Два замечательных предела

В теории пределов большую роль играют два предела, которые, в силу их важности, получили названия ***замечательных пределов***.

Первый замечательный предел

Первый замечательный предел

$\boxed{\text{Т}}$ Функция $y = \dfrac{\sin x}{x}$ при $x \to 0$ имеет предел, равный 1: $\lim\limits_{x\to 0} \dfrac{\sin x}{x} = 1$.

Следствия:

$$\lim_{x\to 0} \frac{x}{\sin x} = 1$$

$$\lim_{x\to 0} \frac{tgx}{x} = 1$$

$$\lim_{x\to 0} \frac{x}{tgx} = 1$$

$$\lim_{x\to 0} \frac{\sin kx}{kx} = 1$$

Примеры

Пример:

Вычислить предел: $\lim\limits_{x\to 0}\frac{\sin 2x}{x}$.

Если $x \to 0$, то и $2x \to 0$ и тогда

$$\lim_{x\to 0}\frac{\sin 2x}{x}=\left[\frac{0}{0}\right]=\lim_{x\to 0}\frac{2\cdot\sin 2x}{2\cdot x}=2\cdot\lim_{x\to 0}\frac{\sin 2x}{2x}=2\cdot 1=2.$$

Пример:

Вычислить предел: $\lim\limits_{x\to 0}\frac{\mathrm{tg}x}{x}$.

$$\lim_{x\to 0}\frac{\mathrm{tg}\,x}{x}=\left[\frac{0}{0}\right]=\lim_{x\to 0}\left(\frac{\sin x}{x}\cdot\frac{1}{\cos x}\right)=\lim_{x\to 0}\frac{\sin x}{x}\cdot\lim_{x\to 0}\frac{1}{\cos x}=1\cdot\frac{1}{\cos 0}=1.$$

Примеры

Найти $\lim\limits_{x\to 0}\dfrac{\sin 9x}{x}$.

Решение

$$\lim_{x\to 0}\frac{\sin 9x}{x}=\left|\frac{0}{0}\right|=\lim_{x\to 0}\frac{\sin 9x}{9x\cdot\frac{1}{9}}=9\cdot\lim_{x\to 0}\frac{\sin 9x}{9x}=9\cdot 1=9.$$

Ответ: $\lim\limits_{x\to 0}\dfrac{\sin 9x}{x}=9$.

Примеры

Найти $\lim\limits_{x\to 0}\dfrac{\sin 5x}{\operatorname{tg} 8x}$.

$$\lim_{x\to 0}\frac{\dfrac{\sin 5x}{5x}\cdot 5x}{\dfrac{tg\,8x}{8x}\cdot 8x}=\frac{5}{8}\cdot\lim_{x\to 0}\frac{\dfrac{\sin 5x}{5x}}{\dfrac{tg\,8x}{8x}}=\frac{5}{8}\cdot\frac{\lim\limits_{x\to 0}\dfrac{\sin 5x}{5x}}{\lim\limits_{x\to 0}\dfrac{tg\,8x}{8x}}$$

Для отыскания $\lim\limits_{x\to 0}\dfrac{\operatorname{tg} 8x}{8x}$ применима формула

$$\lim_{\alpha\to 0}\frac{\operatorname{tg}\,\alpha}{\alpha}=1$$

$$\frac{5}{8}\cdot\frac{\lim\limits_{x\to 0}\dfrac{\sin 5x}{5x}}{\lim\limits_{x\to 0}\dfrac{tg\,8x}{8x}}=\frac{5}{8}\cdot\frac{1}{1}=\frac{5}{8}.$$

Ответ: $\lim\limits_{x\to 0}\dfrac{\sin 5x}{\operatorname{tg} 8x}=\dfrac{5}{8}$.

Примеры

Вычислим предел $\lim\limits_{x\to 0}\dfrac{\sin 2x}{\sin 3x}$.

Преобразуем функцию под знаком предела следующим образом:

$$\lim_{x\to 0}\frac{\sin 2x}{\sin 3x}=\lim_{x\to 0}\left(\frac{\sin 2x}{2x}\cdot\frac{3x}{\sin 3x}\cdot\frac{2}{3}\right).$$

Теперь вынесем постоянный множитель за знак предела и применим теорему о пределе произведения:

$$\lim_{x\to 0}\frac{\sin 2x}{\sin 3x}=\frac{2}{3}\lim_{x\to 0}\frac{\sin 2x}{2x}\cdot\lim_{x\to 0}\frac{3x}{\sin 3x}\cdot.$$

$$\lim_{x\to 0}\frac{\sin 2x}{2x}=\lim_{t\to 0}\frac{\sin t}{t}=1$$

$$\lim_{x\to 0}\frac{3x}{\sin 3x}=\lim_{y\to 0}\frac{y}{\sin y}=1.$$

$$\lim_{x\to 0}\frac{\sin 2x}{\sin 3x}=\frac{2}{3}\cdot 1\cdot 1=\frac{2}{3}.$$

Примеры

$$\lim_{x\to 0}\frac{1-\cos 4x}{x^2}=\left[\frac{0}{0}\right]=\lim_{x\to 0}\frac{2\sin^2 2x}{x^2}=2\lim_{x\to 0}\left(\frac{\sin 2x}{x}\right)^2$$

$$=2\left(\lim_{x\to 0}\frac{\sin 2x}{x}\right)^2=2\left(\lim_{x\to 0}\frac{2\sin 2x}{2x}\right)^2=$$

$$=2\left(2\cdot\lim_{x\to 0}\frac{\sin 2x}{2x}\right)^2=2(2\cdot 1)^2=8$$

Примеры

$$\lim_{x\to 0}\frac{\sin 7x}{4x}=\lim_{x\to 0}\frac{7\sin 7x}{7\cdot 4x}=\frac{7}{4}\lim_{x\to 0}\frac{\sin 7x}{7x}=\frac{7}{4}$$

$$\lim_{x\to 0}\frac{\sin x\cos x}{x}=\lim_{x\to 0}\frac{\sin x}{x}\cdot\lim_{x\to 0}\cos x=1\cdot 1=1$$

Второй замечательный предел

Второй замечательный предел: $\lim_{x\to\infty}\left(1+\frac{1}{x}\right)^{x}=e$

- Число e , заданное этим пределом, играет очень большую роль как в математическом анализе, так и в других разделах математики.

- Число e часто называют *основанием натуральных логарифмов*.

Следствия из 2-го замечательного предела

$$\lim_{x\to 0}(1+x)^{\frac{1}{x}} = e$$

Пример:

Вычислить предел: $\lim\limits_{x\to\infty}(1+1/x)^{7x}$.

$$\lim_{x\to\infty}(1+1/x)^{7x} = \left[1^{\infty}\right] = \lim_{x\to\infty}\left[(1+1/x)^{x}\right]^{7} = \left[\lim_{x\to\infty}(1+1/x)^{x}\right]^{7} = e^{7}.$$

Следствия из 2-го замечательного предела

$$\lim_{x \to \infty}\left(1+\frac{k}{x}\right)^{x} = e^{k}$$

Пример:

$$\lim_{x\to\infty}\left(1-\frac{4}{x}\right)^{x} = \lim_{x\to\infty}\left(1+\frac{1}{-\frac{x}{4}}\right)^{x} = \left(\lim_{x\to\infty}\left(1+\frac{1}{-\frac{x}{4}}\right)^{-\frac{x}{4}}\right)^{-4} = e^{-4}$$

Пример

$$\lim_{x\to\infty}\left(1+\frac{1}{3x}\right)^{4x} \Rightarrow \lim_{x\to\infty}\left(1+\frac{1}{3x}\right)^{4x} = 1^{\infty} = \lim_{x\to\infty}\left(\left(1+\frac{1}{3x}\right)^{3x}\right)^{\frac{1}{3x}\cdot 4x}$$

$$\lim_{x\to\infty}\left(1+\frac{1}{3x}\right)^{4x} = 1^{\infty} = \lim_{x\to\infty}\left(\left(1+\frac{1}{3x}\right)^{3x}\right)^{\frac{1}{3x}\cdot 4x}$$

e (2-ой замечательный предел)

$$\lim_{x\to\infty}\left(1+\frac{1}{3x}\right)^{4x} = 1^{\infty} = \lim_{x\to\infty}\left(\left(1+\frac{1}{3x}\right)^{3x}\right)^{\frac{1}{3x}\cdot 4x} = e^{\lim\limits_{x\to\infty}\frac{4x}{3x}} = e^{\frac{4}{3}}$$

e (2-ой замечательный предел)

Ответ: $e^{\frac{4}{3}}$.

ЗАДАНИЯ

- Вычислить следующие пределы:

$$\lim_{x\to 0}\frac{\sin 2x}{3x}$$

$$\lim_{x\to 0}\frac{3x}{\sin 5x}$$

$$\lim_{x\to 0}\frac{tg3x}{5x}.$$

$$\lim_{x\to\infty}\left(1+\frac{5}{3x}\right)^{2x}$$

$$\lim_{x\to\infty}\left(\frac{x+8}{x}\right)^{3x}$$

$$\lim_{x\to 0}(1+2x)^{\frac{5}{x}}$$

ЗАДАНИЯ

$$\lim_{x\to\infty}\left(1+\frac{2}{3x}\right)^x;\quad \lim_{x\to\infty}\left(1-\frac{5}{4x}\right)^x;$$

$$\lim_{x\to 0}\left(1+\frac{2x}{3}\right)^{\frac{2}{3x}}\qquad \lim_{x\to\infty}\left(1-\frac{3}{x}\right)^x$$