

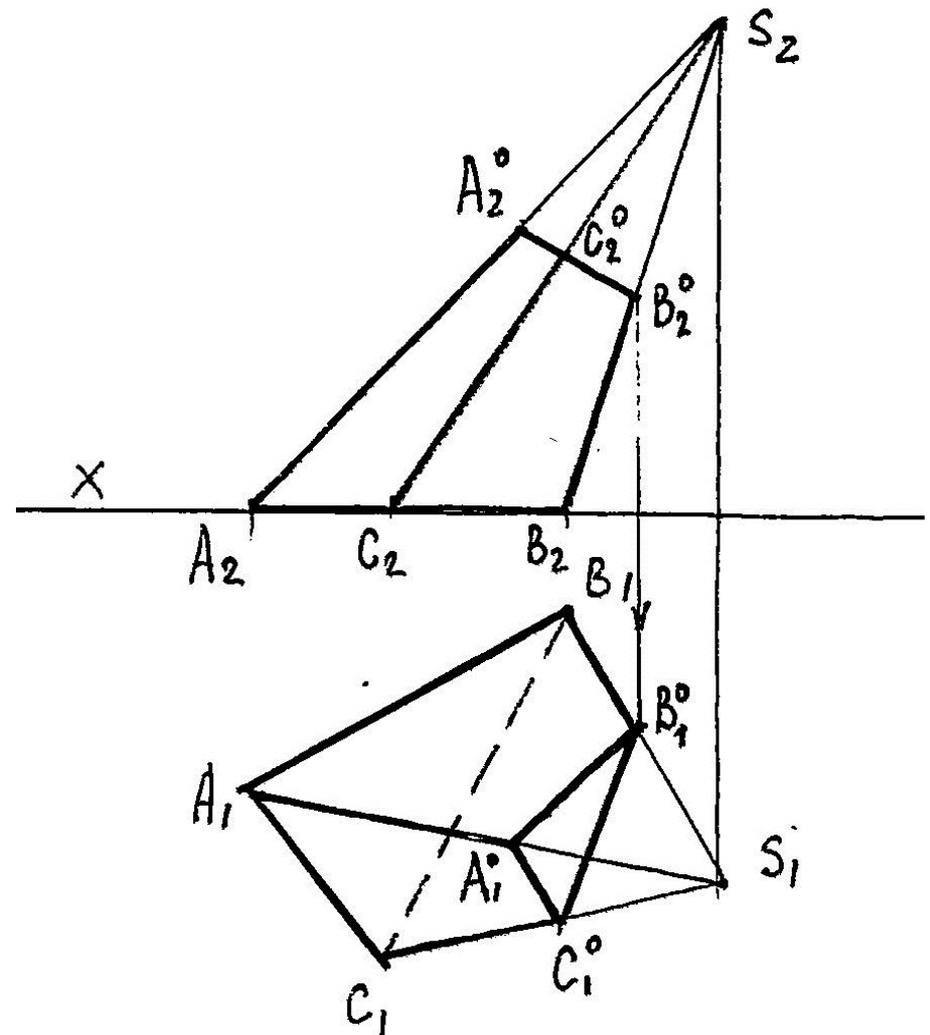
# Лекция 9

- Построение разверток пирамиды и конуса.
- Построение разверток призмы и цилиндра.
- Построение разверток поверхностей Каталана
- Построение разверток поверхностей вращения

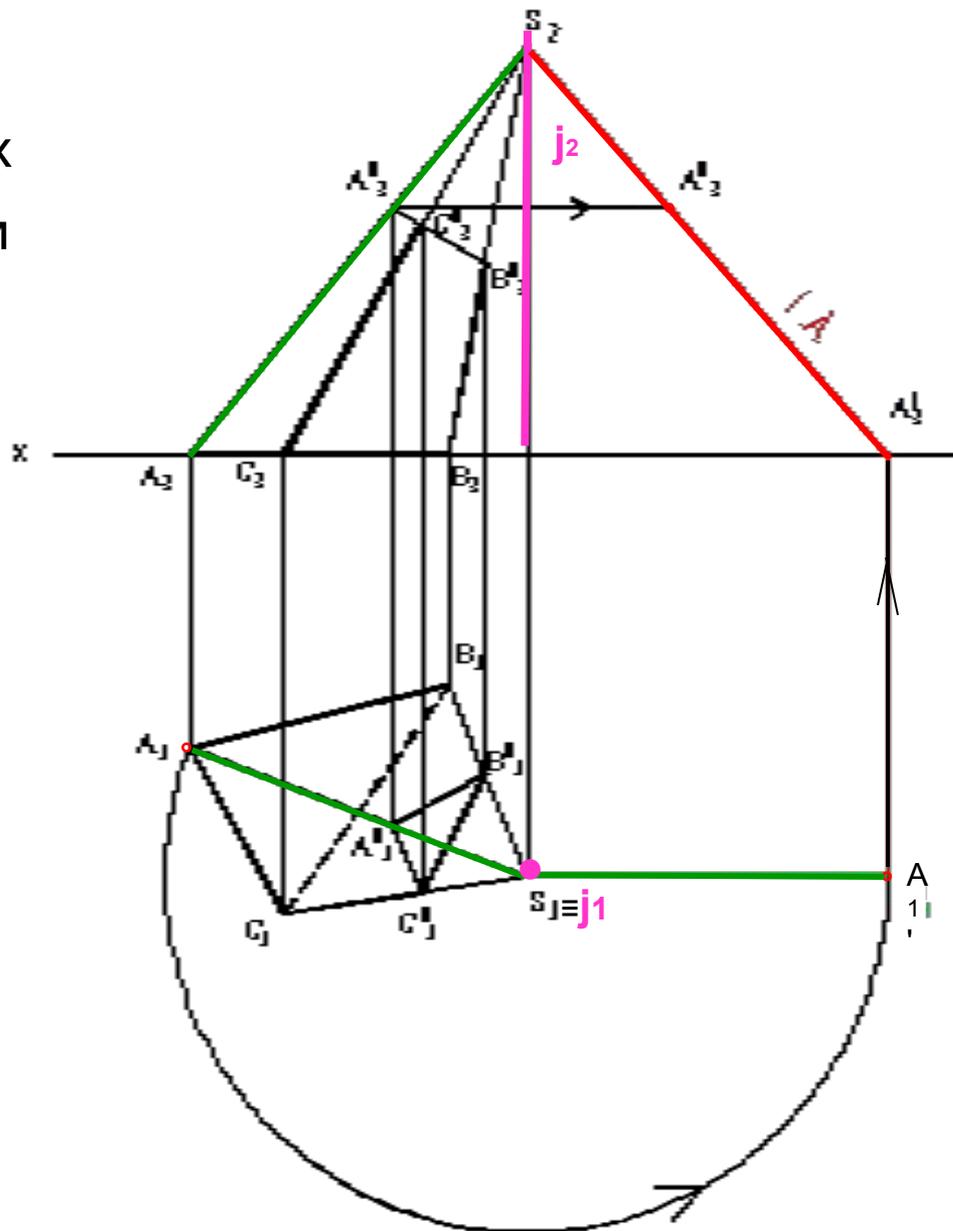
# Построение развертки пирамиды

**Задача:** построить развертку наклонной усеченной пирамиды с основанием  $\triangle ABC$  и вершиной  $S$

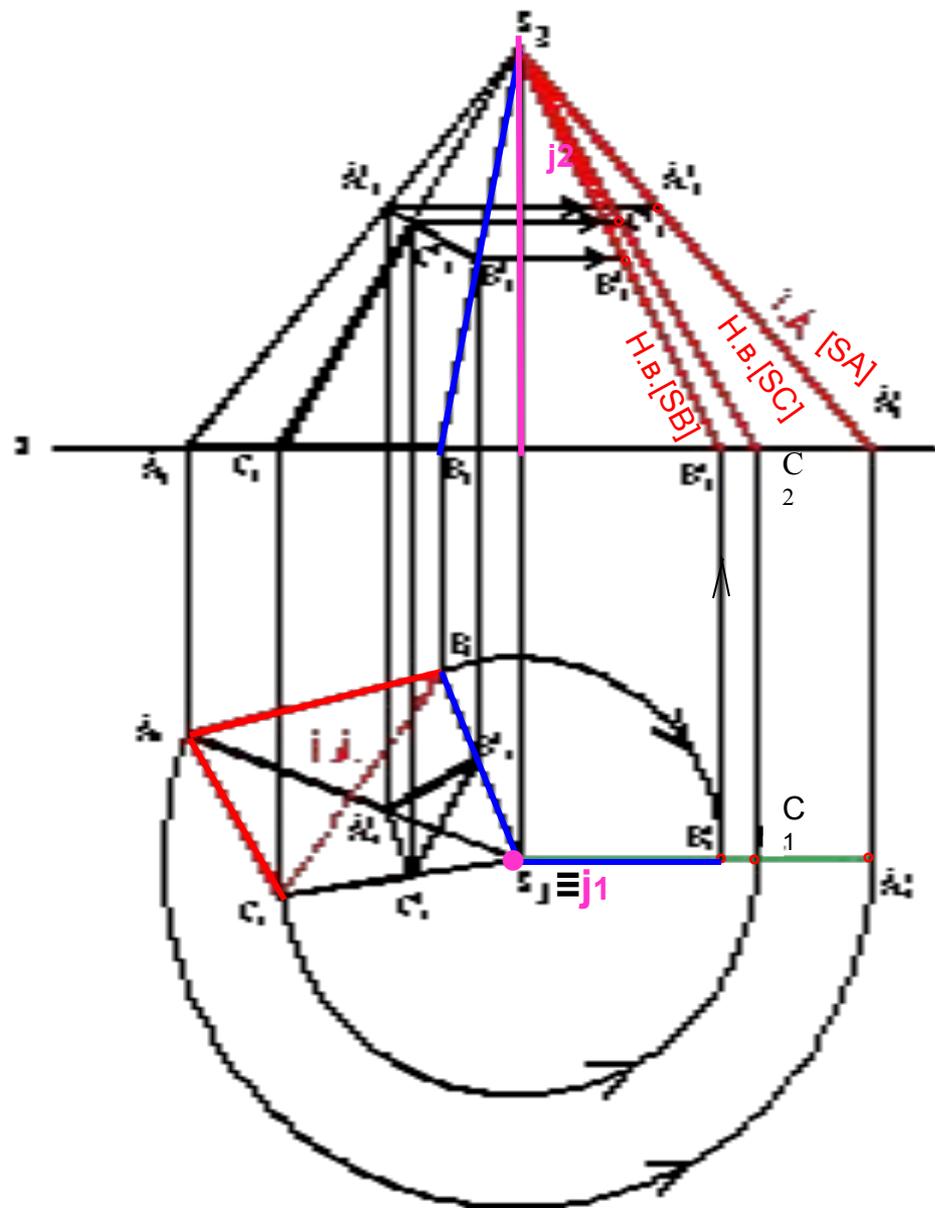
**Решение:** Для построения развертки пирамиды надо найти натуральные величины всех ее граней.



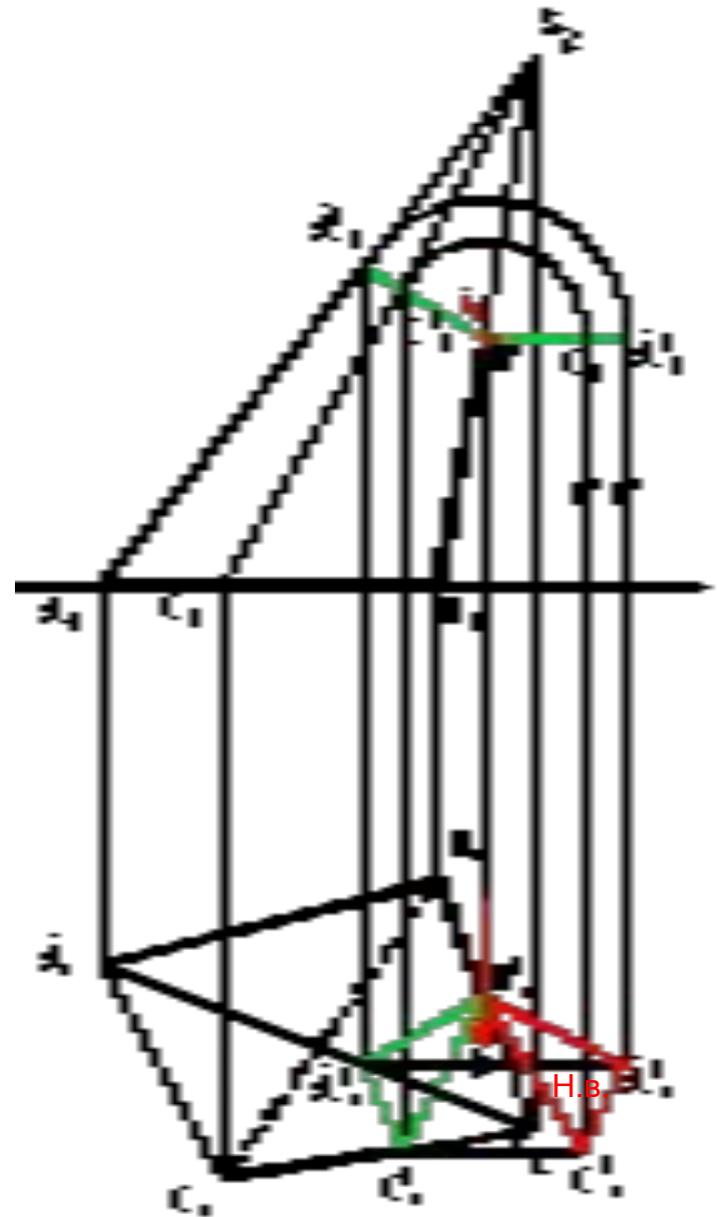
Для определения натуральных величин ребер применим метод вращения вокруг проецирующих осей. **Ось вращения  $j$**  проведем через  $(.) S$  перпендикулярно плоскости  $\Pi_1$ . Развернем ребро  $SA$  в положение, **параллельное** плоскости  $\Pi_2$  и найдем **натуральную величину  $[SA]$** . Т.к.  $(.) A^\circ$  лежит на ребре  $SA$ , она также развернется в новое положение (на  $\Pi_2$  фронтальная проекция  $A^\circ 2$  переместится на своей высоте на **Н.В.  $[SA]$**  )



Вращением вокруг  
 проецирующей оси  $j$   
 определяем натуральные  
 величины ребер  $[SB]$  и  
 $[SC]$ , развернув их в  
 положение,  
 параллельное  $\Pi_2$ .  
 Нижнее основание –  
 $\triangle ABC$  лежит в плоскости  
 проекций  $\Pi_1$  и  
 проецируется на нее в  
 натуральную величину  
 ( $\triangle A_1B_1C_1 = H.V.$ )



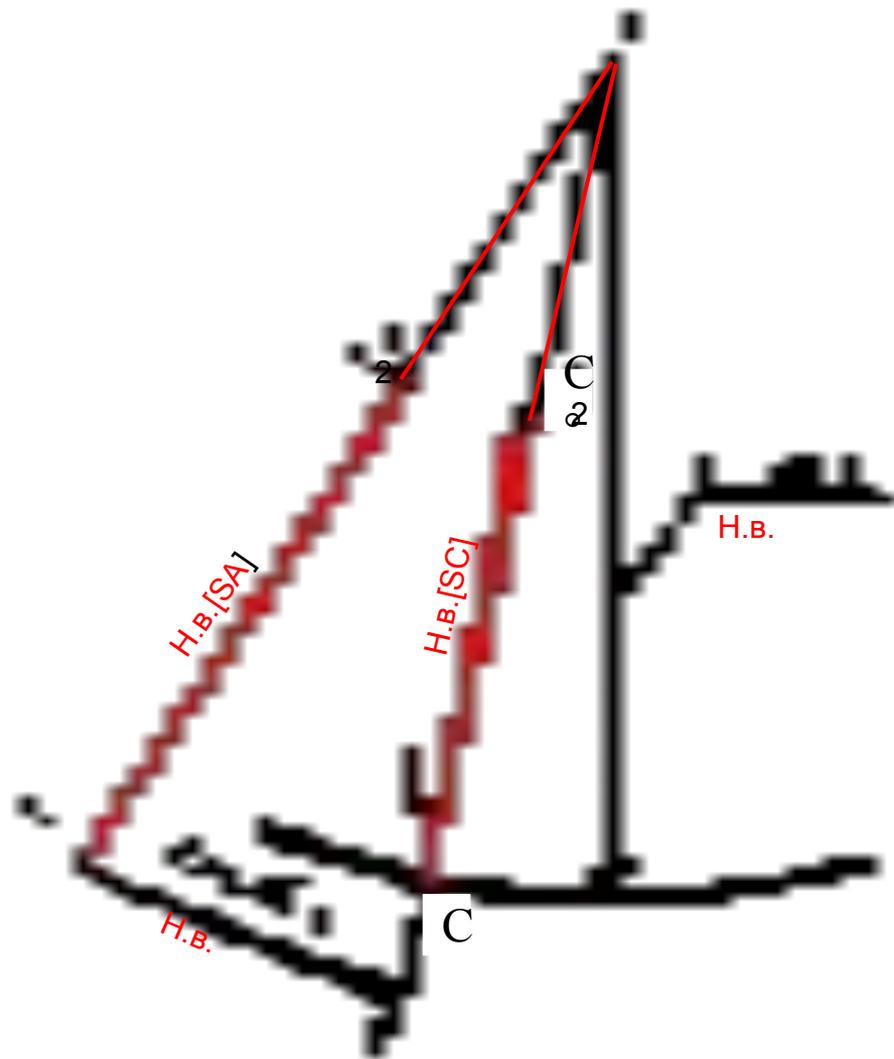
Для определения **натуральной величины** верхнего основания  $\Delta A^\circ B^\circ C^\circ$  применим метод вращения вокруг фронтально-проецирующей оси  $i \perp \Pi_2$ . Т.к. плоскость  $\Delta A^\circ B^\circ C^\circ$  является фронтально-проецирующей, развернем ее фронтальную проекцию  $\Delta A^\circ_2 B^\circ_2 C^\circ_2$  параллельно плоскости  $\Pi_1$  и определим **натуральную величину** верхнего основания –  $\Delta A^\circ_1 B^\circ_1 C^\circ_1 = \text{Н.В.}$



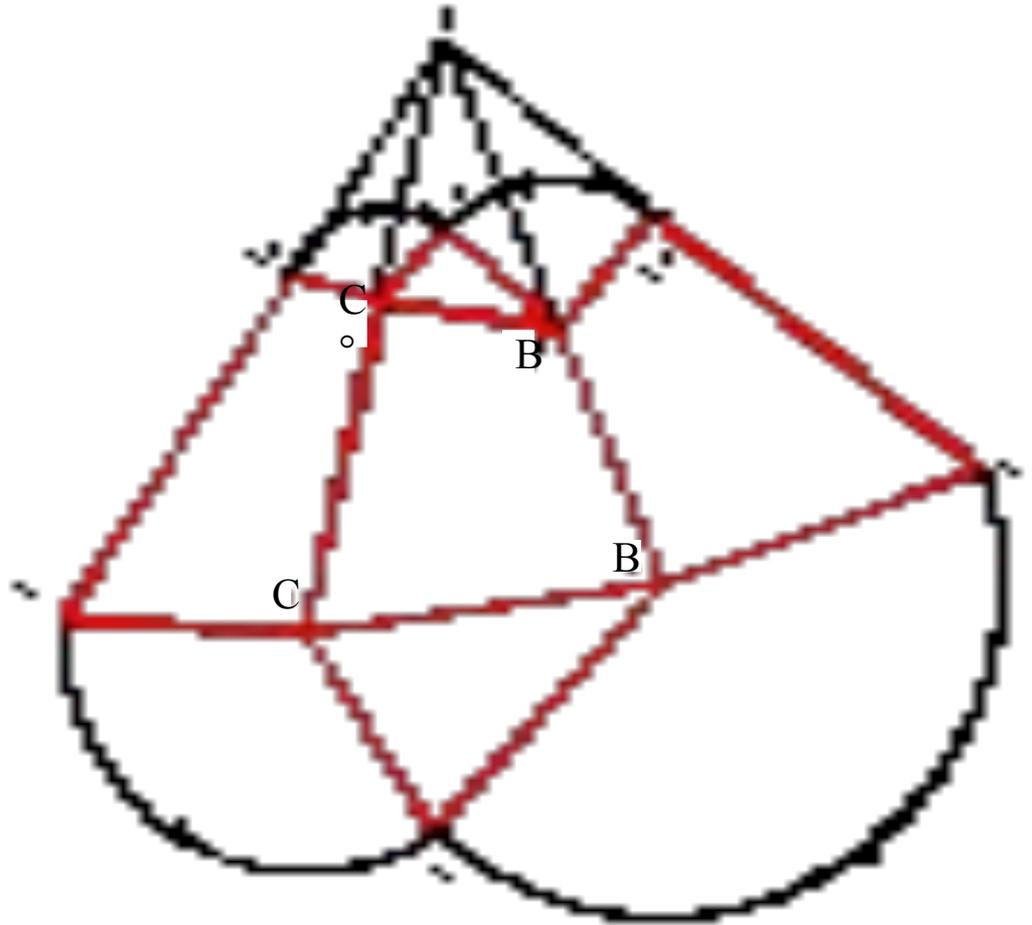
# Порядок построения развертки.

Применим метод триангуляции-  
построение треугольника по  
трем известным сторонам.

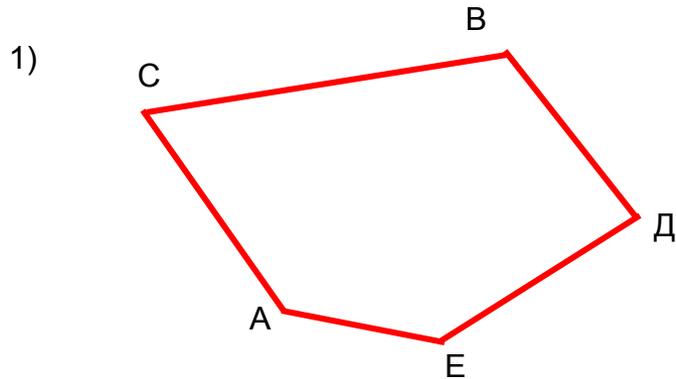
- Проводим линию, равную **н.в. ребра [ SA ]**.
- Откладываем отрезок [ **AA<sub>2</sub><sup>°</sup>** ].
- Определяем положение точки **С** засечками: из вершины **S** радиусом, равным **н.в. ребра [ SC ]**, чертим дугу. Из точки **A** радиусом, равным **н.в. ребра [ AC ]**, чертим дугу.
- В точке пересечения дуг отмечаем (·) **С**.
- На ребре [ **SC** ] откладываем отрезок [ **CC<sub>2</sub><sup>°</sup>** ].



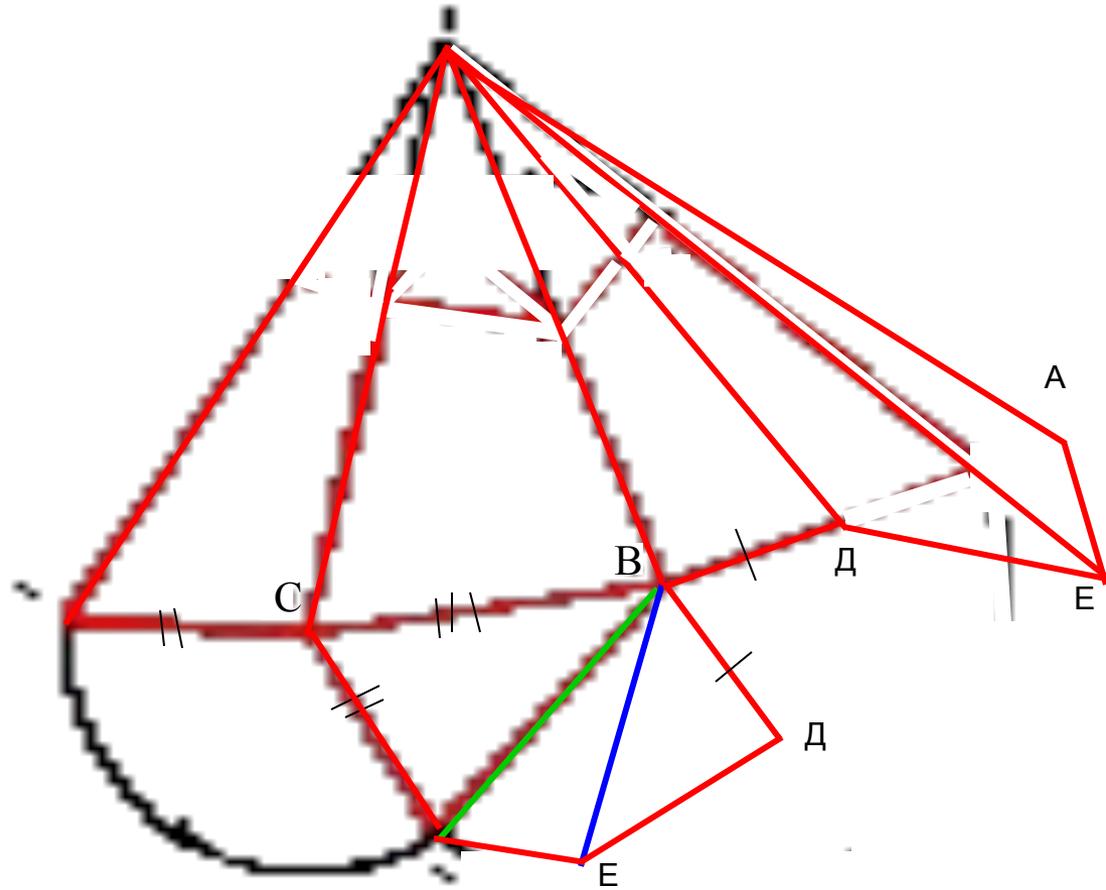
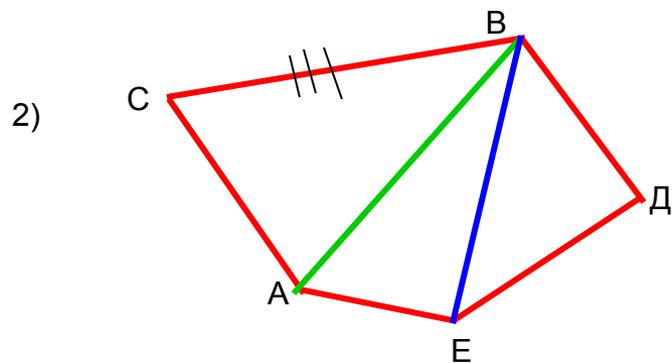
Методом  
триангуляции  
(засечками) строим  
развертку всей  
поверхности  
пирамиды. Затем  
пристраиваем  
верхнее и нижнее  
основания.



Если основание пирамиды имеет больше сторон, например 5,



необходимо разбить его на треугольники:

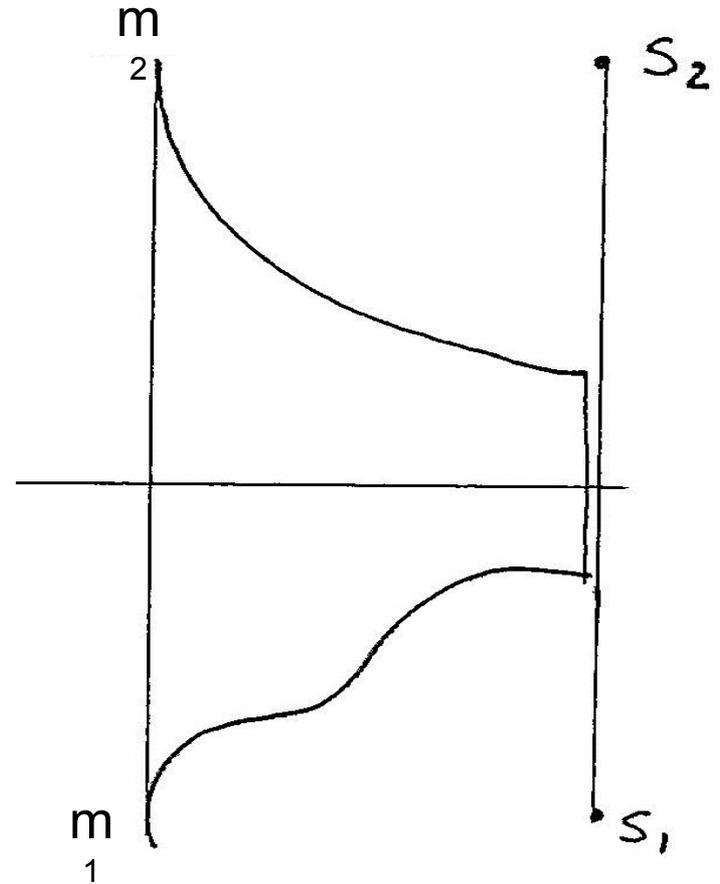
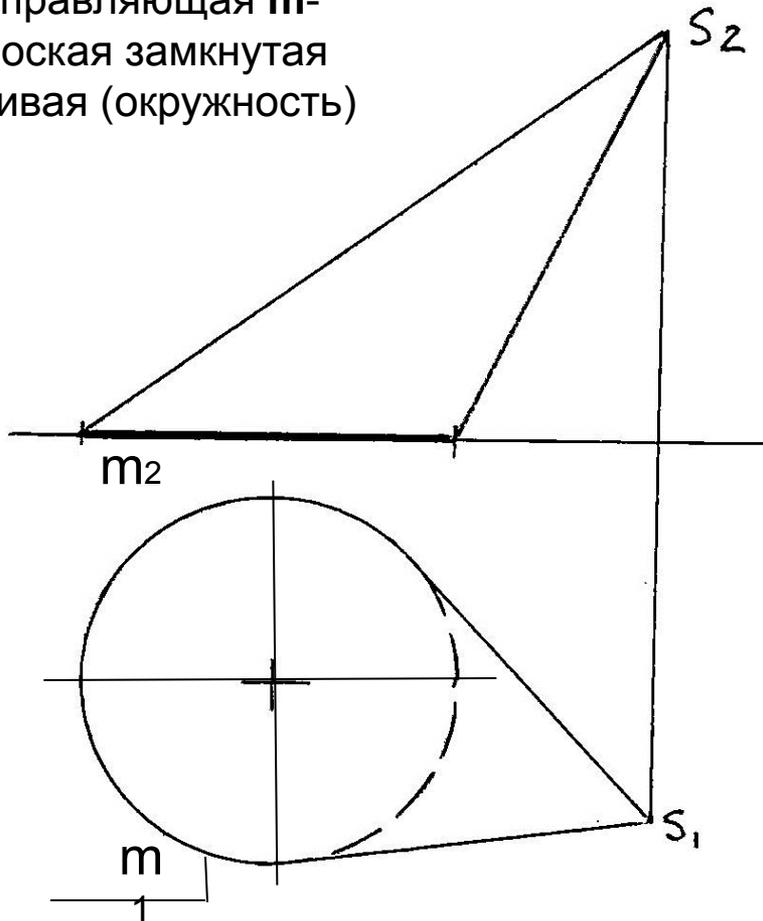


3) Затем перенести на развертку таким образом, чтобы одна сторона основания, например СВ, совпала с отрезком СВ на развертке, а соседний отрезок (АС) совместился при сворачивании развертки в объем. Построение оснований выполняем методом триангуляции.

# Построение развертки конуса

Определитель:

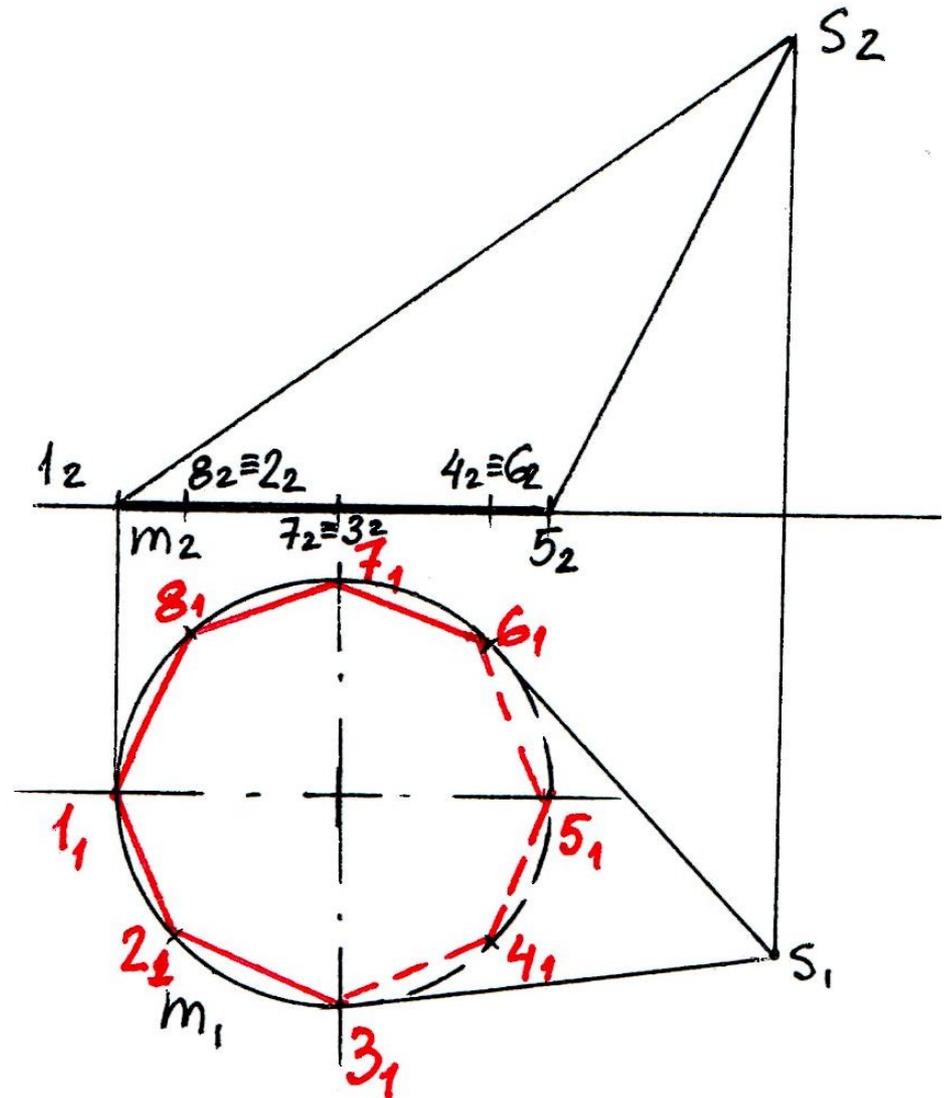
вершина **S** и  
направляющая **m**-  
плоская замкнутая  
кривая (окружность)



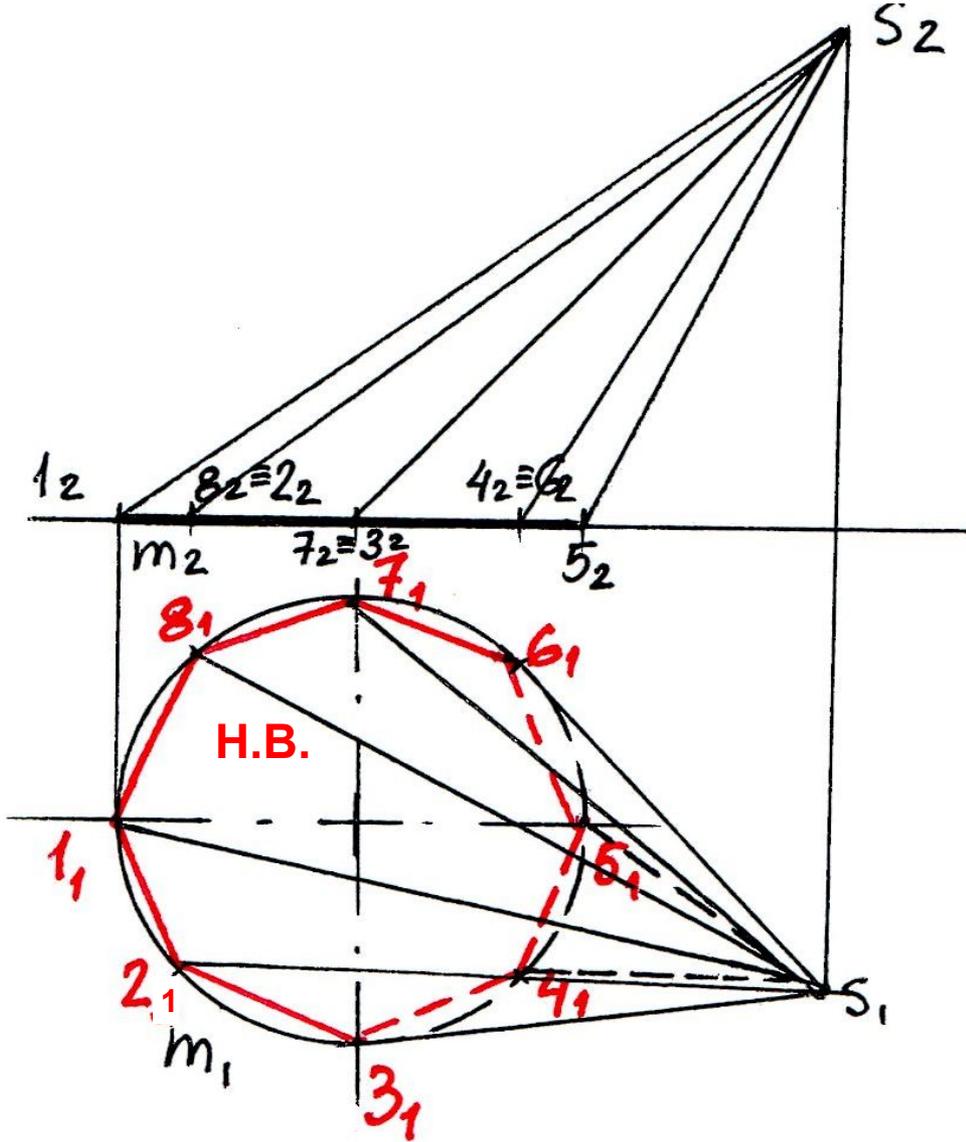
Определитель: вершина **S** и направляющая **m**-  
пространственная незамкнутая кривая

# Построение развертки конуса с плоской кривой направляющей

- Впишем в конус  **$n$** -угольную пирамиду. Для этого основание конуса разделим на  **$n$  частей**. Чем количество  **$n$**  больше, тем развертка точнее.
- Если в основании конуса окружность, то вписываем **правильный  $n$ -угольник**

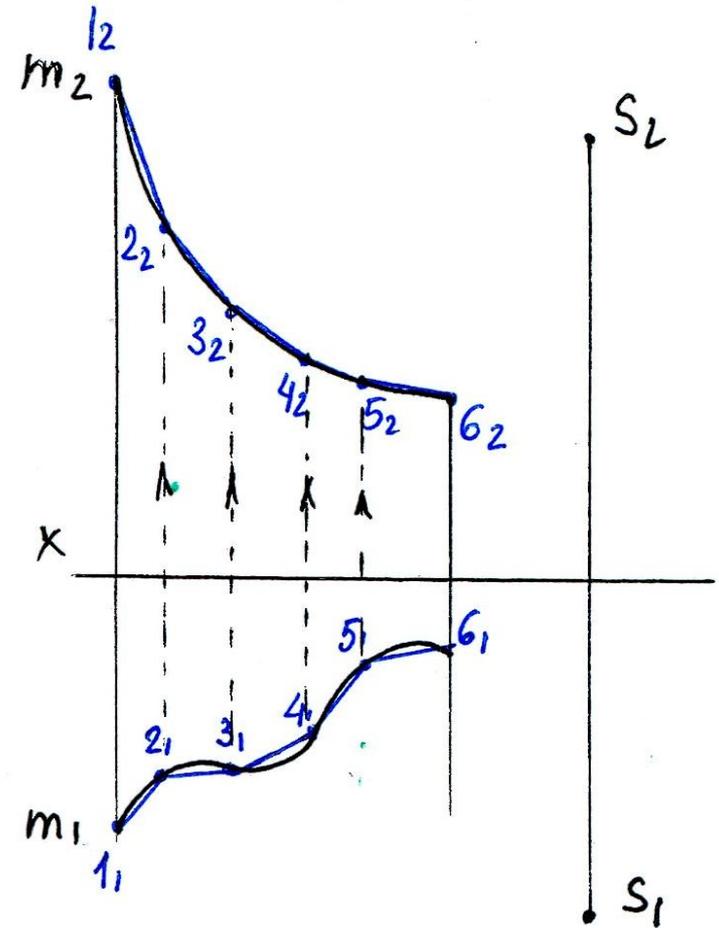


Если основание лежит на П1, то оно проецируется в **натуральную величину**. Остается найти натуральную величину ребер 1-S...8-S и построить развертку (в данном случае восьмиугольной пирамиды)

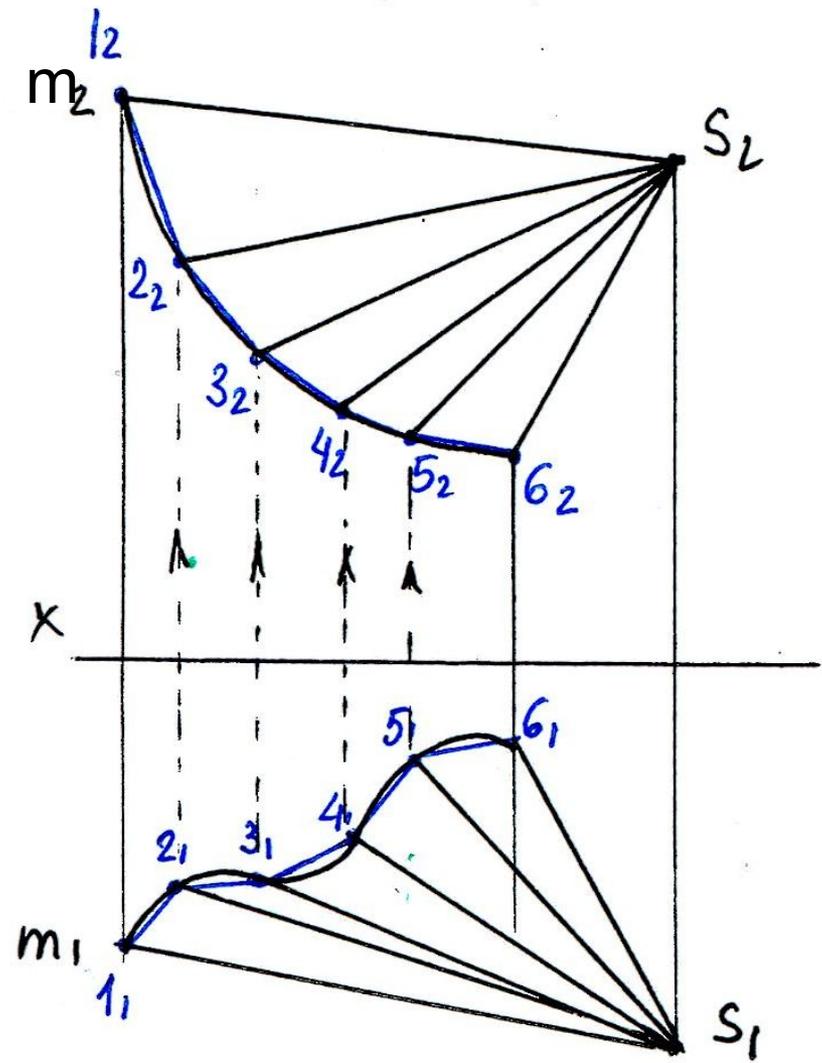


# Построение развертки конуса с пространственной кривой направляющей

- Впишем в конус  $n$ -угольную пирамиду. Для этого направляющую  $m$  разделим на  $n$  частей. Чем количество  $n$  больше, тем развертка точнее.



Зададим образующие  
1-S... 6-S. В данном  
примере все ребра (в  
том числе и 1-2 ...5-6)  
являются прямыми  
общего положения.  
Следовательно, для  
построения развертки  
надо искать  
**натуральные величины**  
всех ребер



Для определения

**натуральных величин**

ребер 1-2, 2-3.... можно использовать метод прямоугольного треугольника.

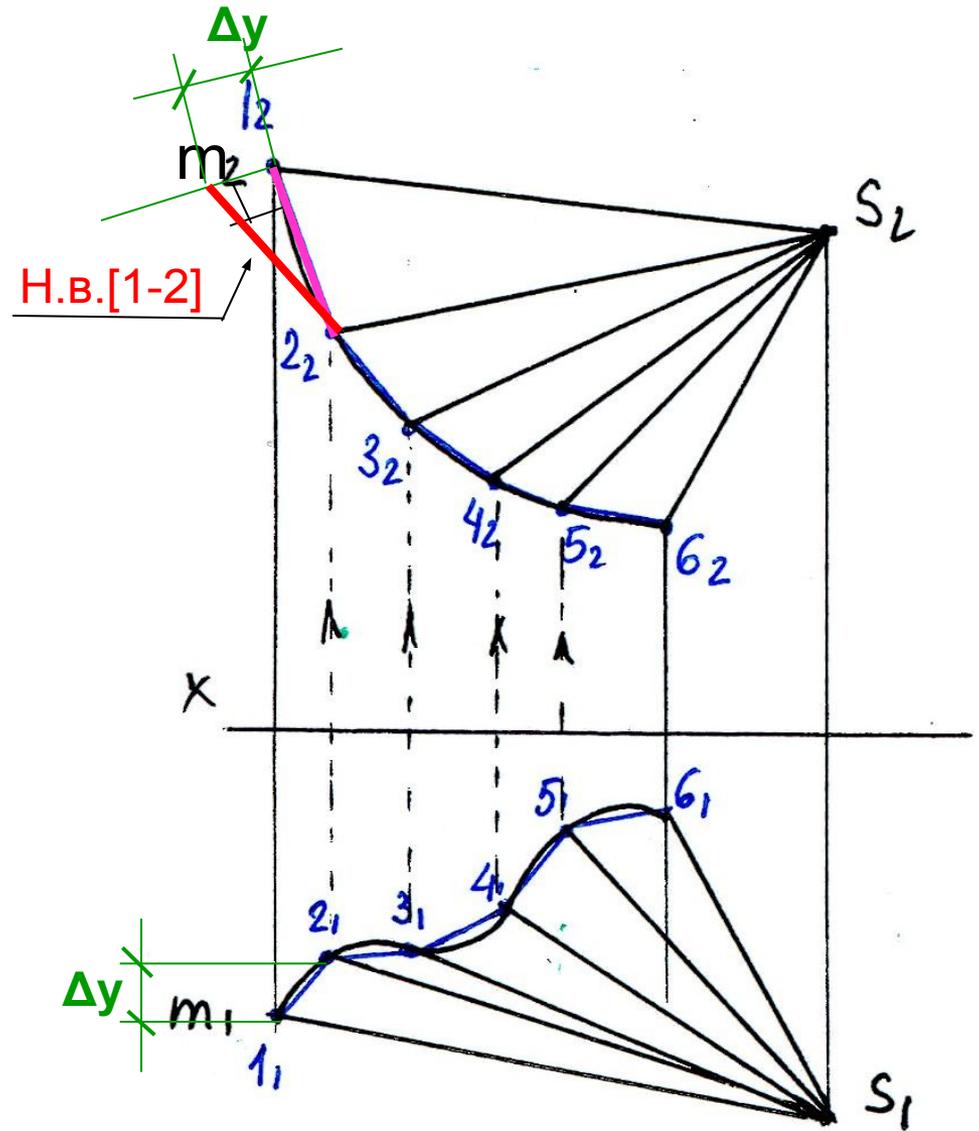
Например, 12-22 **первый катет**,

следовательно с плоскости П1 забираем размер второго катета

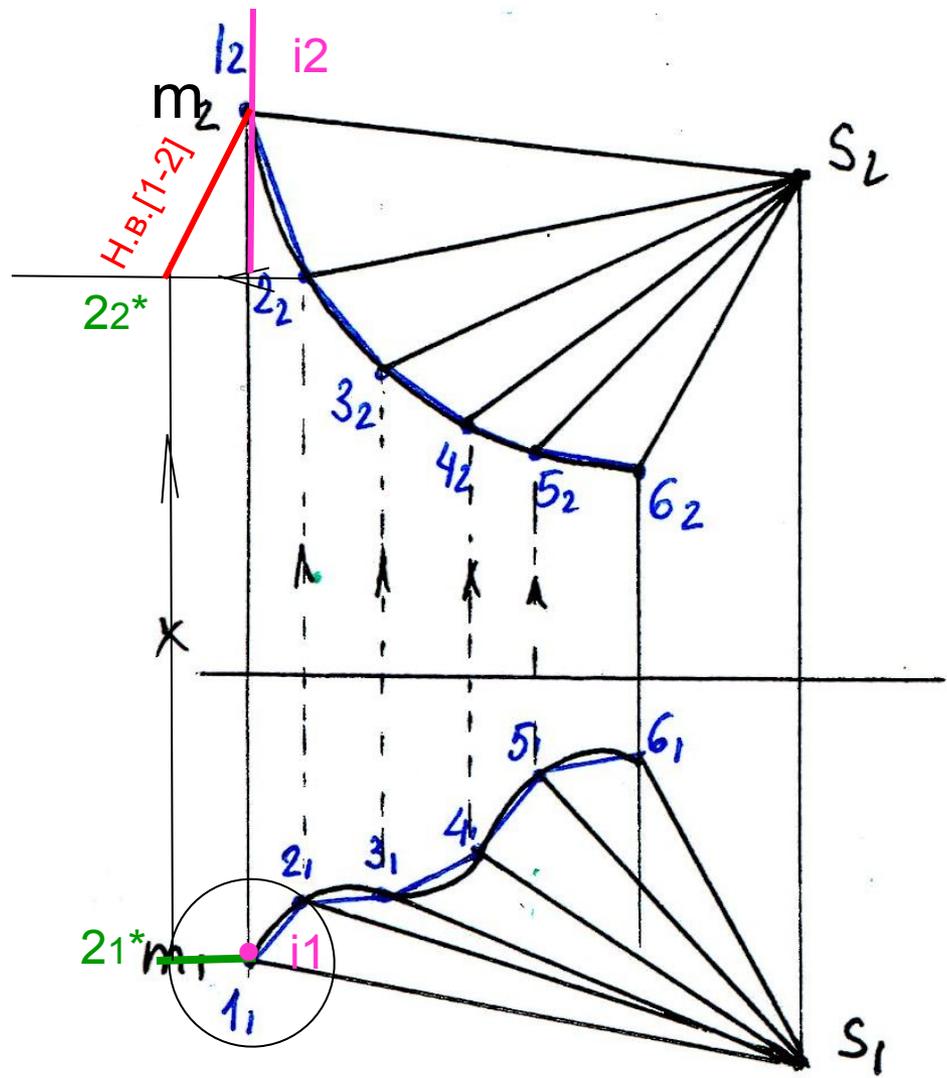
( $\Delta y$ ) и на П2 строим прямоугольный

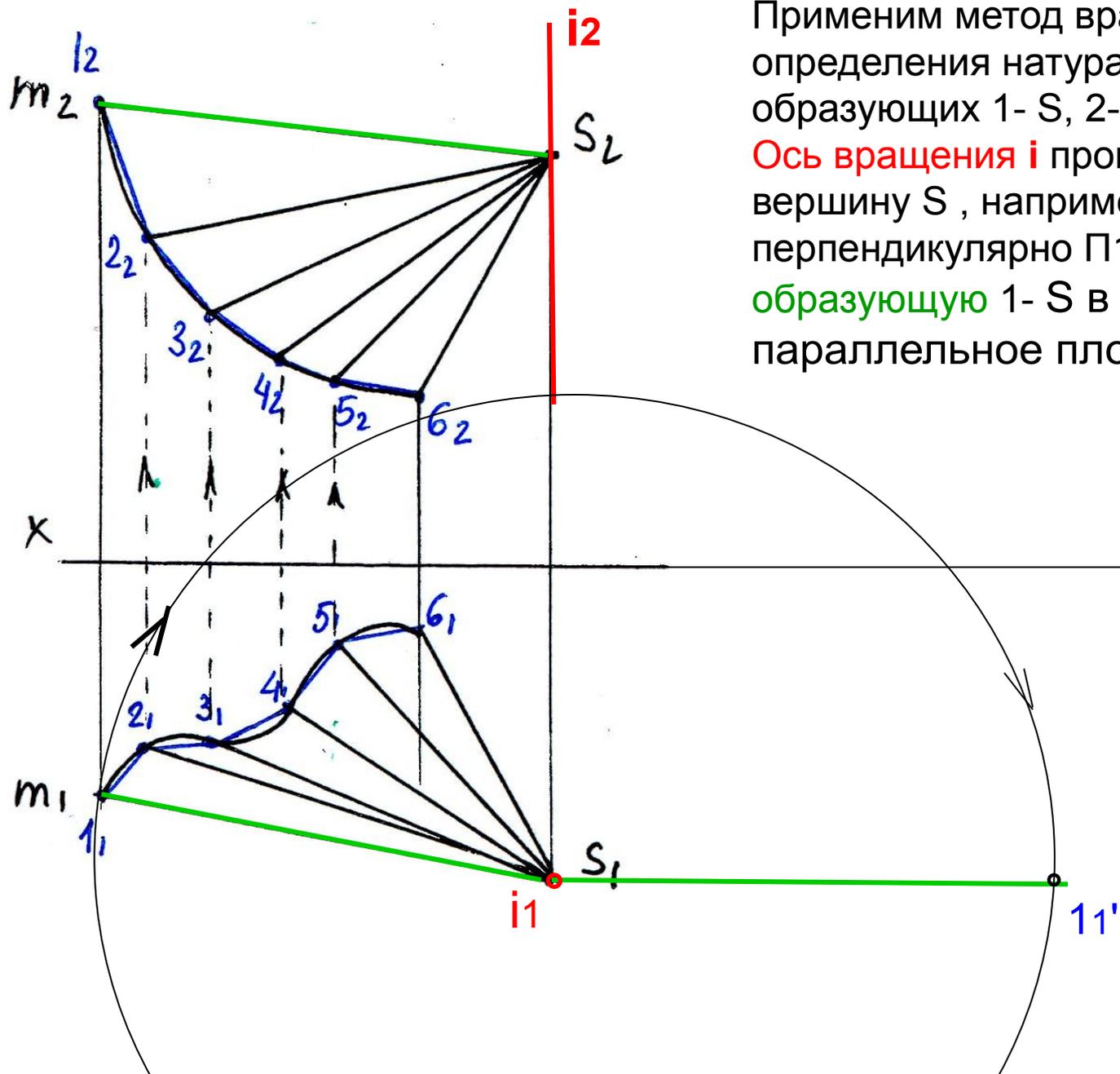
треугольник, гипотенуза которого и является

**натуральной величиной** отрезка прямой 1-2



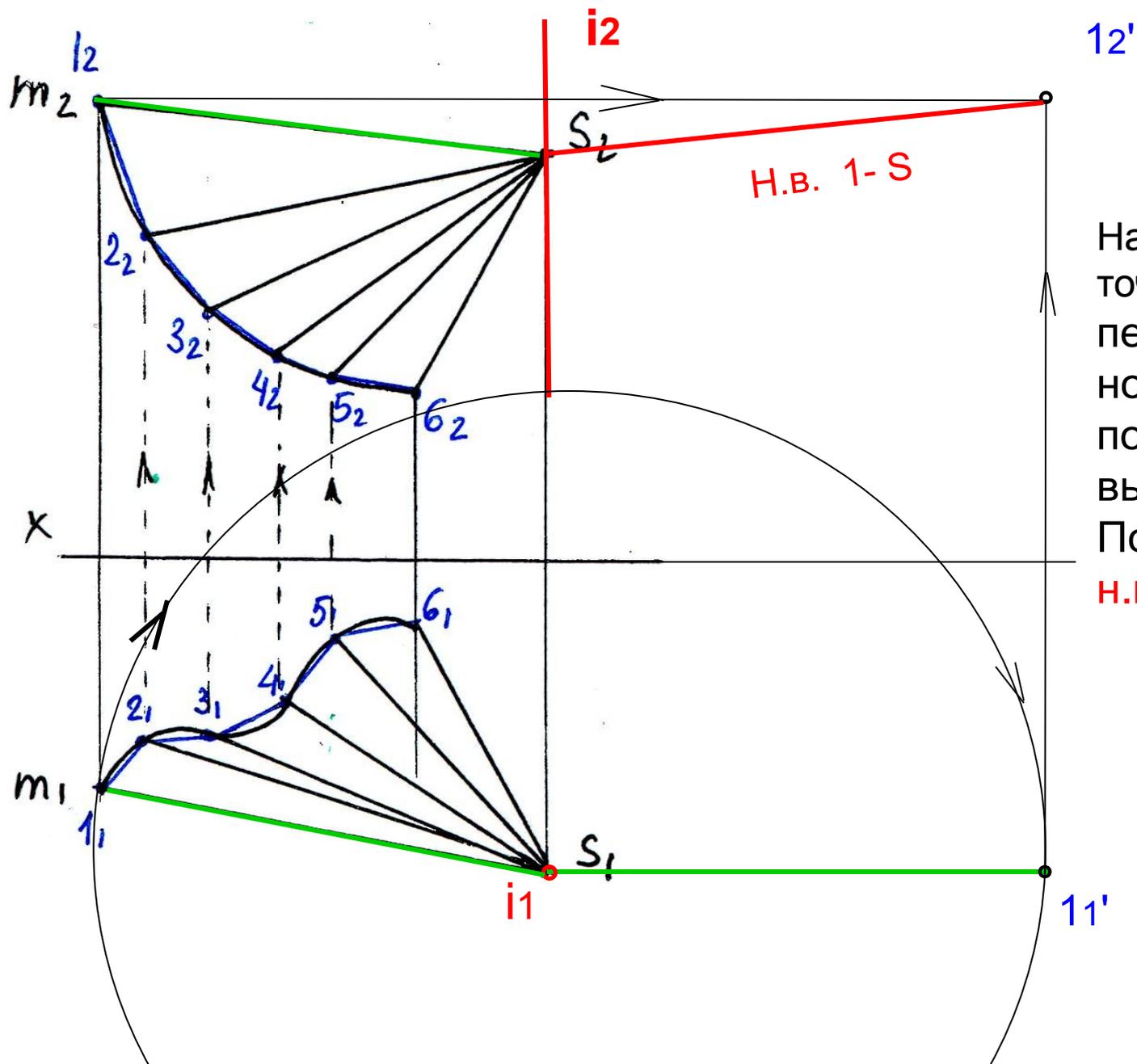
Или другой способ –  
 например, способ  
 вращения вокруг  
 проецирующих осей.  
 Развернем отрезок 1-2  
 вокруг **проецирующей**  
**оси  $i$** , перпендикулярной  
 П1 в положение,  
 параллельное  
 плоскости П2 и  
 определим  
**натуральную величину**  
**1-2** и далее повторим  
 построения с отрезками  
 2-3, 3-4.....



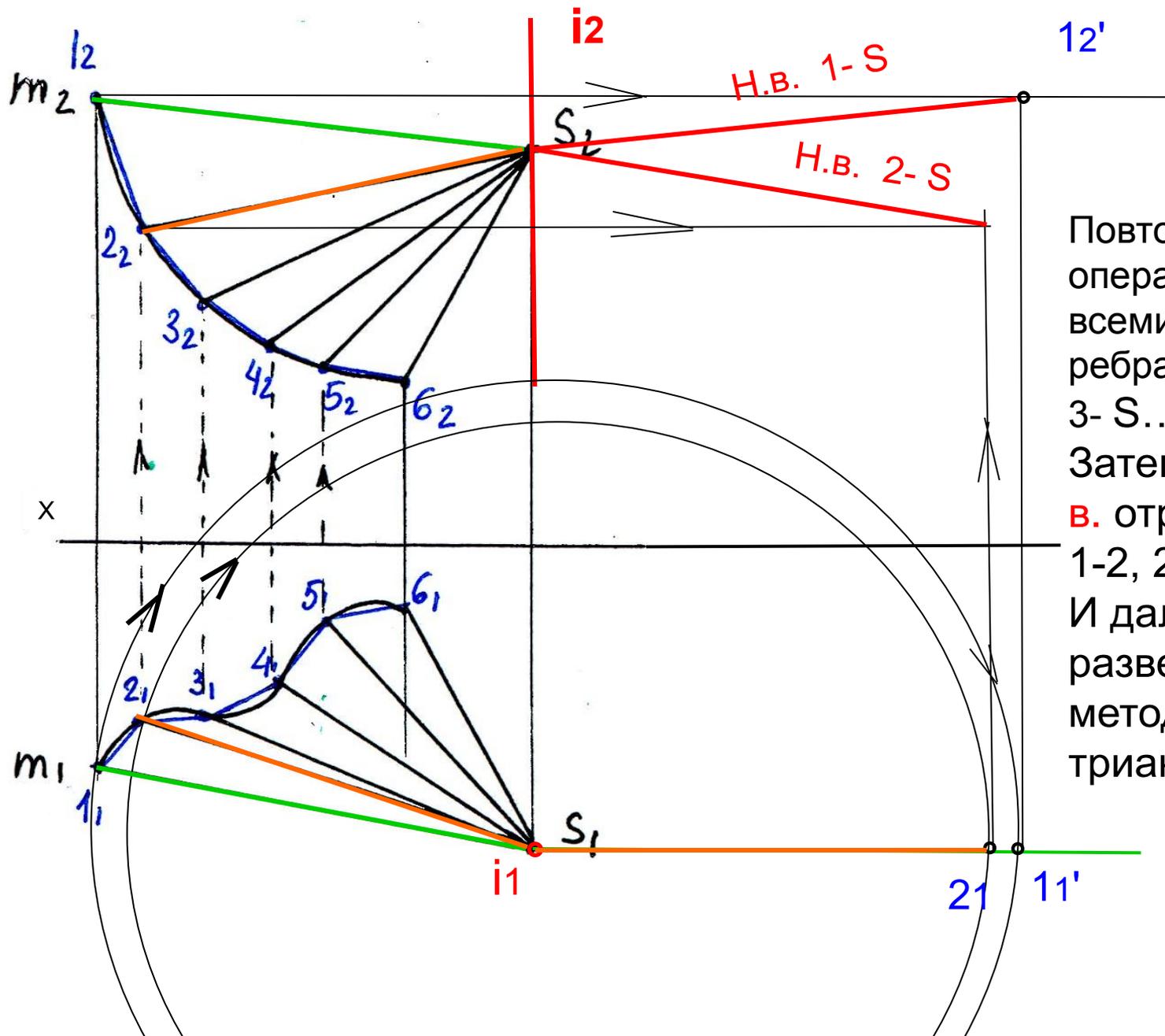


Применим метод вращения для определения натуральных величин образующих 1- S, 2- S, 3- S .....

Ось вращения  $i$  проведем через вершину S, например перпендикулярно П1. Развернем образующую 1- S в положение, параллельное плоскости П2



На П2 проекция  
 точки 12  
 переместиться в  
 новое  
 положение на  
 высоте точки 1.  
 Получим  
 Н.В. 1-S



Повторим операцию со всеми остальными ребрами 2-S, 3-S... 6-S. Затем найдем **Н.В.** отрезков 1-2, 2-3, 3-4..... И далее строим развертку методом триангуляции

## Эпюр 2

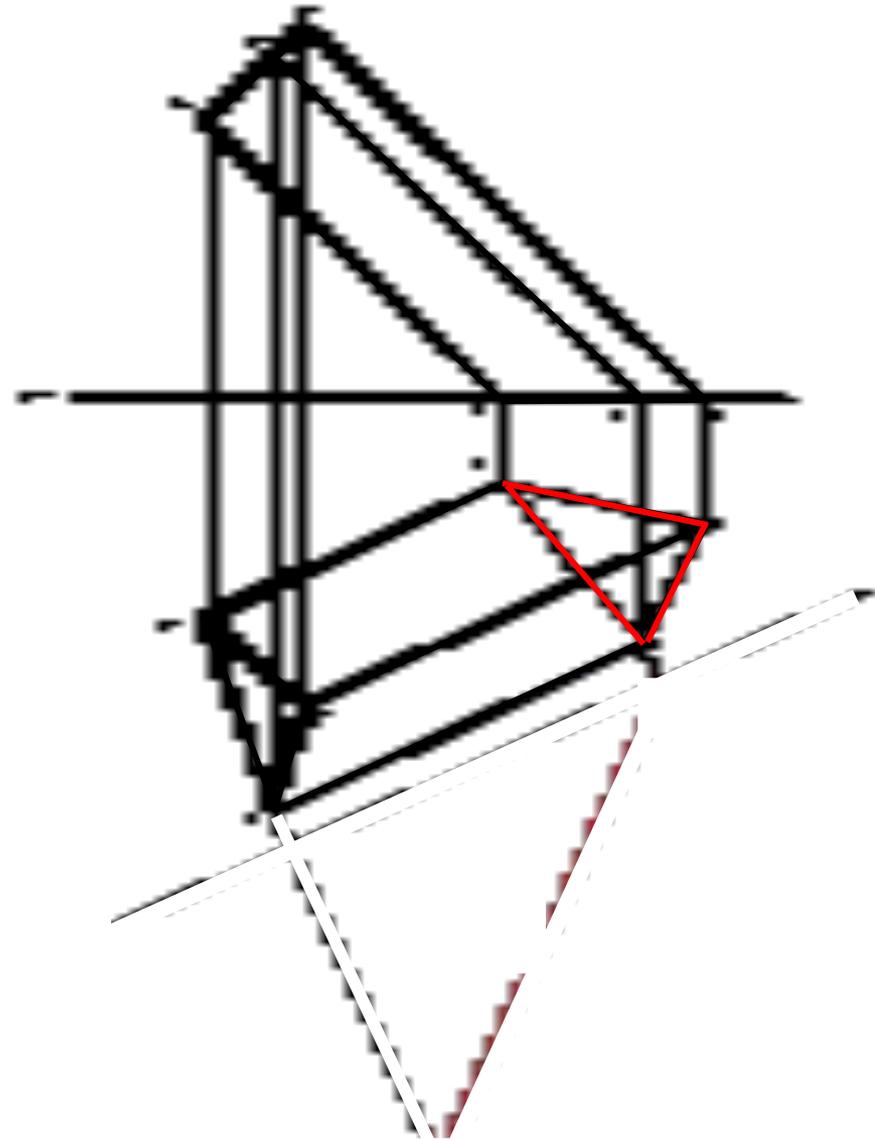
(курсовая работа: лист по теме  
«Поверхности»)

- **Эпюр 2:** На листе формата А3 самостоятельно задать чертеж (фасад и план) **усечённой поверхности** пирамиды (основание-многоугольник: 4 и более сторон) **или** конуса. Построить развертку.

# Построение развертки призмы

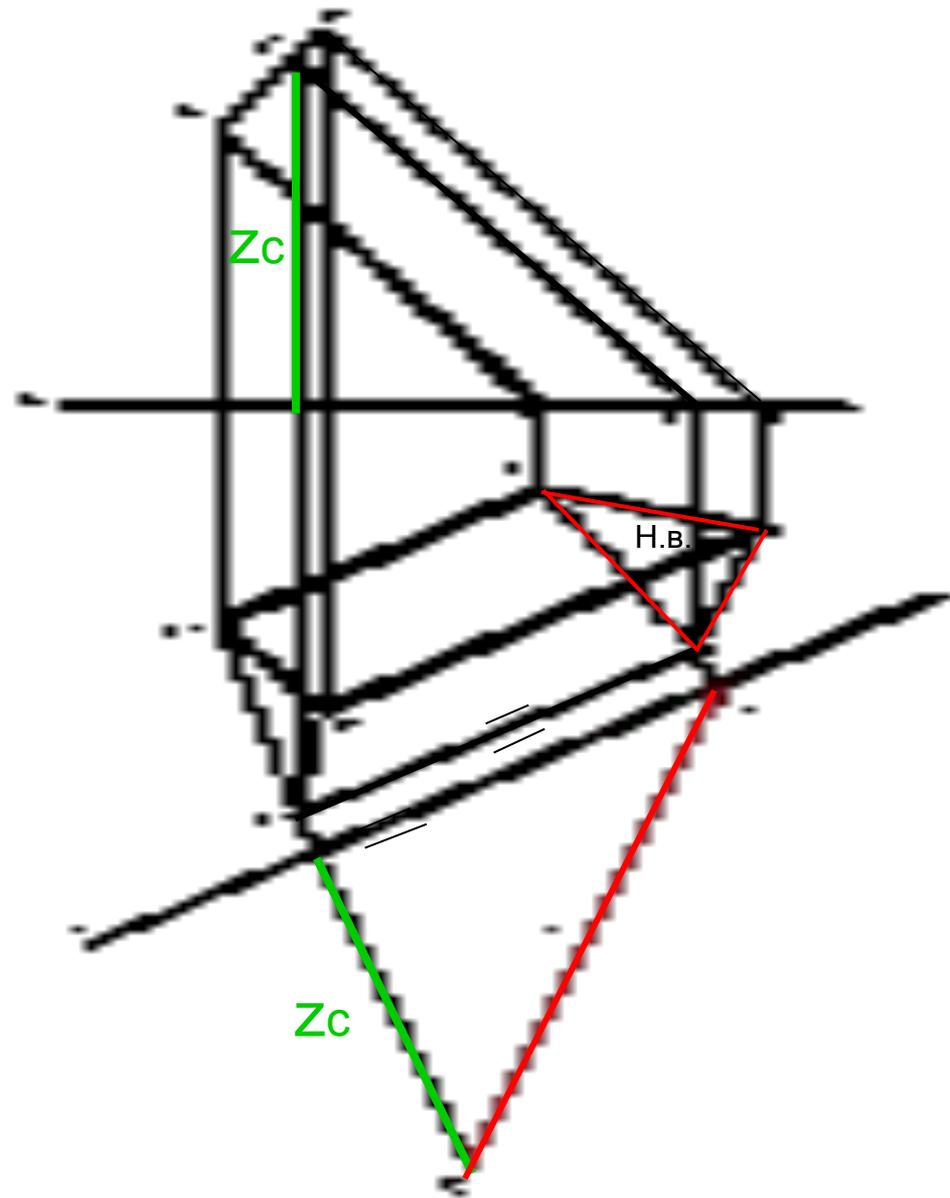
**Задача:** Построить развертку наклонной призмы с основанием  $\triangle ABC$

**Решение:**  $\triangle ABC$  основания призмы расположен в плоскости  $\Pi_1$ , поэтому проекция  $\triangle A_1B_1C_1$  является **натуральной величиной**



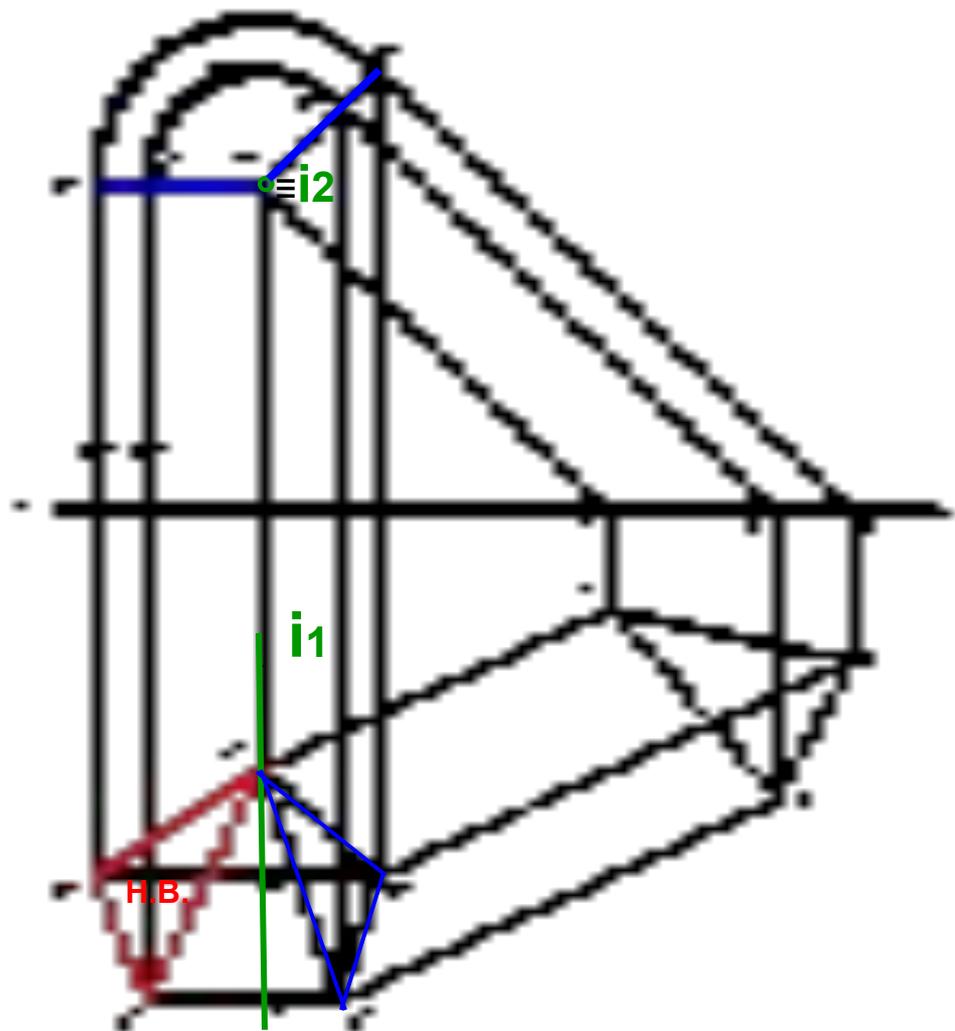
Наклонные ребра призмы – параллельные прямые общего положения. Целесообразно применить метод замены плоскостей проекций для определения **натуральной величины** этих прямых.

Достаточно заменить плоскость П2 на новую П4, параллельную наклонным ребрам, и они все отразятся на нее в натуральную величину. Новая ось  $X_{1,4} \parallel C_1C_1^\circ$ . Начнем с ребра  $CC^\circ$   
 $[C_4C_4^\circ] = \text{н.в.} [CC^\circ]$ .

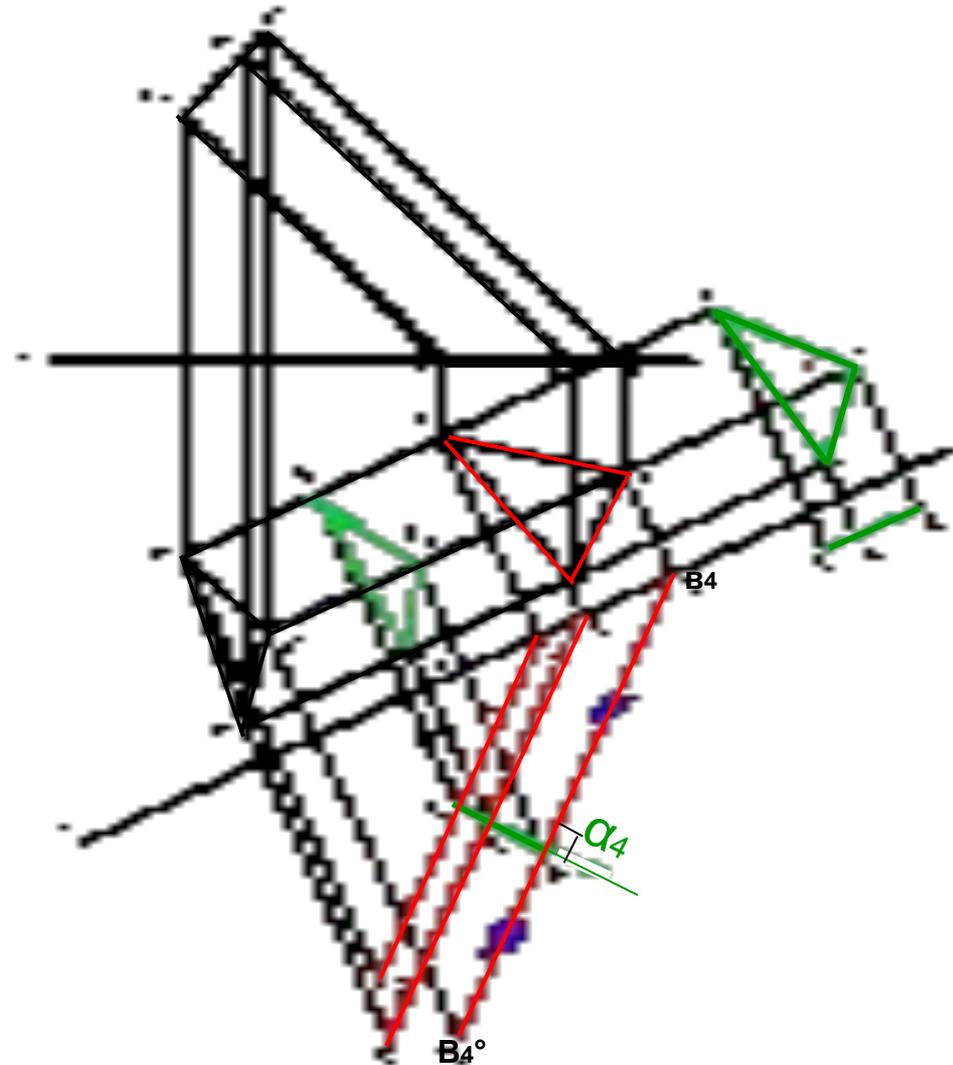




Т.к. **верхнее основание** является фронтально-проецирующим, используем для нахождения натуральной величины метод вращения вокруг фронтально-проецирующей оси  $i$ , проходящей через  $(.)A$  ( $i_2 \equiv A_2^\circ$ ). Развернем  $-A_2^\circ B_2^\circ C_2^\circ$  в положение, параллельное плоскости  $\Pi_1$  (на чертеже параллельно оси  $X_{1,2}$ ). На  $\Pi_1$  получим **натуральную величину**  $\triangle A^\circ B^\circ C^\circ$  ( $\triangle A_1^\circ B_1^\circ C_1^\circ$ ).



Далее используем метод  
 нормального (перпендикулярного)  
 сечения, т.к. наклонные ребра  
 расположены к основанию  $\triangle ABC$   
 под углом, величина которого  
 неизвестна. Зададим в любом  
 месте на  $\Pi_4$  срез плоскостью  $\alpha_4$ ,  
 перпендикулярно н.в. наклонных  
 ребер (142434). Методом плоско -  
 параллельного перемещения  
 определим натуральную величину  
 нормального сечения  $\triangle 1'2'3'$ . Для  
 чего переместим  $142434 \parallel X_{1,4}$  и по  
 линиям связи найдем проекции  
 точек на  $\Pi_1$ :  $\triangle 1_1'2_1'3_1' =$  н.в.  
 нормального сечения



# Порядок построения развертки.

- Развернем в линию  
натуральную величину  
нормального сечения

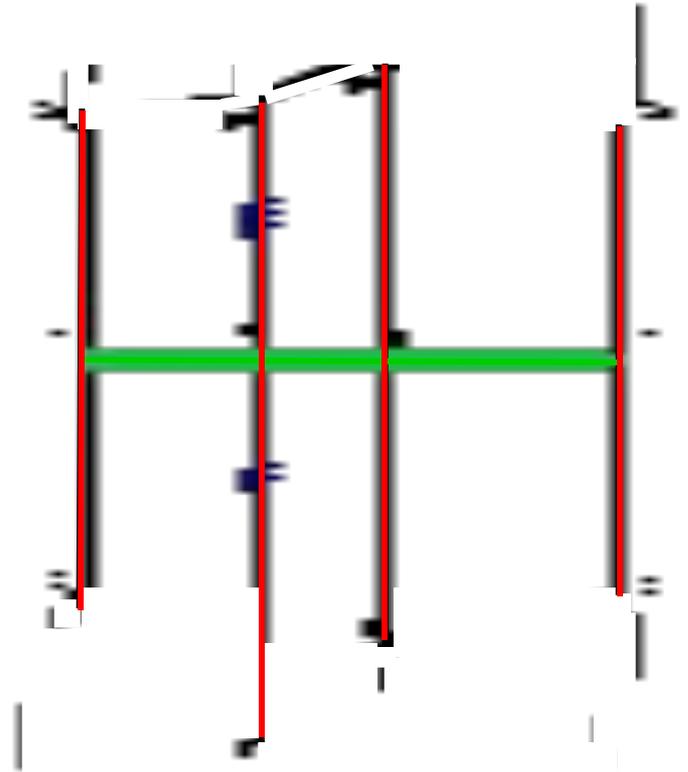
На горизонтальной линии  
откладываем отрезки  
[ 1'-2' ], [ 2'-3' ], [ 3'-1' ].



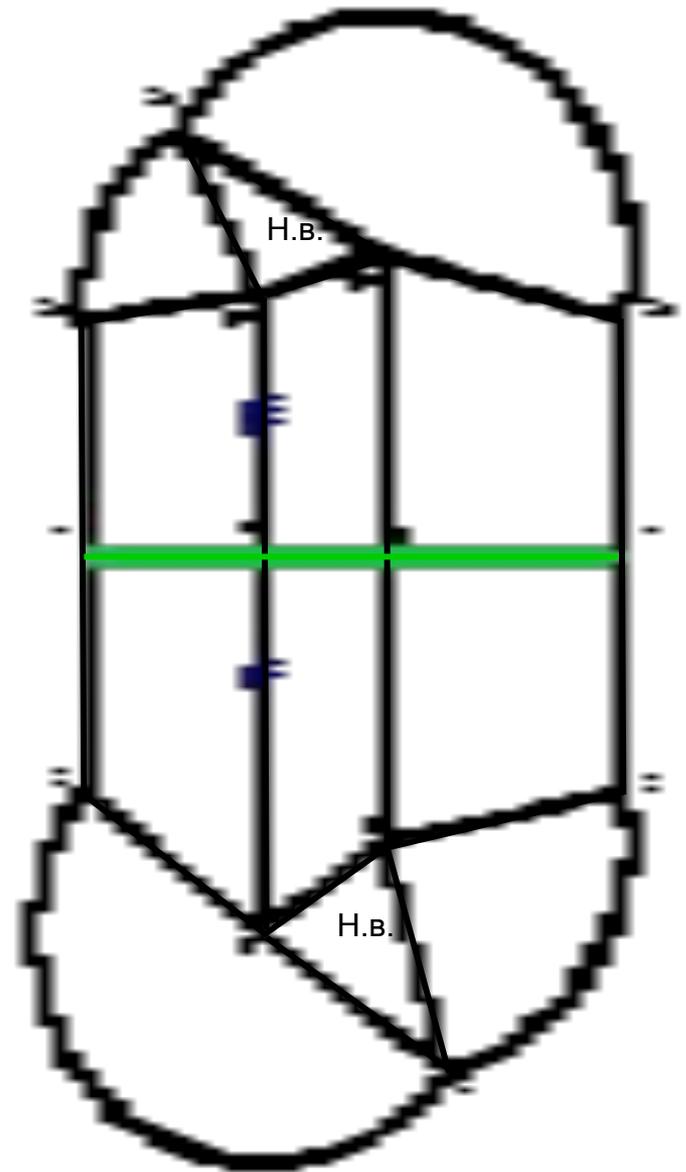
Через отмеченные точки проводим линии, перпендикулярные отрезкам и откладываем на них **натуральные величины** наклонных ребер призмы.

Вниз от нормального сечения откладываем отрезки [  $1_4A_4$  ], [  $2_4B_4$  ], [  $3_4C_4$  ].

Вверх от нормального сечения откладываем отрезки [  $1_4A_4^\circ$  ], [  $2_4B_4^\circ$  ], [  $3_4C_4^\circ$  ], измеряя данные отрезки на П4

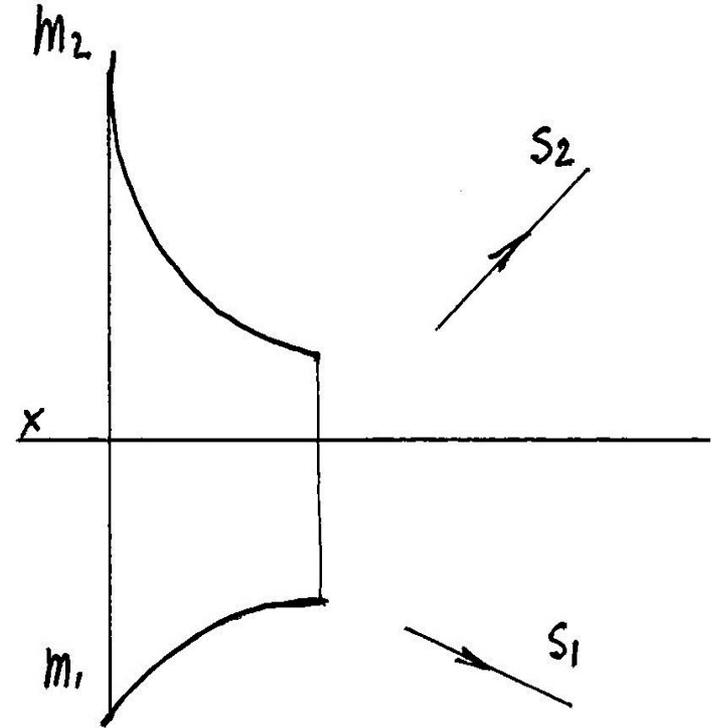
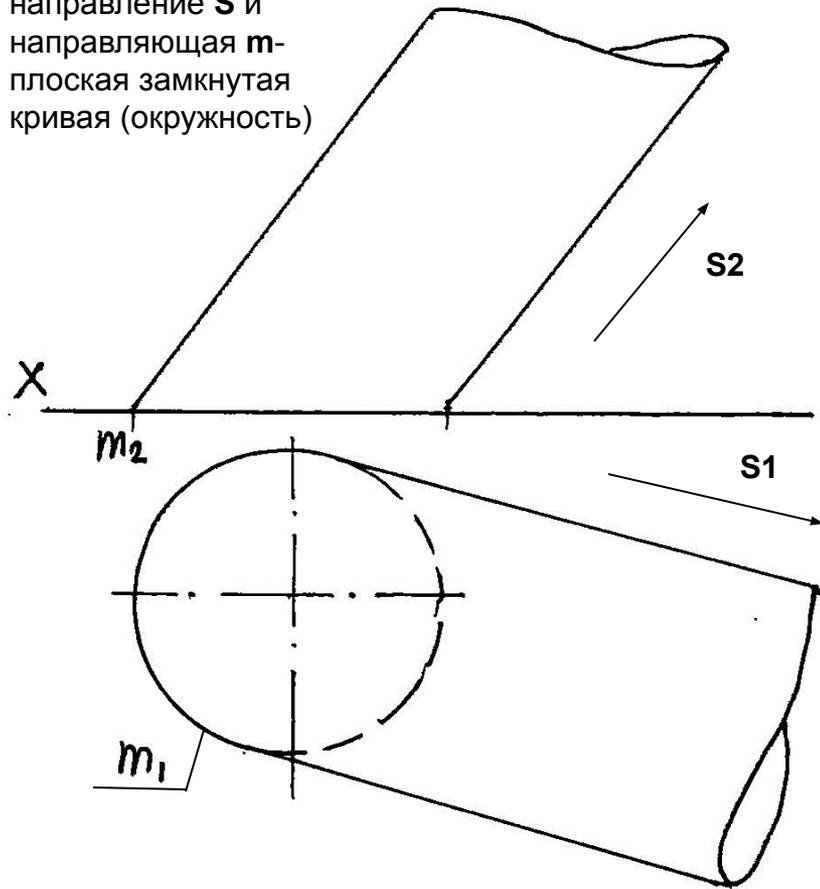


Получим развертку боковых граней призмы. С помощью засечек строим верхнее и нижнее основания призмы, измеряя **натуральные величины оснований** на П1



# Построение развертки цилиндра

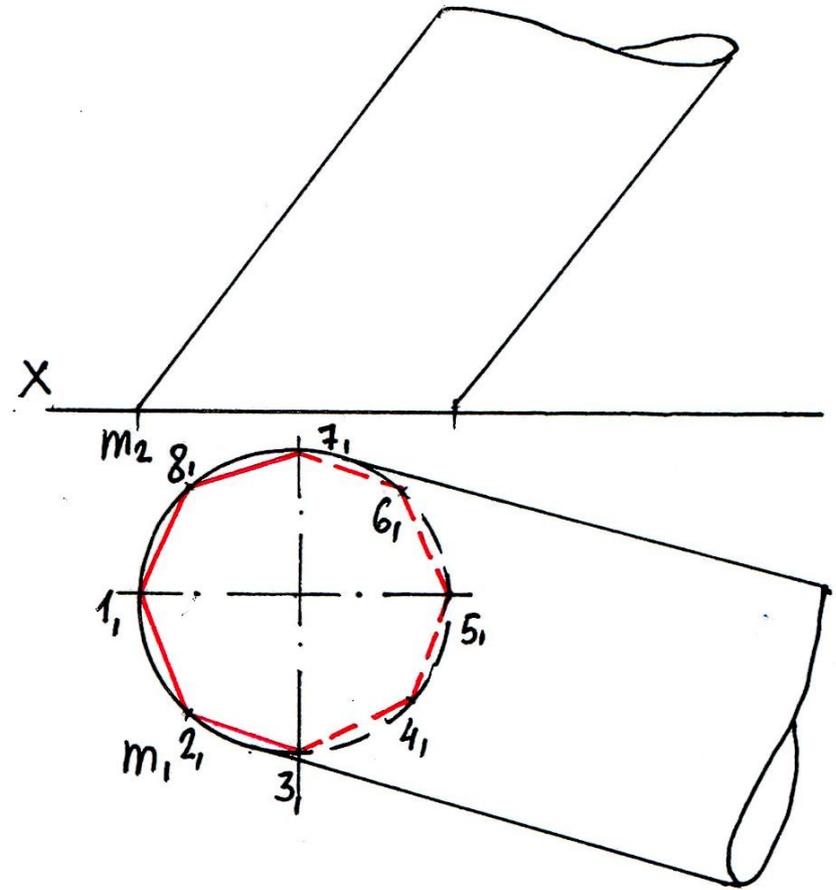
Определитель:  
направление  $S$  и  
направляющая  $m$ -  
плоская замкнутая  
кривая (окружность)



Определитель: направление  $S$  и направляющая  $m$ -  
пространственная не замкнутая кривая

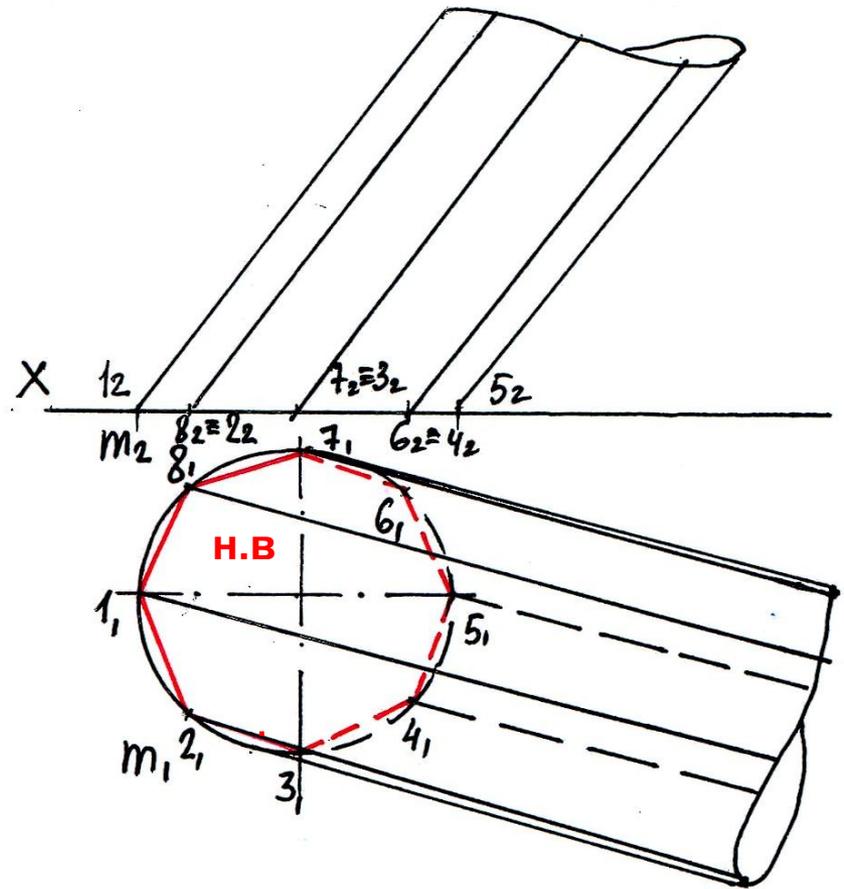
# Построение развертки цилиндра с плоской кривой направляющей

- Впишем в цилиндр  $n$ -угольную призму. Для этого основание цилиндра разделим на  $n$  частей. Чем количество  $n$  больше, тем развертка точнее.
- Если в основании цилиндра окружность, то вписываем **правильный  $n$ -угольник**



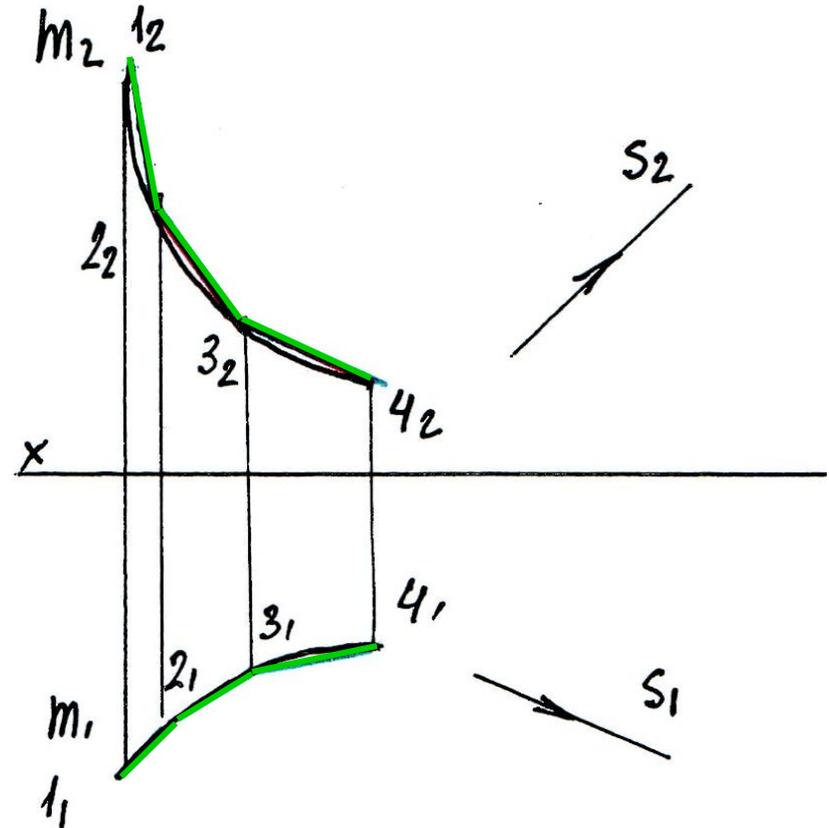
Если основание лежит на  $\Pi_1$ , то оно проецируется в **натуральную величину**. Ребра вписанной в цилиндр призмы необходимо ограничить, т.е. задать верхний срез.

Остается найти **натуральные величины** верхнего основания и ребер 1-8 и построить развертку (в данном случае восьмиугольной призмы).



# Построение развертки цилиндра с пространственной кривой направляющей

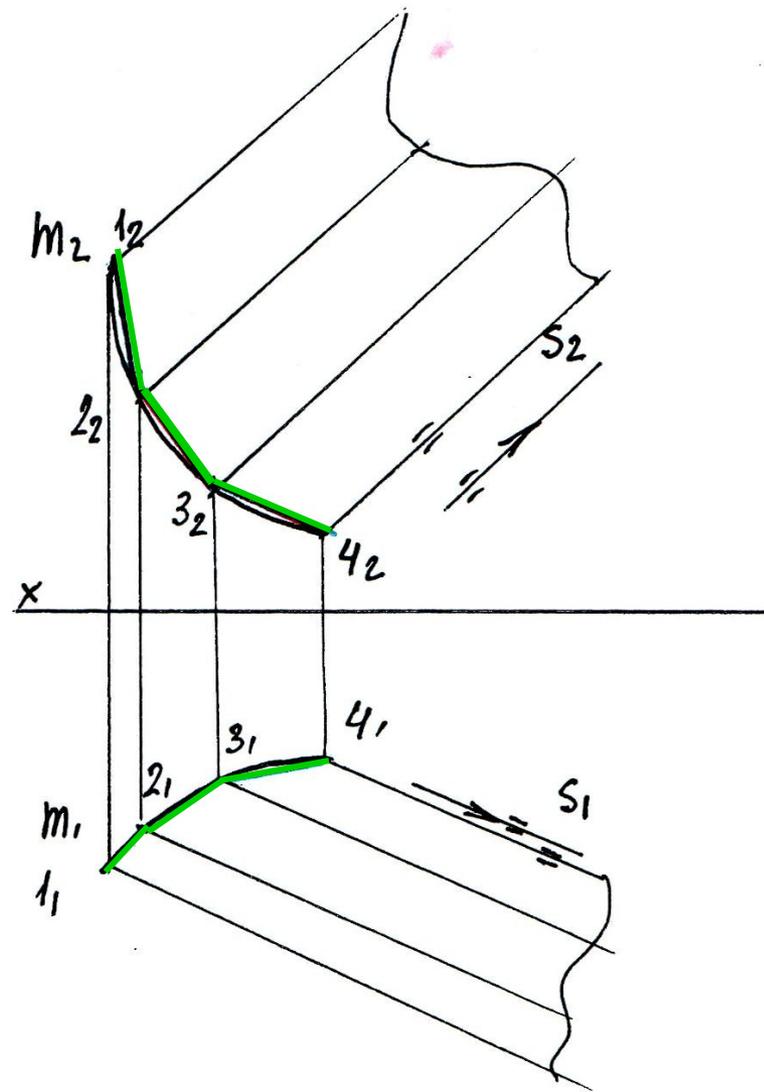
- Направляющая может быть замкнутой или разомкнутой
- Впишем в цилиндр  $n$ -угольную призму. Для этого направляющую  $m$  разделим на  $n$  частей. Чем количество  $n$  больше, тем развертка точнее.



Зададим образующие 1...4  
параллельно  
направлению  $S$ . В  
данном примере все  
образующие являются  
прямыми общего  
положения.

Следовательно, для  
построения развертки  
надо искать

**натуральные величины**  
всех образующих (их  
необходимо ограничить,  
т.е. задать верхний срез  
по цилиндру) и отрезков  
направляющей 1-2, 2-3  
и 3-4, используя методы  
преобразования  
плоскостей проекций  
(см. развертку призмы)



## Эпюр 3

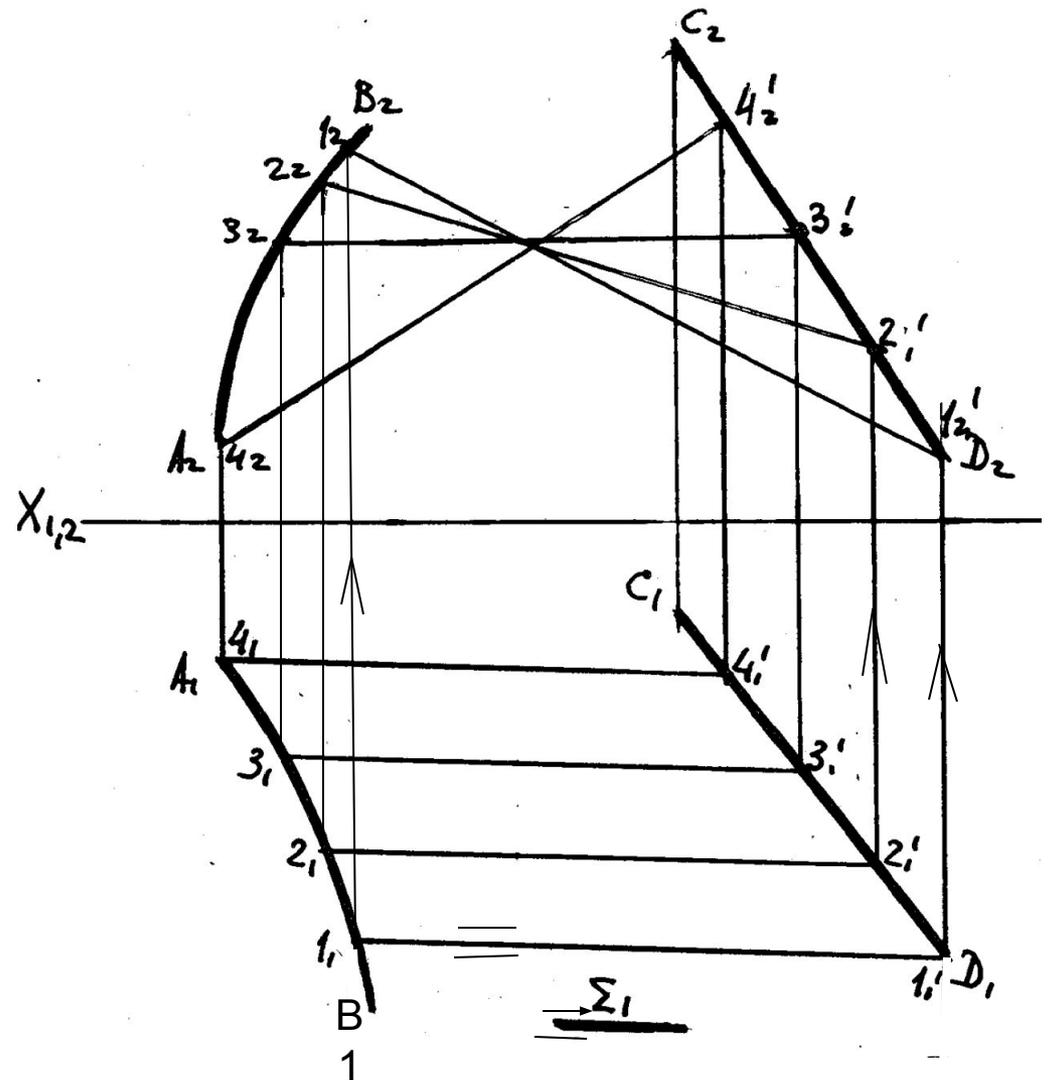
(курсовая работа: лист по теме  
«Поверхности»)

- **Эпюр 3**: На листе формата А3 самостоятельно задать чертеж (фасад и план) **усечённой поверхности** призмы (основание: многоугольник 4 и более сторон) **или** цилиндра. Построить развертку.

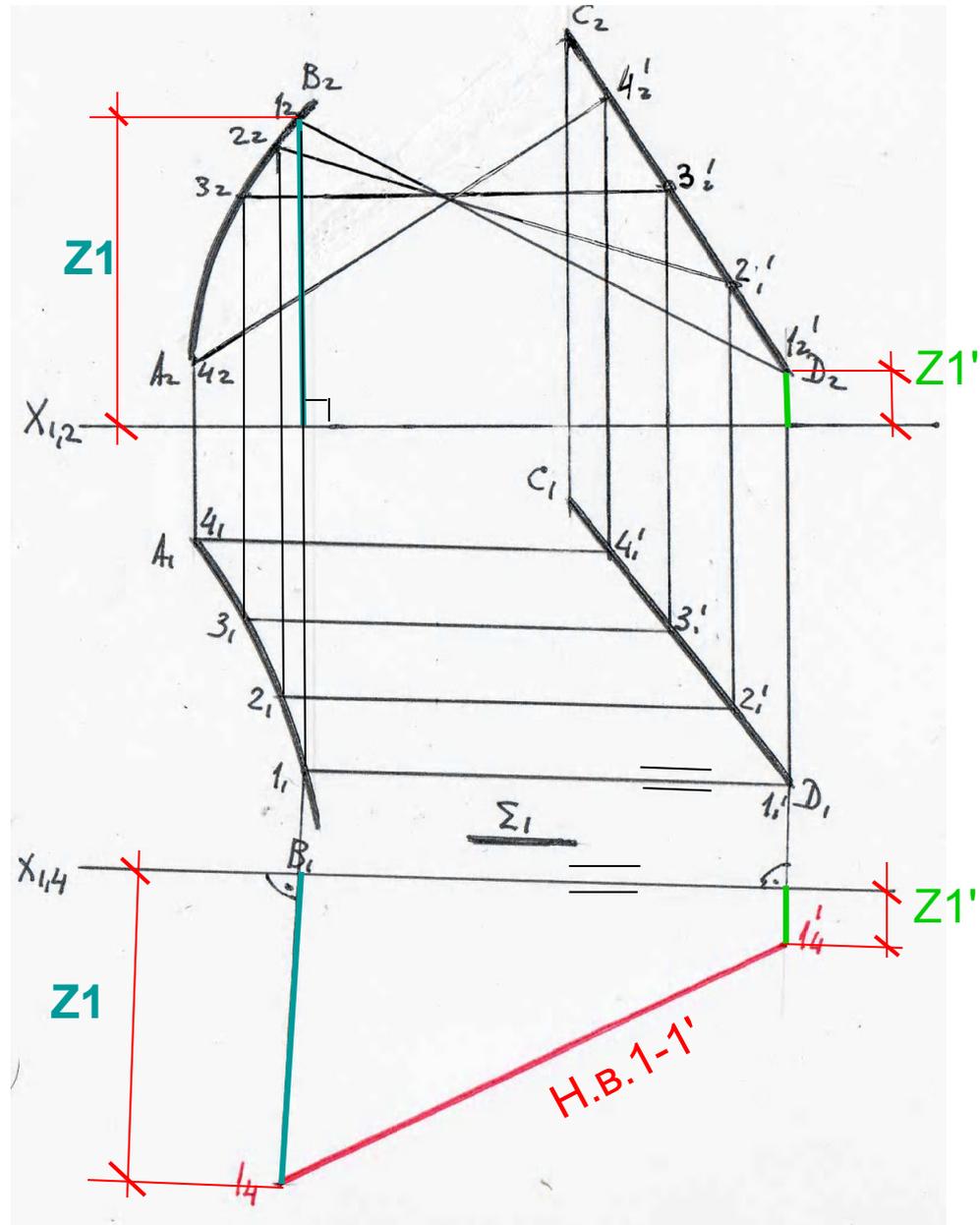
# Построение развертки поверхности Каталана (коноида)

Для построения развертки поверхности Косоида необходимо найти натуральные величины всех его элементов: образующих и направляющих.

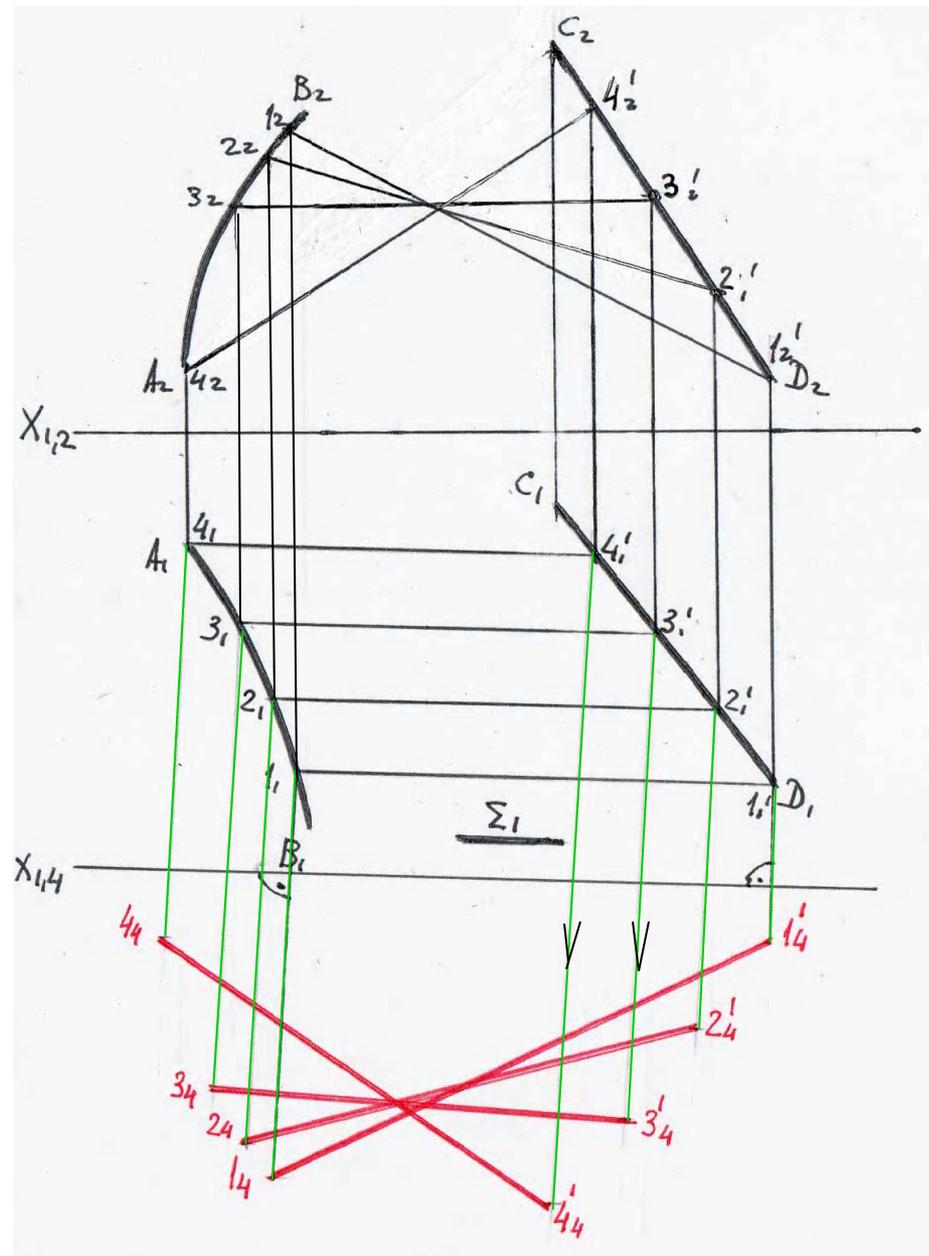
Зададим несколько отсеков поверхности, взяв их между соседними образующими.



Т.к. образующие 1-1', 2-2', 3-3' и 4-4' расположены параллельно плоскости  $\Sigma_1$ , их **натуральную величину** следует искать методом замены плоскостей проекций. Заменяем плоскость П2 на новую П4  $\parallel \Sigma_1$  (на чертеже новая ось  $X_{1,4} \parallel \Sigma_1$ ). Забираем высоты точек с П2 и откладываем их по линиям связи с соответствующими горизонтальными проекциями этих точек на П4. Проекция образующей 1-1' на П4 = натуральной величине.



Строим  
натуральные  
величины всех  
образующих  
14-14' ..... 44-44'

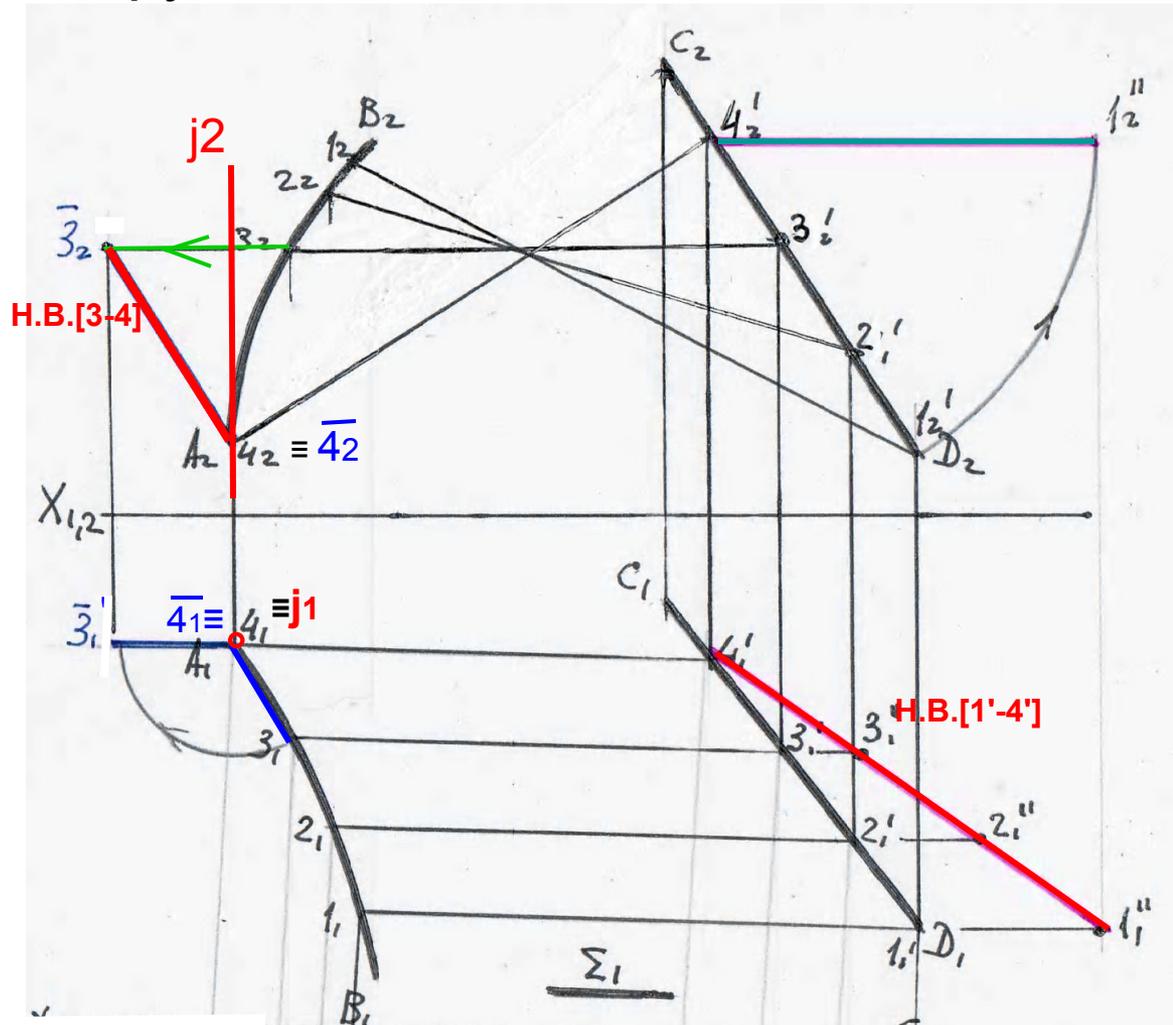




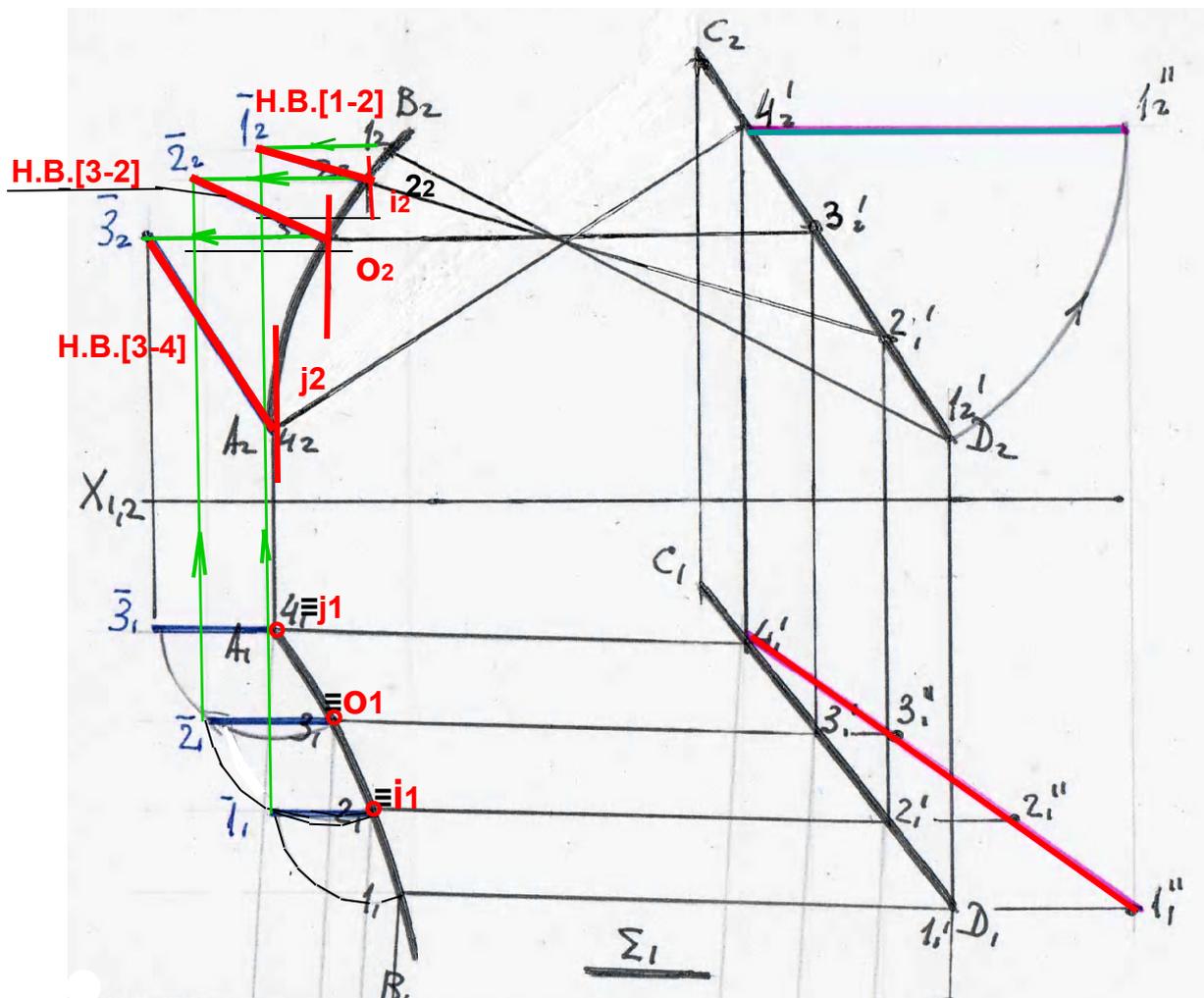
Вторая направляющая АВ – пространственная кривая.  
 Каждый отрезок находим методом вращения вокруг  
 проецирующих осей

Например, заменим  
 дугу  $3_1-4_1$  на хорду  
 $3_1-4_1$ . Развернем  
 отрезок 3-4 вокруг  
 горизонтально-  
 проецирующей оси  $j$   
 $(j_1 \equiv 4_1)$  в положение,  
 параллельное  $\Pi_2$   
 (на чертеже

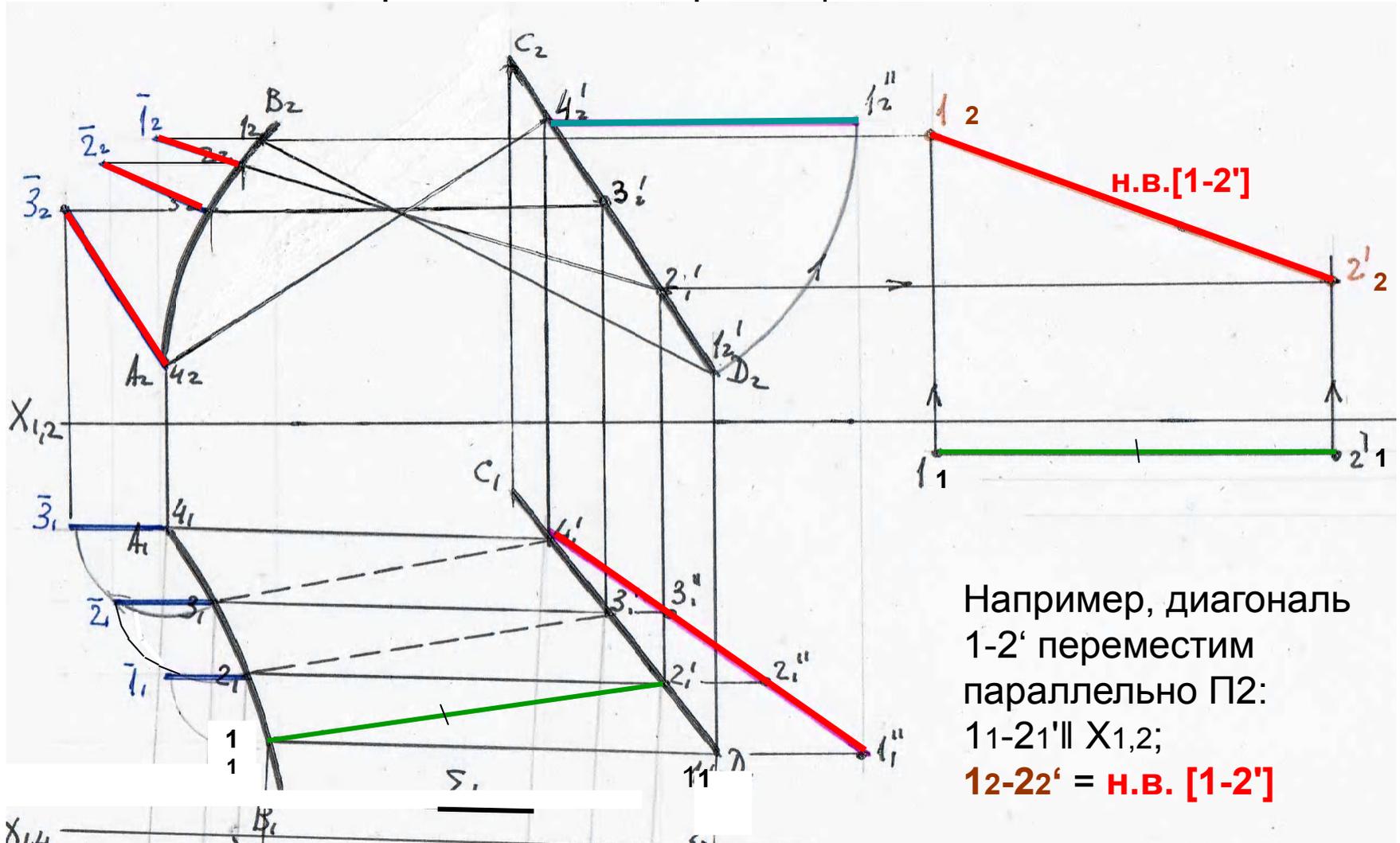
$3_1-4_1 = \bar{3}_1-\bar{4}_1$ ;  
 $\bar{3}_1-\bar{4}_1 \parallel \text{оси } X_{1,2} \rightarrow$   
 $\bar{3}_2-\bar{4}_2 = \text{Н.В.}[3-4]$



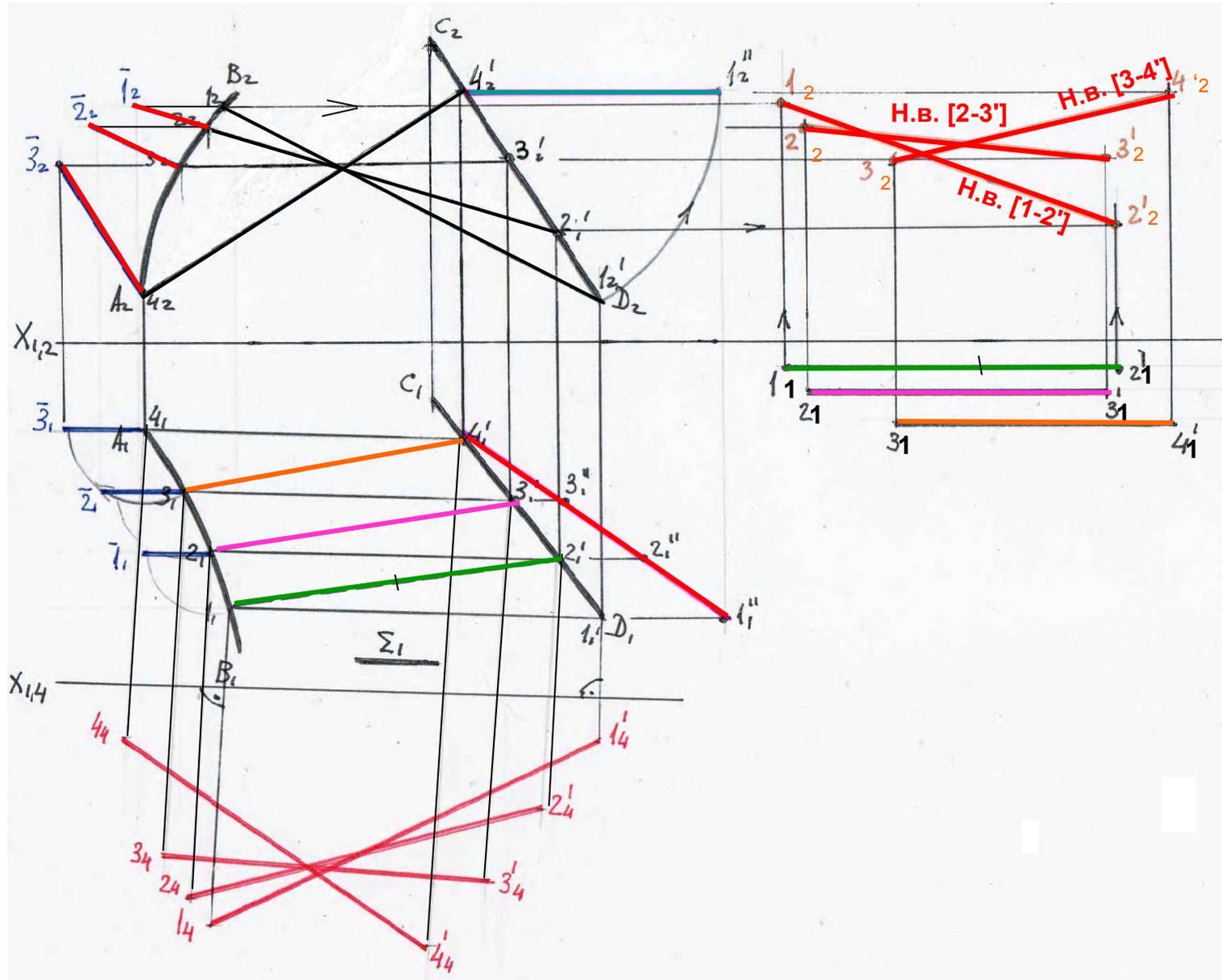
Таким же способом находим натуральные величины  
отдельно каждого отрезка направляющей АВ



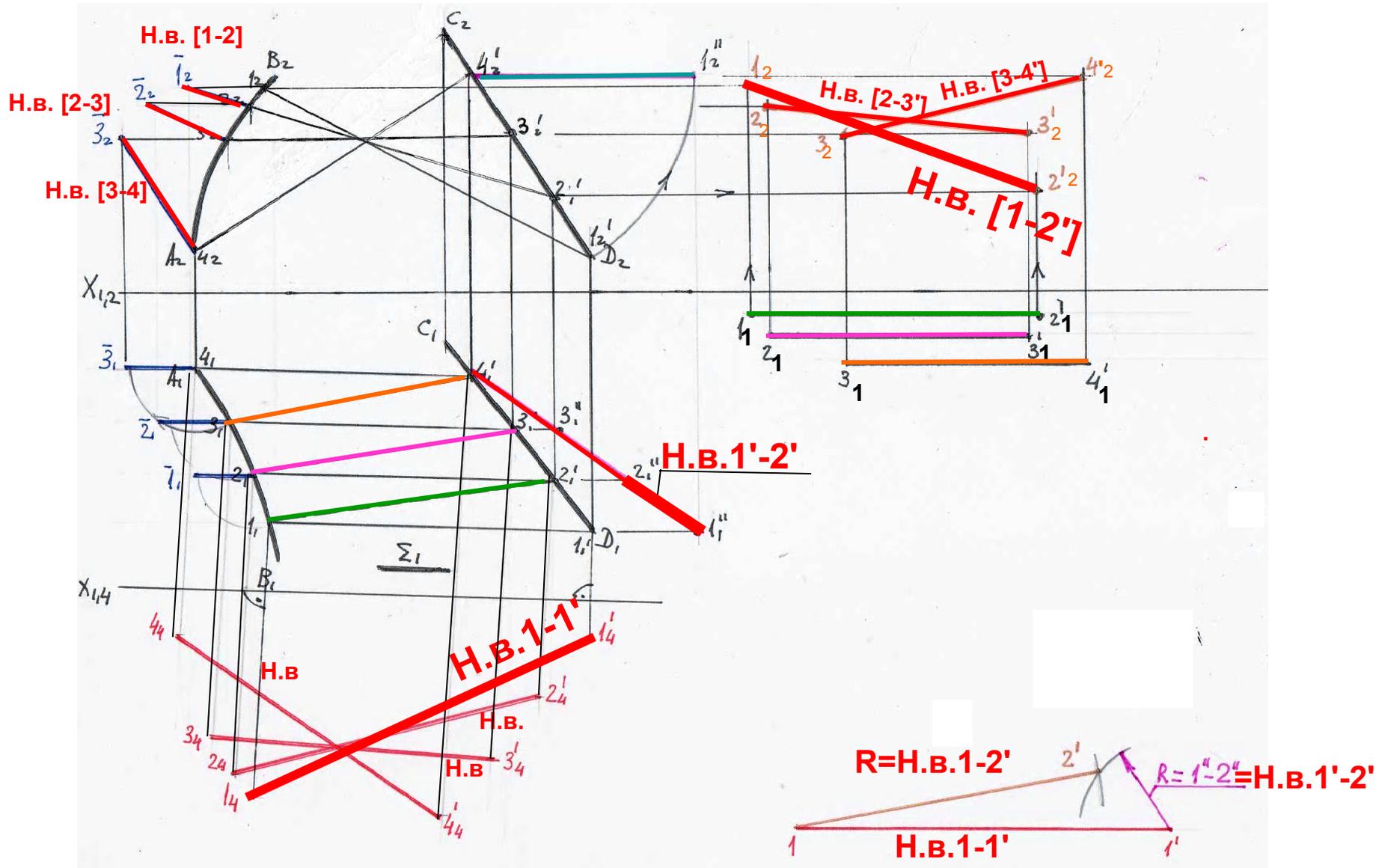
Четырехугольные отсеки, на которые была разделена поверхность, не являются плоскими. Поэтому необходимо их разделить диагоналями на треугольники и найти натуральную величину этих диагоналей. Используем метод плоско - параллельного перемещения



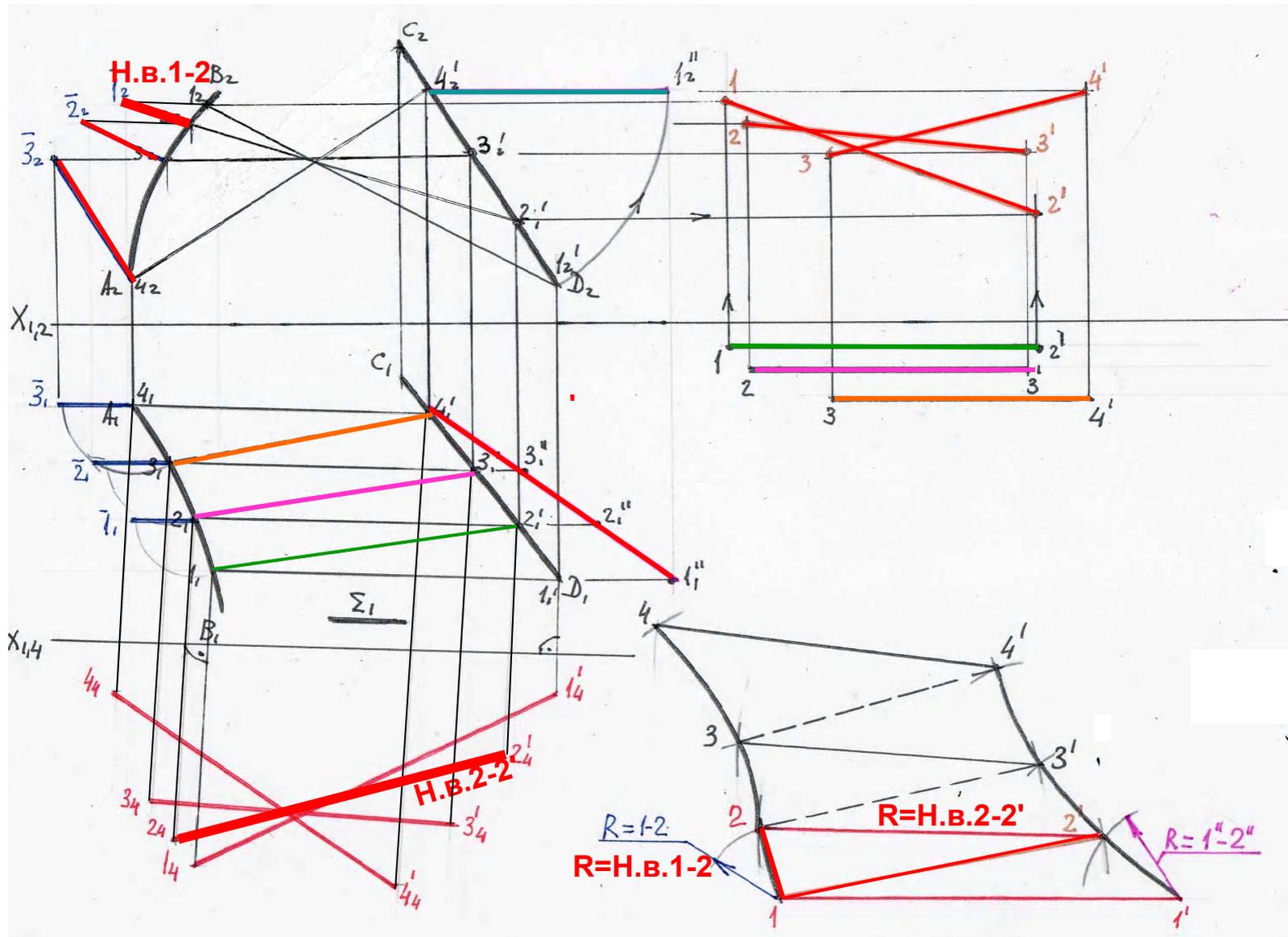
# Находим натуральные величины остальных диагоналей



# Строим методом триангуляции н.в. $\Delta 1-2'-1'$



Завершаем построение развертки, последовательно выстраивая следующие треугольники. Используем только **натуральные величины** найденных отрезков



## Эпюр 4

(курсовая работа: лист по теме  
«Поверхности»)

- **Эпюр 4:** На листе формата А3 самостоятельно задать чертеж (фасад и план) **поверхности Каталана** (цилиндронд, или коноид, или косая плоскость). Построить развертку (не менее 5-и отсеков)

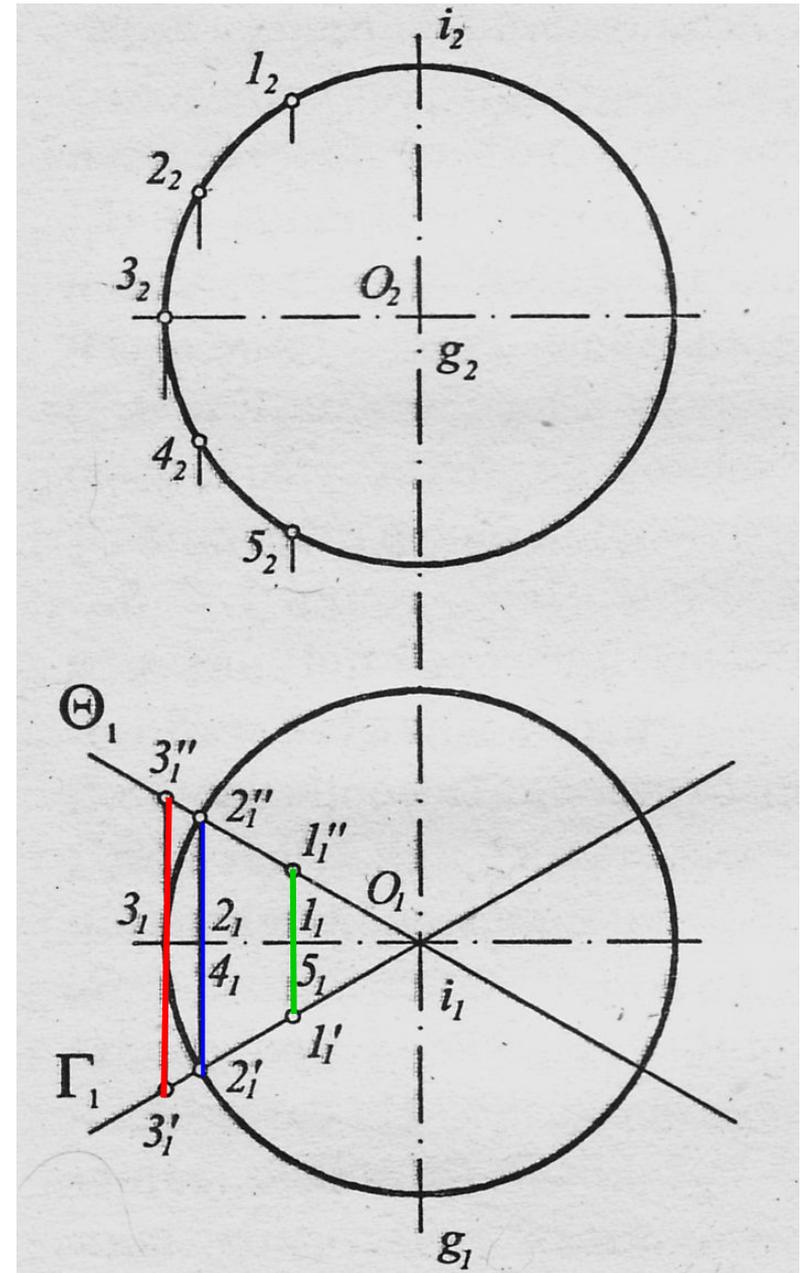
# Построение развертки поверхности сферы

Сферическая поверхность не развертываемая. Сферу нельзя развернуть в плоскость без разрывов и складок. Поэтому можно построить лишь **условную развертку**.

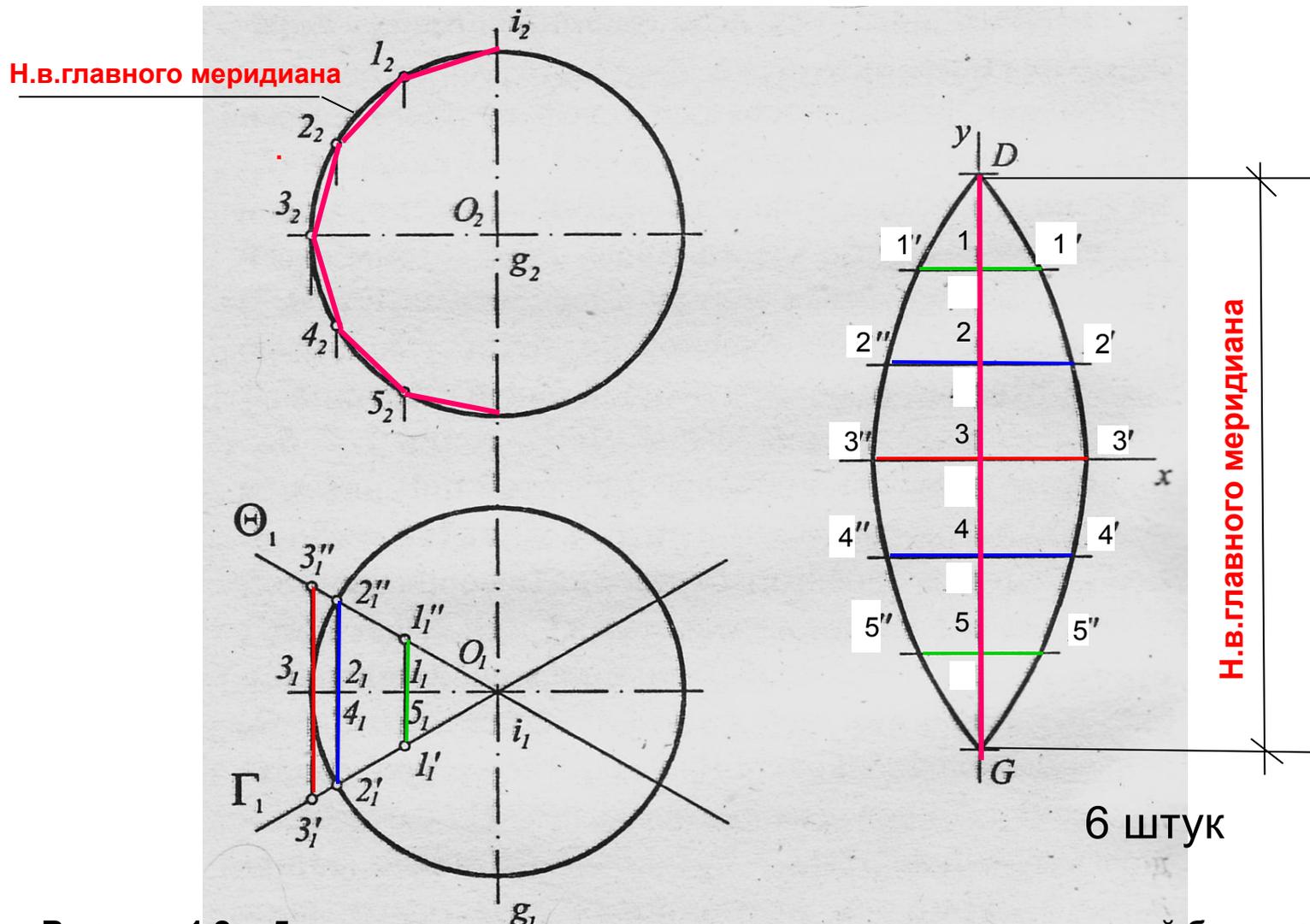
Один из способов построения развертки заключается в аппроксимации (замене) сферических элементов на цилиндрические.

Поверхность сферы разделим меридианами на части (доли). Чем количество долей больше, тем развертка точнее.

Участки поверхности, заключенные между смежными меридианами, заменяются цилиндрической поверхностью, касательной к сфере по главному меридиану.



Построим развертку одной доли. Наметим ось симметрии элемента, на которой отложим длину **главного меридиана** = н.в. Для этого разделим главный меридиан на 6 равных частей.



6 штук

В точках 1,2....5. на развертке отложим размер ширины доли, который берем с П1

## Эпюр 5

(курсовая работа: лист по теме  
«Поверхности»)

- **Эпюр 5:** На листе формата А3 самостоятельно задать чертеж (фасад и план) поверхности вращения (сферу не задавать!). Построить развертку: план разбить минимум на 8 частей. Криволинейные участки образующей (главный меридиан) на фасаде заменить ломаной линией, максимально приближенной к кривой образующей.