ЛЕКЦИЯ 11

Критерии пластичности

Предельное напряженное состояние в точке

Материал конструкции в зависимости от условий нагружения может находиться в различных механических состояниях. При **небольших** внешних **силах** возникают только **упругие деформации**, или, как говорят, материал находится в ***упругом состоянии***. При **больших силах** обнаруживаются заметные **остаточные деформации** и материал находится в ***пластическом состоянии***. При **дальнейшем увеличении нагрузки** происходит образование местных трещин и наступает ***состояние разрушения***.

Такая последовательности смены механических состояний типична для пластичных материалов и с достаточной очевидностью вытекает из испытаний образцов на растяжение и сжатие. Возникают вопросы: способны ли эти испытания в полной мере характеризовать механические свойства материала и что будет, если испытания проводить в условиях не одноосного, а, скажем, трехосного напряженного состояния?
Мы знаем, что **чугун** — типичный **хрупкий материал**, но под **действием большого все стороннего давления** приобретает свойства **пластичности** и разрыв образца происходит с образованием шейки.

Но ведь наложение всестороннего давления ***p*** означает переход от одноосного напряженного состояния $\sigma_{\mathbf{1}} = \sigma$, $\sigma_{\mathbf{2}}$=0, $\sigma_{\mathbf{3}} = \mathbf{0}$ к трехосному $\sigma_{\mathbf{1}} = \boldsymbol{\sigma} - \boldsymbol{p}$, $\sigma_{\mathbf{2}}$***=-p,*** $\sigma_{\mathbf{3}} = -\boldsymbol{p}$ и, следовательно, уже **этот пример** показывает нам, что **в различных напряженных состояниях** свойства материалов проявляются по-разному.
Таким образом, **механическое состояние материала** в точке **зависит** в первую очередь от **напряженного состояния** в этой **точке**, хотя и не определяется им полностью.

Напряженное состояние в точке является главной причиной **изменения механического состояния** материала, и задача заключается в том, чтобы **установить меру** напряженного состояния, по достижении которой происходит переход от упругого состояния к пластическому, и условий, при которых начинается разрушение, т. е. выработать ***критерий пластичности* и *критерий разрушения***.
Между тем и другим необходимо делать четкое разграничение. Физические процессы, протекающие в этих переходных состояниях, хотя и взаимосвязаны, но существенно различны, и поэтому нет оснований эти критерии отождествлять.

Более разработанным, определенным и более простым является **критерий пластичности**. Его мы рассмотрим!!!
В настоящее время сложилось два подхода к формулировке критерия пластичности.
Первый, связан с принятием **правдоподобных гипотез** обоснованных последующими **экспериментами**.
Второе, многообещающее направление содержит в своей основе **феноменологический подход**, т. е. оно основано на выборе наиболее простого и полного описания совокупности экспериментальных данных при минимальных

Прежде чем перейти к рассмотрению существующих теорий, введем некоторые понятия.
Коэффициент запаса.
Обобщим понятие **коэффициента запаса**. Положим, задано напряженное состояние в точке. Если увеличивать пропорционально все компоненты этого напряженного состояния, т. е. изменять его ***подобным образом***, то рано или поздно состояние материала изменится: либо возникнут **пластические деформации**, либо начнется **разрушение**. Условимся под **коэффициентом запаса** в данном напряженном состоянии понимать **число**, показывающее, **во сколько раз следует увеличить** все компоненты напряженного состояния, чтобы изменилось механическое состояние материала

Если в двух напряженных состояниях **коэффициенты запаса равны**, то такие напряженные состояния называются ***равноопасными.***

Эквивалентное напряжение.

Для заданного материала сравнение напряженных состояний можно производить не по коэффициенту запаса, а по **числовой характеристике** какого-либо **одного напряженного состояния**, выбираемого в качестве эталона. За такой эталон (**эквивалент**) удобнее всего принять **напряжение обычного растяжения** — так называемое ***эквивалентное напряжение*** $\sigma_{экв}$ ***(рис.1).***

Эквивалентное напряжение *это такое напряжение, которое следует создать в растянутом образце, чтобы его состояние было равноопасно с заданным напряженным состоянием (рис.1).*

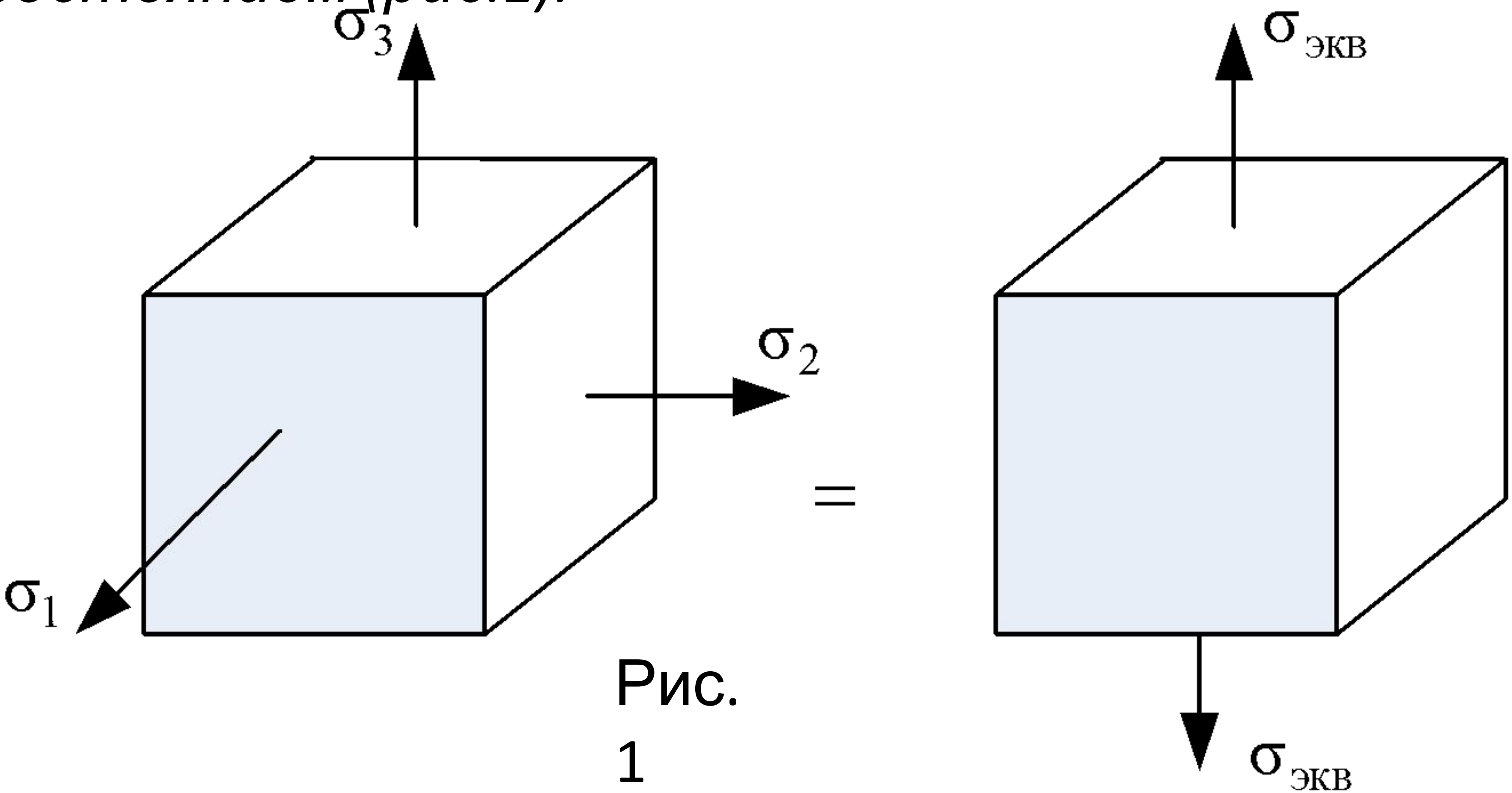


Рис. 1

Вводя понятие эквивалентного напряжения, мы сводим расчет на прочность в сложном напряженном состоянии к расчету на обычное растяжение. Действительно, коэффициент запаса при растяжении определяется, как обычно, следующим образом:

$$n = \frac{\sigma_{yt}}{\sigma_{экв}}$$

Такую же величину коэффициент запаса имеет и для случая сложного напряженного состояния. Весь вопрос заключается только в том, как выразить $\sigma_{\text{экв}}$ через $\sigma_{\mathbf{1}}$, $\sigma_{\mathbf{2}}$, $\sigma_{\mathbf{3}}$.
Для этого рассмотрим некоторые уже сложившиеся и зарекомендовавшие себя гипотезы пластичности.

Теория наибольших касательных напряжений (критерий пластичности Треска-Сен-Венана)

Основной вопрос при формулировке критерия пластичности заключается в том, какая из компонент напряженного состояния (или какая их комбинация) в общем случае определяет переход материала к пластическому состоянию. Из множества гипотез пластичности лишь две сохранили к настоящему времени свое значение. **Первая** гипотеза связана с именами **Треска** и **Сен-Венана**. Она основана на достаточно очевидной предпосылке: пластическая деформация в металлах возникает в результате необратимых сдвигов в кристаллической решетке (рис.2).

Понятно, что переход к пластическому состоянию не происходит внезапно. Сначала пластическая деформация возникает в отдельных, неблагоприятно ориентированных зернах. Возрастание нагрузки вовлекает в пластическую деформацию новые микрообласти, и, когда пластической деформацией охватывается подавляющее множество зерен, мы можем говорить о том, что произошел переход к пластическому состоянию

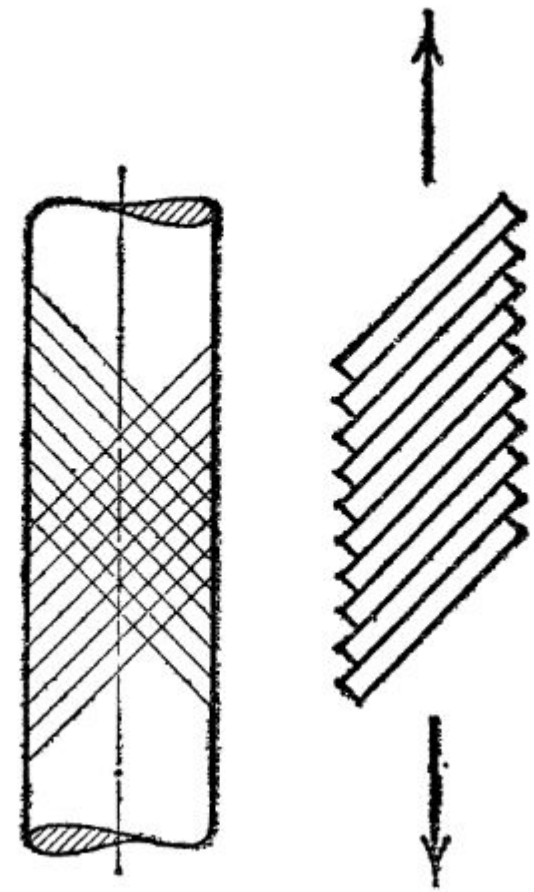


Рис. 2

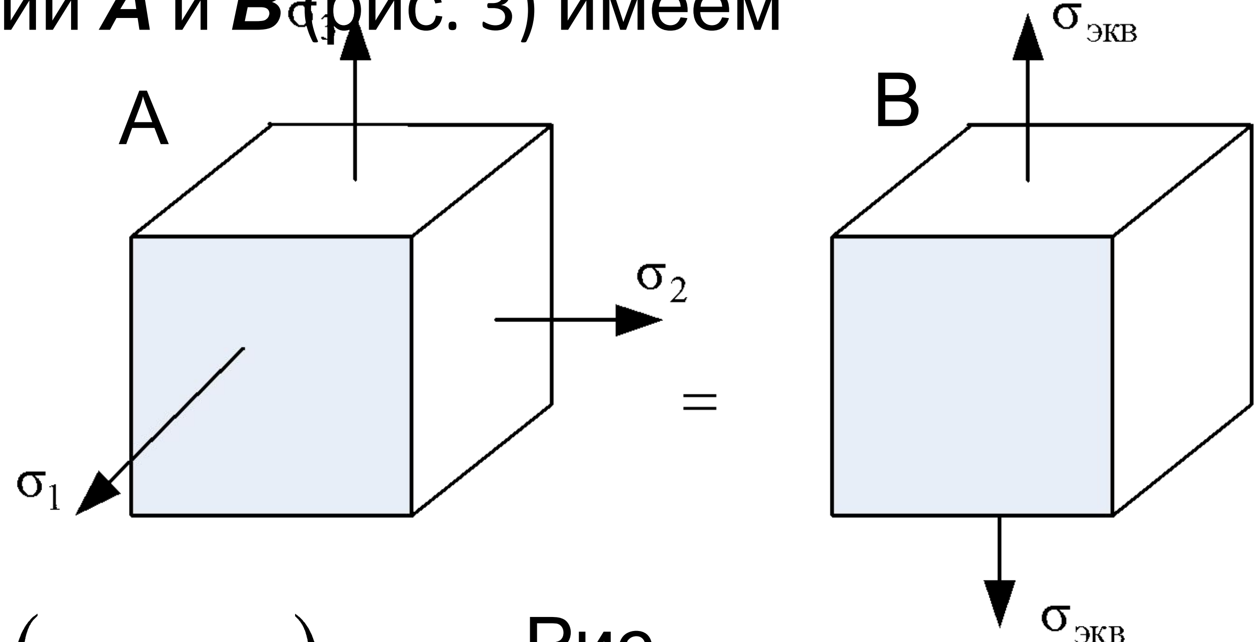
Естественно предположить, что мерой этого перехода является **наибольшее касательное напряжение** в объеме, охватывающем достаточно большое число произвольно ориентированных зерен, то самое касательное напряжение, которое определялось нами на основе предпосылки сплошной изотропной среды.

Максимальное касательное напряжение возникает на площадках, **равнонаклоненных** к площадкам **наибольшего и наименьшего главных напряжений**, и равно полуразности этих напряжений $\tau_{max} = \frac{(\sigma_1 - \sigma_3)}{2}$

Таким образом, если **величина τ_{max}** достигла некоторого **предельного значения**, свойственного данному материалу, то ***независимо от вида напряженного состояния*** происходит переход к пластическому состоянию материала.

Экспериментальная проверка этой гипотезы показала, что для пластичных материалов она приводит, в общем, к **удовлетворительным результатам**. Переход от упругого состояния к пластическому действительно с достаточной точностью определяется разностью между наибольшим и наименьшим из главных напряжений и слабо зависит от промежуточного главного напряжения σ_2.

Придерживаясь сформулированного критерия пластичности, мы можем принять, что два напряженных состояния равноопасны в том случае, если имеет место равенство наибольших касательных напряжений. Для напряженных состояний ***А*** и ***В*** (рис. 3) имеем



$$\tau_{\max} = \frac{(\sigma_1 - \sigma_3)}{2}$$

Рис. 3

$$\tau_{\max} = \frac{\sigma_{экв}}{2}$$

Приравнивая касательные напряжения состояний А и В, получим формулу для эквивалентного напряжения:

$$\sigma_{экв} = \sigma_1 - \sigma_3 \quad (1)$$

Это и есть то **расчетное напряжение**, которое по критерию максимальных касательных напряжений должно быть **сопоставлено с пределом текучести при растяжении**.

Теория энергии формоизменения (критерий пластичности Хубера–Мизеса)

Она была сформулирована Хубером (1904) в виде исправленного варианта критерия Белрами, согласно которому переход к пластическому состоянию связан с уровнем накопленной в единице объема потенциальной энергии деформации. Но принять в качестве критерия пластичности всю энергию деформации нельзя. Это противоречило бы экспериментально установленному факту, что при всестороннем давлении пластические деформации не возникают, в то время как потенциальная энергия неограниченно возрастает.

В связи с этим Хубером было предложено исключить из рассмотрения энергию объема, а в качестве **критерия перехода** из **упругого состояния** в **пластическое** принять **энергию формоизменения.**

Энергия формоизменения при сложном напряженном состоянии (состояние А рис.3)

$$U_{оф} = \frac{1+\mu}{6E}[(\sigma_1 - \sigma_2)^2 + (\sigma_2 - \sigma_3)^2 + (\sigma_3 - \sigma_1)^2]$$

Энергия формоизменения при простом растяжении (состояние В рис.3)

$$U_{оф} = \frac{1+\mu}{6E} 2\sigma_{экв}$$

Из условия равноопасности определяем $\sigma_{экв}$. Для этого приравниваем правые части двух последних выражений и получаем

$$\sigma_{экв} = \frac{1}{\sqrt{2}}\sqrt{(\sigma_1 - \sigma_2)^2 + (\sigma_2 - \sigma_3)^2 + (\sigma_3 - \sigma_1)^2} \quad (2)$$

Для основных конструкционных металлов формула (2) более точно отражает условия перехода в пластическое состояние. В процентном отношении разница между выражениями (1) и (2) не столь уж и заметна. Она достигает максимума при чистом сдвиге, когда $\sigma_3 = -\sigma_1$, σ_2=0, и составляет примерно 13%.

Теория Мора

Допустим, что мы располагаем испытательной машиной, на которой образцу можно задавать любые напряженные состояния с пропорциональным изменением всех компонент. Выберем некоторое напряженное состояние и будем одновременно увеличивать все компоненты. Рано или поздно это напряженное состояние станет предельным. Образец либо разрушится, либо в нем появятся пластические деформации. Вычертим для предельного состояния на плоскости σ, τ наибольший из трех кругов Мора (круг 1, рис. 4)

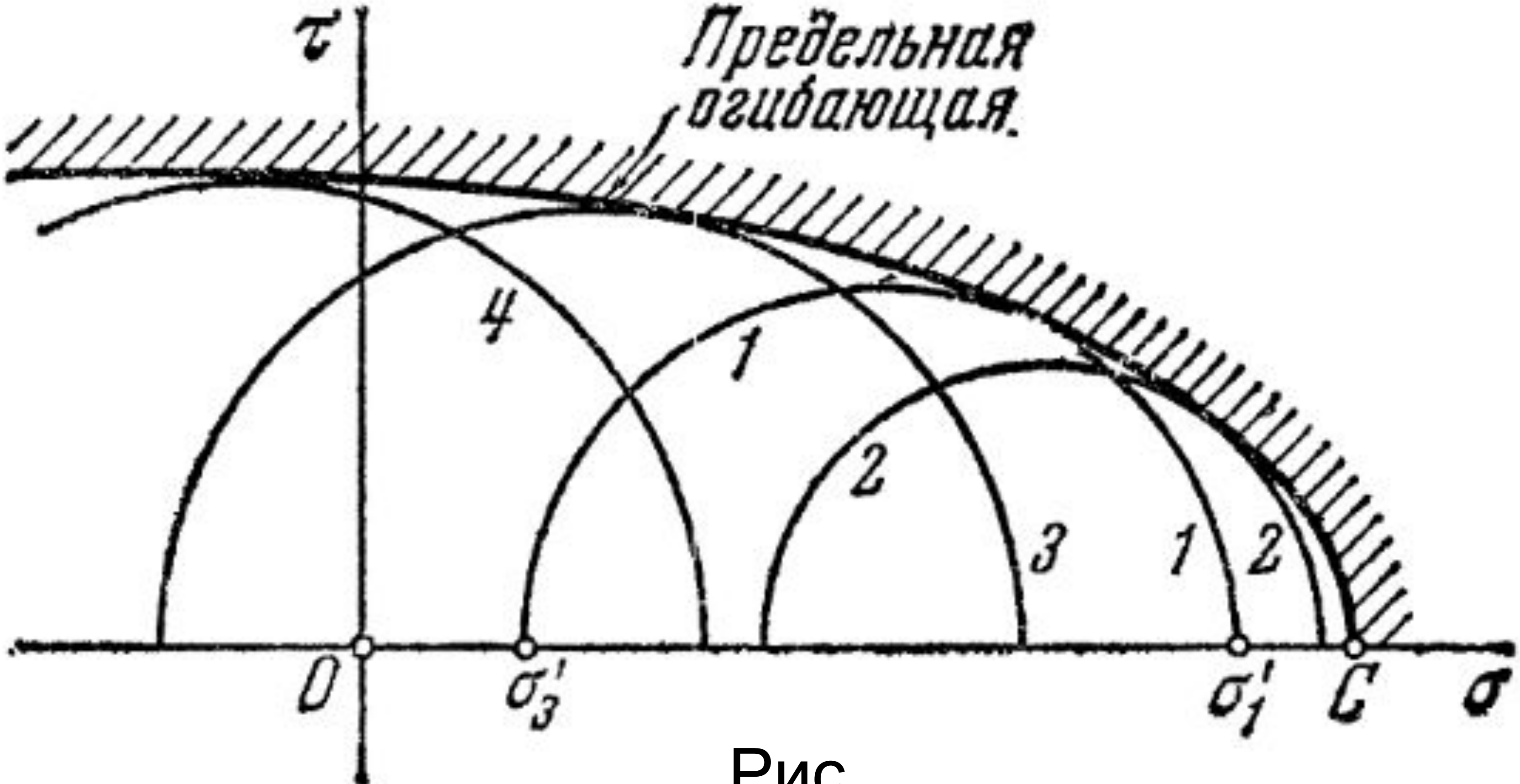


Рис. 4

Будем в дальнейшем считать, что предельное состояние не зависит от величины σ_2.

Далее, на образце того же материала производим испытание при другом напряженном состоянии. Снова путем пропорционального увеличения компонент добиваемся того, что напряженное состояние станет предельным. На диаграмме (рис. 4) вычерчиваем соответствующий круг (круг *2).* Поступая таким образом и дальше, получим семейство кругов Мора для предельных напряженных состояний.

Вычерчиваем их общую огибающую. Примем, что эта ***огибающая*** *является* ***единственной***, независимо от величин промежуточных главных напряжений σ_2. Это положение является основным допущением в излагаемой теории.

Форма огибающей предельных кругов Мора **зависит** от **свойств материала** и является его **механической характеристикой**, такой же, как, например, диаграмма растяжения.
Если огибающая предельных кругов для материала дана, можно при любом заданном напряженном состоянии определить коэффициент запаса. Для этого надо по заданным напряжениям вычертить наибольший из трех кругов Мора, а затем, хотя бы графически, установить, во сколько раз следует увеличить σ_1 и σ_3, чтобы увеличенный круг касался предельной огибающей.

Теперь нужно решить вопрос о том, как построить огибающую предельных кругов при ограниченном числе испытаний. Наиболее простыми являются испытания на растяжение и сжатие. Следовательно, два предельных круга получаются просто (рис. 5).

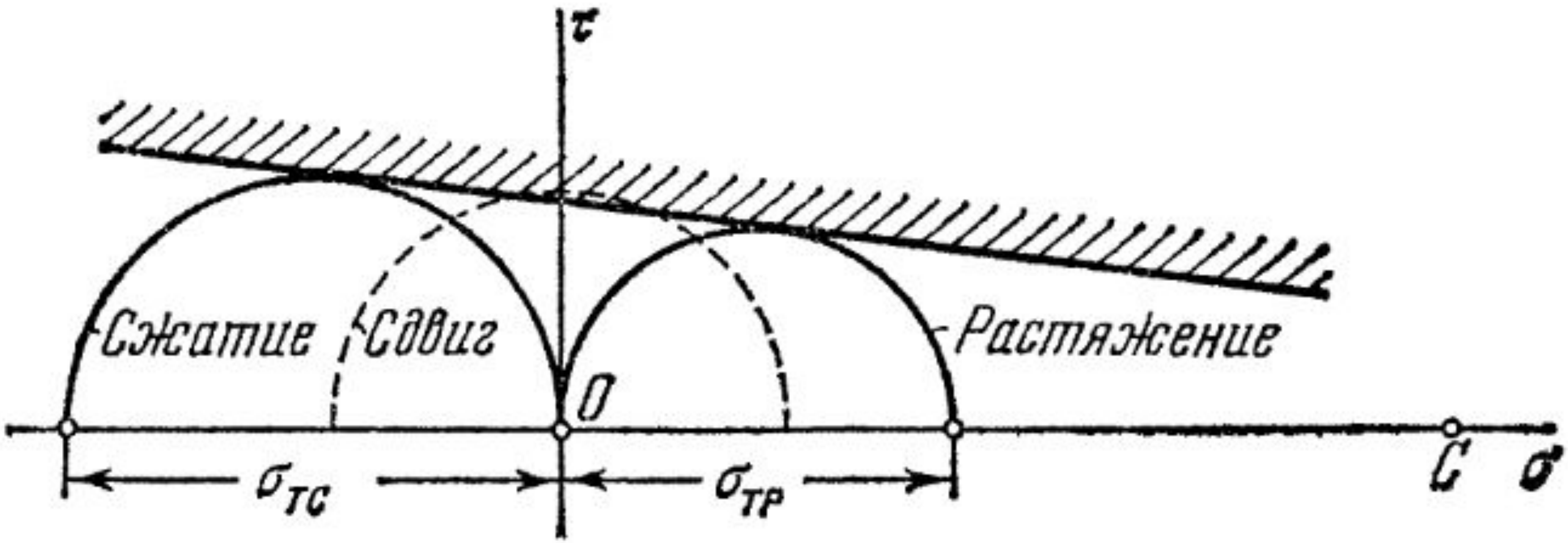


Рис. 5

Можно получить еще один предельный круг путем испытания тонкостенной трубки на кручение. При этом материал будет находиться в состоянии чистого сдвига ($\sigma_3 = -\sigma_1$) и центр соответствующего круга расположится в начале координат (рис. 5).

Для определения огибающей важно знать положение точки *C* (рис. 4 и 5). Нормальное напряжение в этой точке представляет собой напряжение отрыва при всестороннем растяжении. До сих пор, однако, не существует метода для проведения соответствующего испытания. Поэтому пока нет возможности построить для материала предельный круг, расположенный правее предельного круга растяжения.

В силу указанных обстоятельств наиболее простым и естественным является решение аппроксимировать предельную огибающую касательной к кругам растяжения и сжатия (рис. 5). Понятно, что это не исключает возможности в дальнейшем, когда будут найдены новые методы испытания, уточнить форму огибающей и тем самым более полно отразить особенности поведения материала в условиях, близких к всестороннему растяжению.

Выведем выражение для $\sigma_{\text{экв}}$, полагая, что огибающая является прямой. На рис. 6 эта огибающая проведена по касательной к предельным кругам растяжения и сжатия (точки *D и F).*

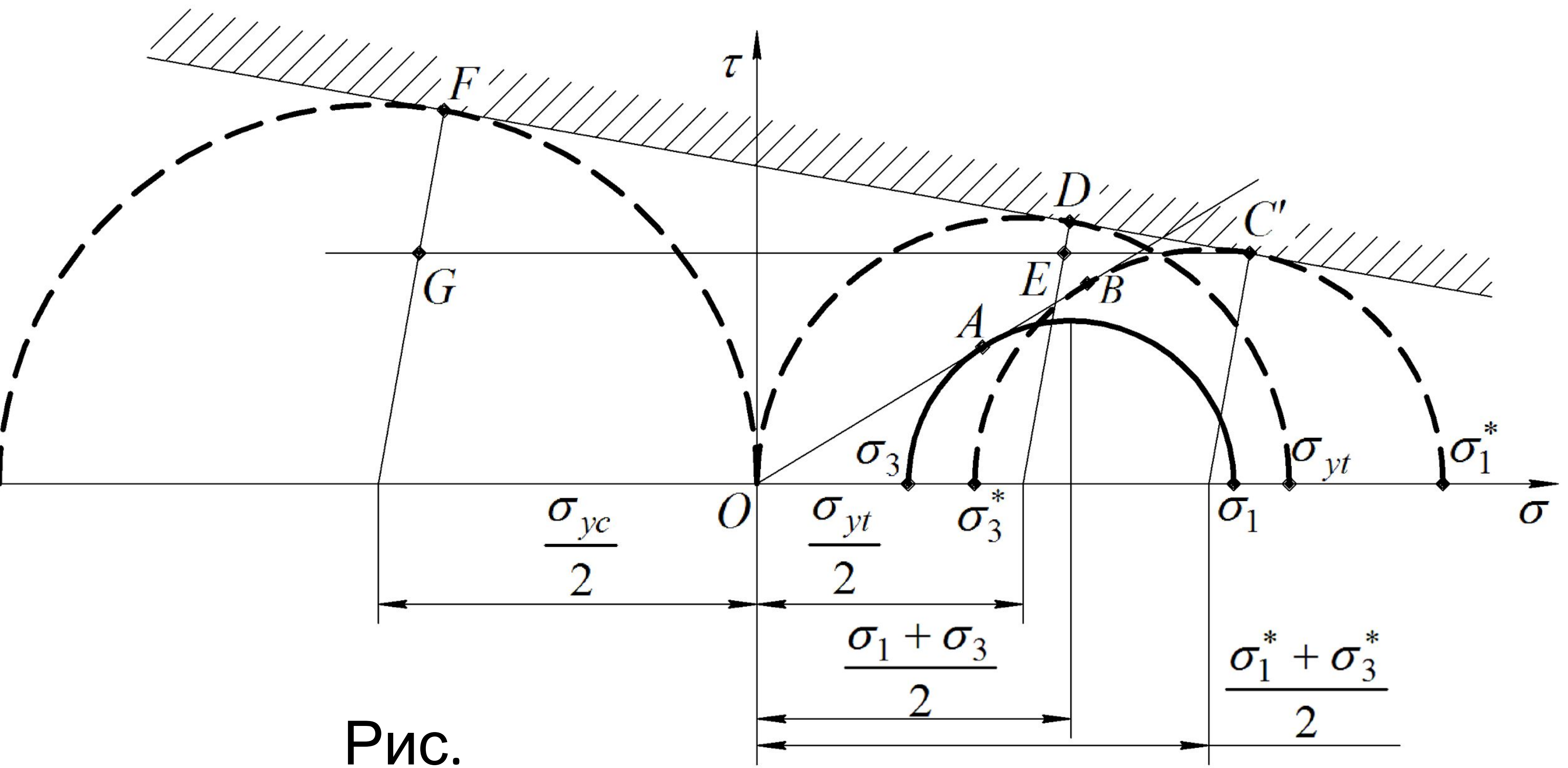


Рис. 6

Построим круг Мора для некоторого напряженного состояния, заданного наибольшим и наименьшим главными напряжениями σ_1 и σ_3 (рис.6). Если все компоненты этого напряженного состояния увеличить в раз ***n*** (где ***n***— коэффициент запаса), то круг станет предельным. Напряжения σ_1 и σ_3 примут значения

$$\sigma_1^* = \sigma_1 \cdot n; \quad \sigma_3^* = \sigma_3 \cdot n. \quad (3)$$

Этот увеличенный (предельный) круг Мора касается предельной огибающей в точке *C'*. Кроме того, согласно условию пропорционального увеличения компонент он будет касаться продолжения луча *OA* в точке *B*. Из точки *C'* проводим горизонтальную прямую *C'EG* и составляем пропорцию:

$$\frac{DE}{C'E} = \frac{FG}{C'G} \quad (4)$$

Но отрезки *DE* и *FG* представляют собой разности радиусов рассматриваемых кругов. Поэтому

$$DE = \frac{\sigma_{yt}}{2} - \frac{\sigma_1^* - \sigma_3^*}{2}; \quad FG = \frac{\sigma_{yc}}{2} - \frac{\sigma_1^* - \sigma_3^*}{2}.$$

Дале
е

$$C'E = \frac{\sigma_1^* + \sigma_3^*}{2} - \frac{\sigma_{yt}}{2}; \quad C'G = \frac{\sigma_1^* + \sigma_3^*}{2} + \frac{\sigma_{yc}}{2}.$$

Преобразовывая пропорцию (4), получим

$$\sigma_{yt} = \sigma_1^* - \frac{\sigma_{yt}}{\sigma_{yc}}\sigma_3^*. \quad (5)$$

Подставляя выражения (3) в (5), получим

$$n = \frac{\sigma_{yt}}{\sigma_1 - \frac{\sigma_{yt}}{\sigma_{yc}}\sigma_3}. \quad (6)$$

Для одноосного растяжения коэффициент запаса ***n***

$$n = \frac{\sigma_{yt}}{\sigma_{экв}}. \quad (7)$$

По условию равноопасности, коэффициенты запаса ***n*** (6) и (7) этих напряженных состояний равны. Поэтому

$$\sigma_{экв} = \sigma_1 - k\sigma_3 \quad (8)$$

В выражении (8) ***k*** - отношение предела текучести при растяжении к пределу текучести при сжатии

$$k = \frac{\sigma_{yt}}{\sigma_{yc}}.$$

В частном случае, если материал имеет при растяжении и сжатии одинаковые пределы текучести, *k=1*. Тогда формула (8) переходит в полученную ранее формулу (1).

Несколько замечаний по поводу приведенных теорий:

1. Теории наибольших касательных напряжений и энергии формоизменения применимы только для совершенно пластичных материалов, у которых $\sigma_{yt} = \sigma_{yc}$.
2. Теория Мора может использоваться не только для совершенно пластичных материалов, но и для материалов хрупкопластичных, у которых $\sigma_{yt} < \sigma_{yc}$.
3. Считается, что теория энергии формоизменения несколько лучше согласуется с экспериментом, чем теория наибольших касательных напряжений. Кроме того, она симметрична относительно всех входящих в формулу главных напряжений, что делает ее более удобной в расчетах.

4. Не стоит говорить, что теория наибольших касательных напряжений является частным случаем теории Мора. Теории имеют совершенно разные идеологии и их сходство обусловлено только линейной аппроксимацией, так называемой предельной огибающей больших кругов Мора.

5. Все три теории дают приемлемые результаты для смешанных напряженных состояний. Использование всех теорий в условиях глубокого всестороннего сжатия и глубокого всестороннего растяжения сомнительно.