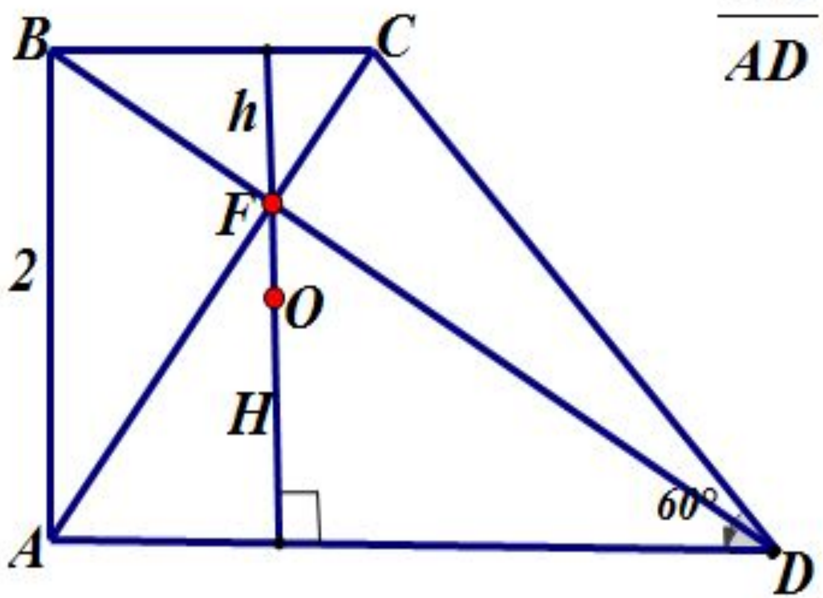
$$FM=\frac{(1+\frac{1}{\sqrt{3}})(1+\sqrt{3})}{(1+\frac{1}{\sqrt{3}})+(1+\sqrt{3}}=\frac{(1+\sqrt{3})^2}{\sqrt{3}(2+\frac{1}{\sqrt{3}}+\sqrt{3})}=1$$

$$BC=1+\frac{1}{\sqrt{3}}$$

$$AD=1+\sqrt{3}$$

$$FO=H-R$$

$$R=1$$

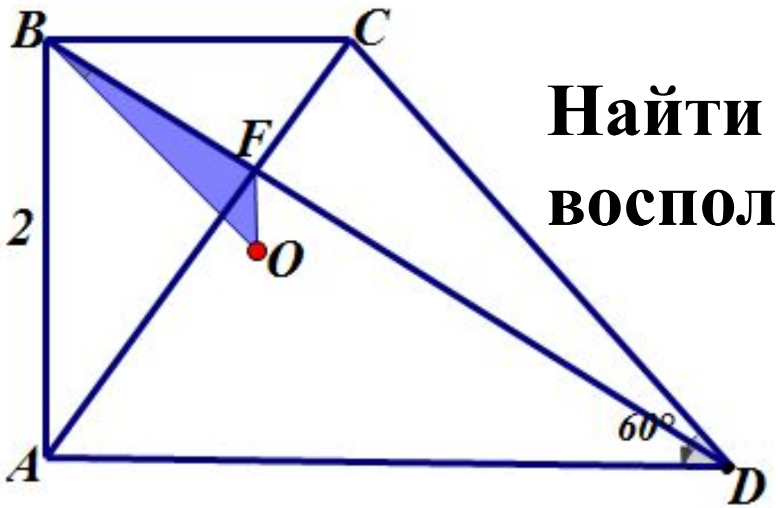


$$\frac{BC}{AD}=\frac{2-H}{H}$$

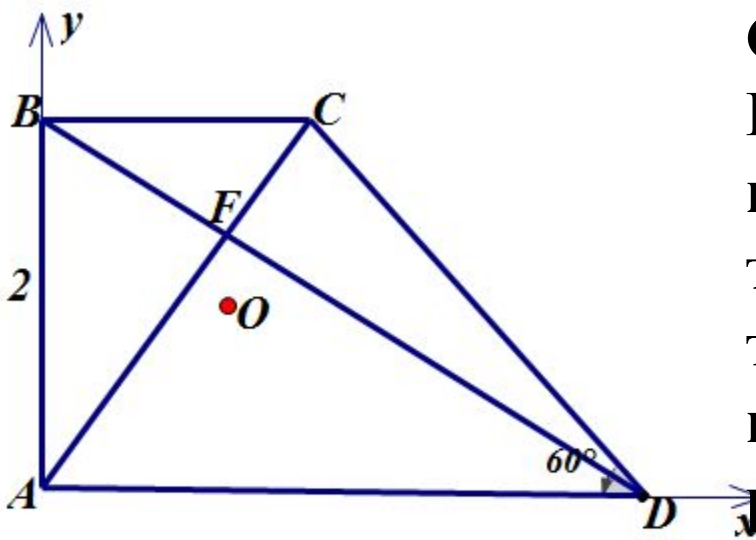
$$H=\frac{2\sqrt{3}}{1+\sqrt{3}}$$

$$FO=H-1=\frac{2\sqrt{3}}{1+\sqrt{3}}-1=2-\sqrt{3}$$

Идеи других способов

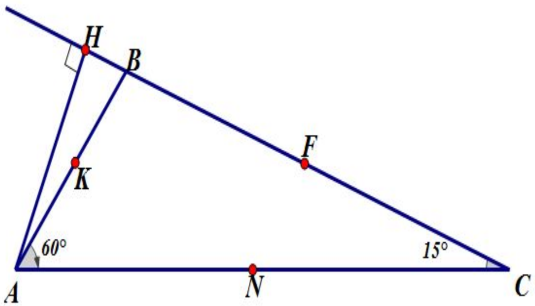


Найти BF, BO, cos ∠FBO и воспользоваться теоремой косинусов.

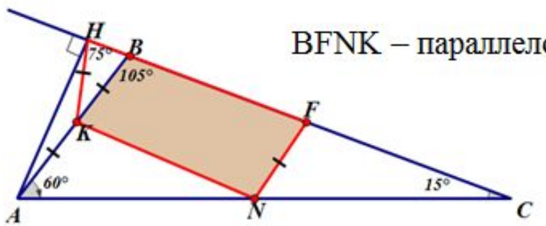


Составить уравнения прямых AC и BD, найти координаты их точки пересечения, убедиться в том, что точки O и F лежат на высоте трапеции, проходящей через центр вписанной окружности, а затем найти разность ординат точек F и O.

Задача 9 **В треугольнике ABC точки K, F, N - середины сторон AC, AB и BC соответственно. AH высота треугольника ABC, $\angle CAB = 60°$, $\angle ACB = 15°$. а) Докажите, что точки K, F, N и H лежат на одной окружности, б) Найдите FH, если BC= $4\sqrt{3}$**



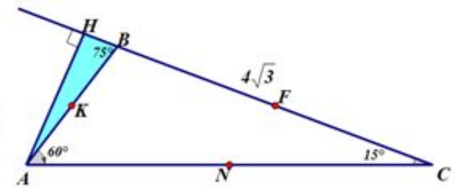
Решение. а) $\angle ABC = 105°$



BFNK – параллелограмм.

$\angle KHB = \angle KBH = 75°$,
HFNK – равнобедренная трапеция,$\Rightarrow$
$\angle HKN = \angle KNF = 105°$, $\angle KHF = \angle NFH = 75°$,
тогда $\angle KHF + \angle KNF = \angle HKN + \angle NFH = 180°$,
это означает, что **точки**
K, F, N и H лежат на одной окружности.

б) $\dfrac{AB}{\sin 15^0} = \dfrac{BC}{\sin 60^0}$



$$\frac{AB}{\sin(45^0 - 30^0)} = \frac{4\sqrt{3}\cdot 2}{\sqrt{3}}$$

$$AB = 2\sqrt{2}(\sqrt{3} - 1)$$

$$BH = AB\cos 75^0 \qquad BH = 2\sqrt{2}(\sqrt{3} - 1)\cos(45^0 + 30^0)$$

$$BH = 2\sqrt{2}(\sqrt{3} - 1)\frac{\sqrt{2}}{4}(\sqrt{3} - 1) = 4 - 2\sqrt{3}$$

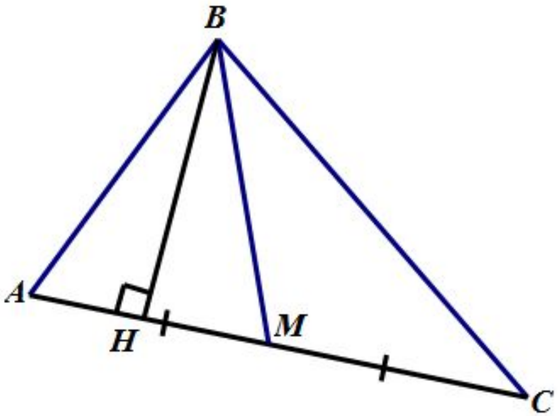
$$FH = FB + BH = \frac{1}{2}BC + BH$$

$$FH = 4$$

Ответ. 4

Задача 10

Доказать, что биссектриса угла разностороннего треугольника лежит между высотой и медианой, проведенными из той же вершины.

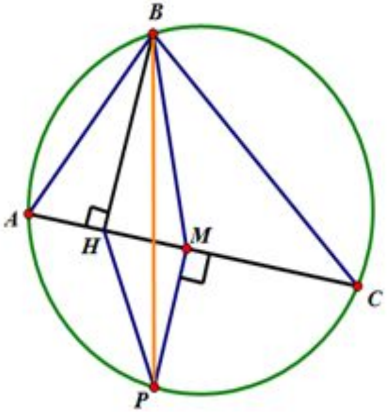


Решение.

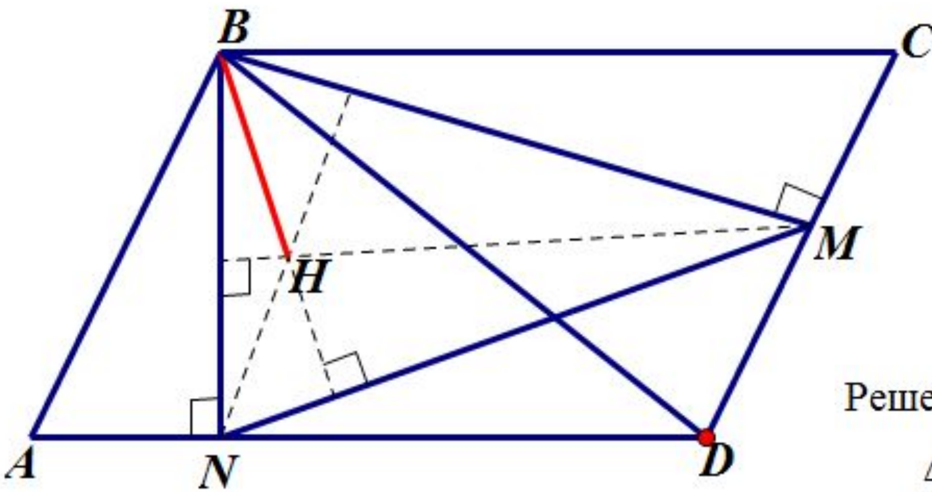
Построим описанную окружность.

AM=MC, дуги AP и PC равны,

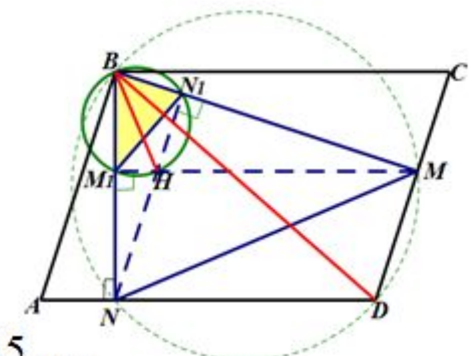
BP – диагональ трапеции BHPM.



Задача 11 **В параллелограмме ABCD проведены высоты BN и BM. Известно, что MN=15, BD=17. Найти расстояние от точки B до точки H – точки пересечения высот треугольника BMN.**



Решение.



$$\Delta BMN \sim \Delta BM_1N_1$$

$$\frac{M_1N_1}{MN} = \frac{BH}{BD} = \cos B$$

$$\frac{M_1N_1}{15} = \frac{BH}{17} \Rightarrow M_1N_1 = \frac{15}{17}BH$$

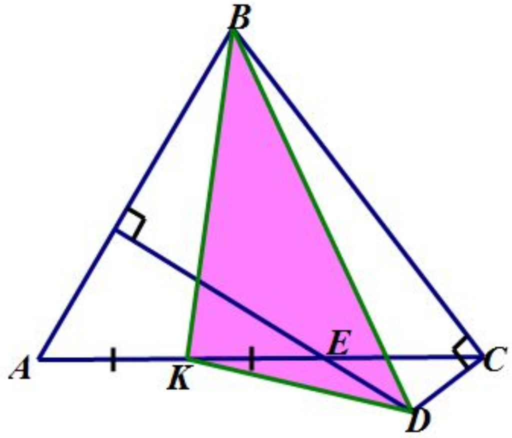
$$BH = \frac{M_1N_1}{\sin B} \qquad \sin B = \frac{15}{17} \qquad \cos B = \frac{8}{17}$$

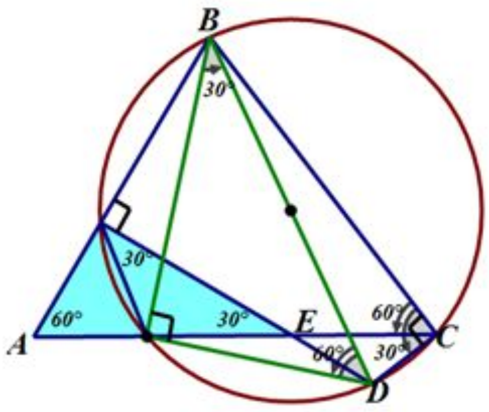
$$BH = 8$$

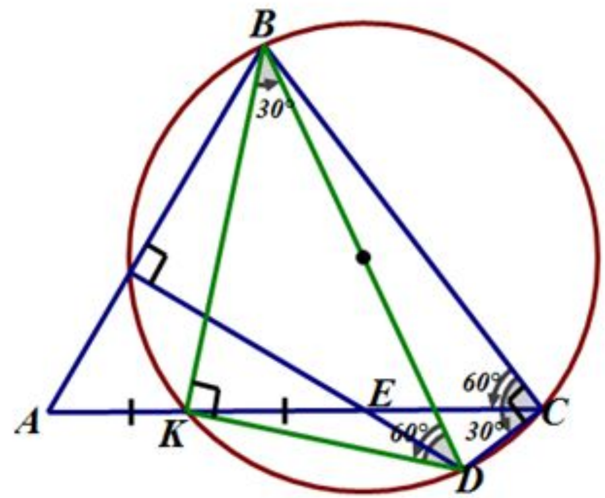
Ответ. 8

Задача 12.

Точка E лежит на стороне AC правильного треугольника ABC, K – середина отрезка AE. Прямая, проходящая через точку E перпендикулярно AB, и прямая, проходящая через точку C, перпендикулярно BC, пересекаются в точке D. Найдите углы треугольника BKD.





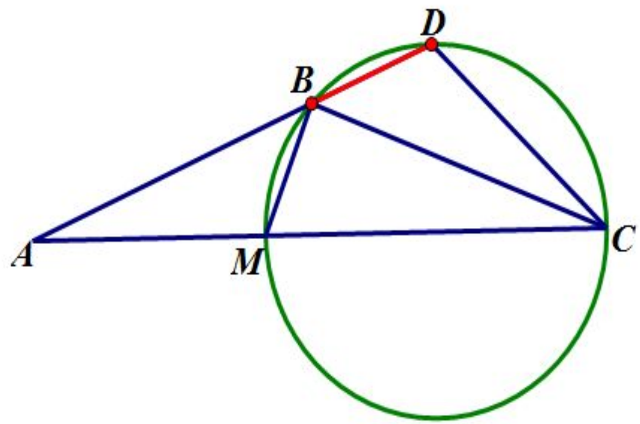


Задача 13

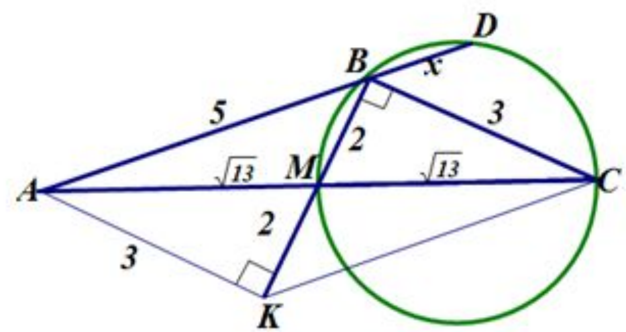
В треугольнике ABC точка M – середина AC.

а) Докажите, что длина отрезка BM больше полуразности, но меньше полусуммы длин сторон AB и BC.

б) Окружность проходит через точки B, C, M. Найдите длину хорды этой окружности, лежащей на прямой AB, если известно, что AB=5, BC=3, BM=2.



б)



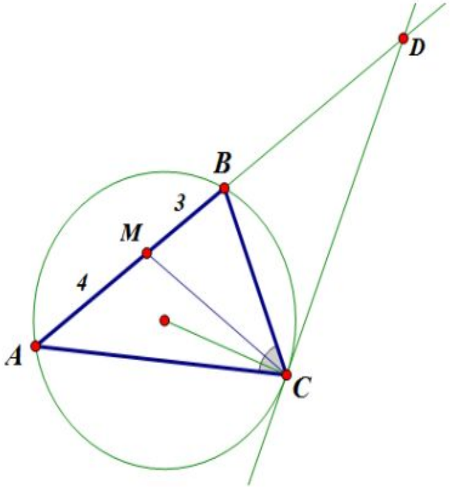
$$AB \cdot AD = AC \cdot AM$$

$$5 \cdot (5 + x) = 2\sqrt{13} \cdot \sqrt{13}$$

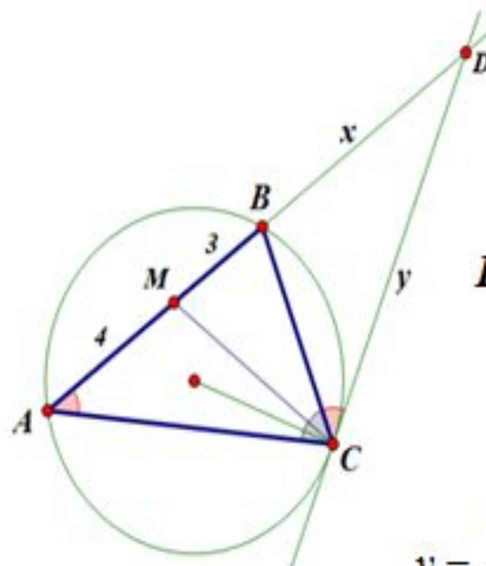
$$x = 0{,}2$$

Задача.14

Биссектриса CM треугольника ABC делит сторону AB на отрезки AM=4 и MB=3. Касательная к описанной окружности Δ ABC, проходящая через точку C, пересекает прямую AB в точке D. Найдите CD .



Решение.



$\Delta ACD \sim \Delta BCD$: $\dfrac{BC}{AC} = \dfrac{x}{y}$

По свойству биссектрисы треугольника $\dfrac{BC}{AC} = \dfrac{3}{4}$

$\dfrac{x}{y} = \dfrac{3}{4}$ $\quad x = \dfrac{3}{4}y$

По свойству касательной

$$y^2 = \left(\frac{3}{4}y + 7\right)\cdot\frac{3}{4}y$$

$$y = \frac{9}{16}y + \frac{21}{4} \qquad \frac{7}{16}y = \frac{21}{4} \qquad \frac{y}{4} = 3$$

$$y = 12$$

Ответ. 12