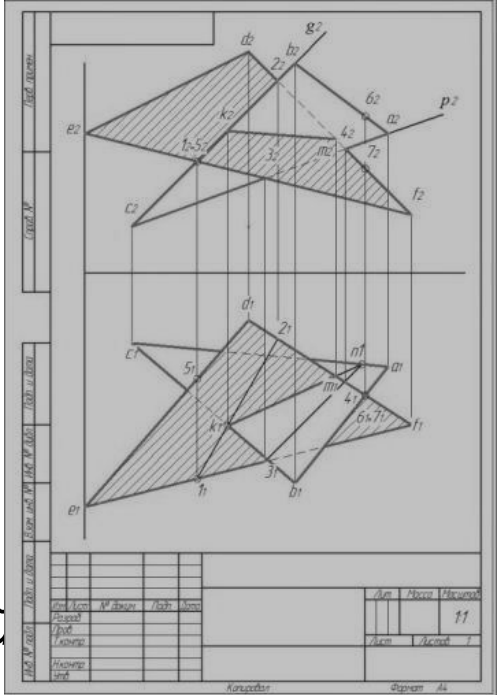


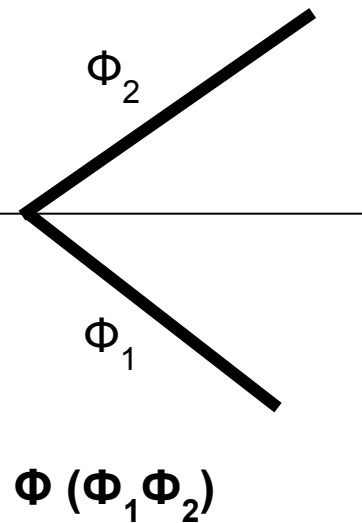
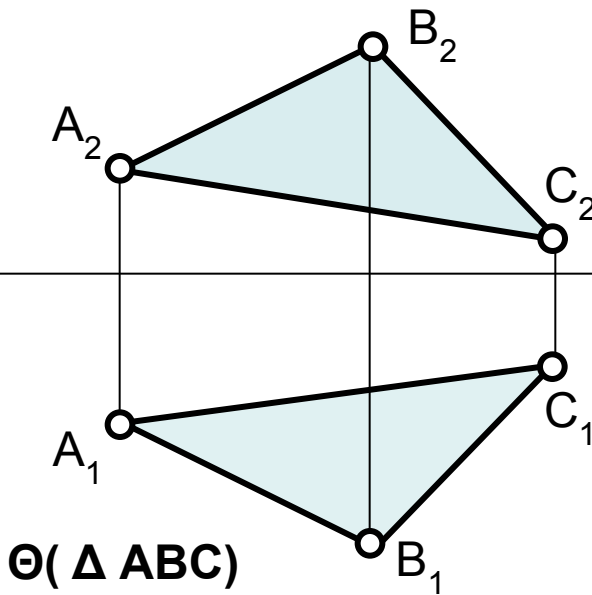
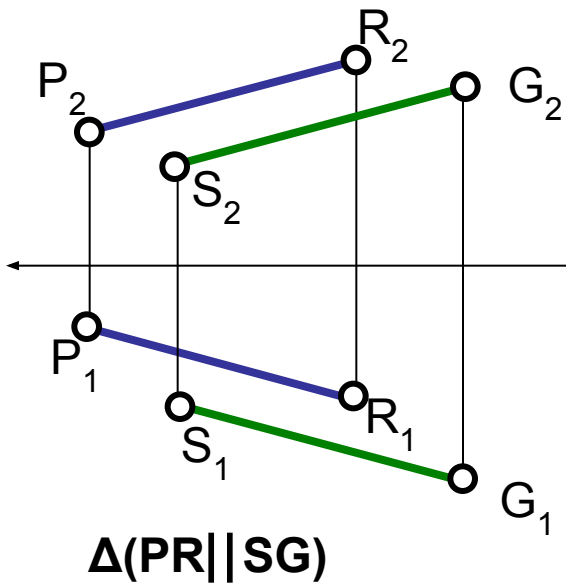
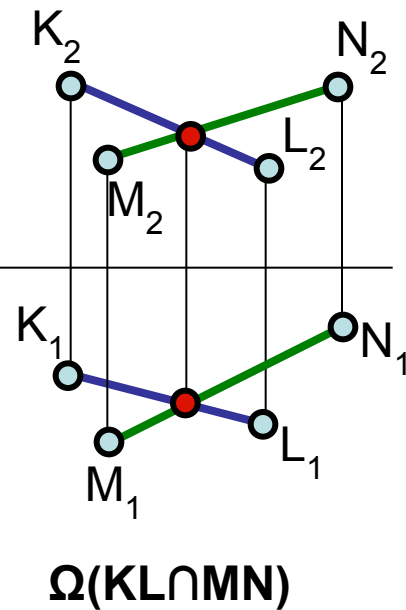
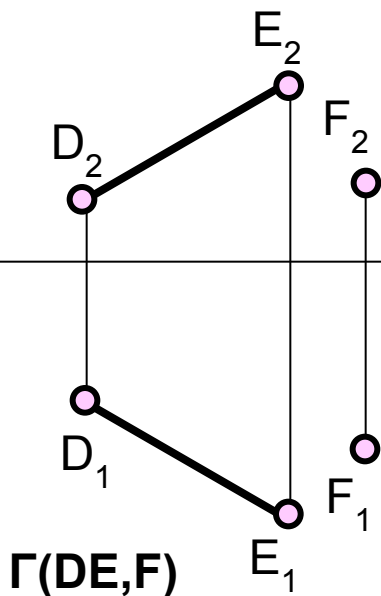
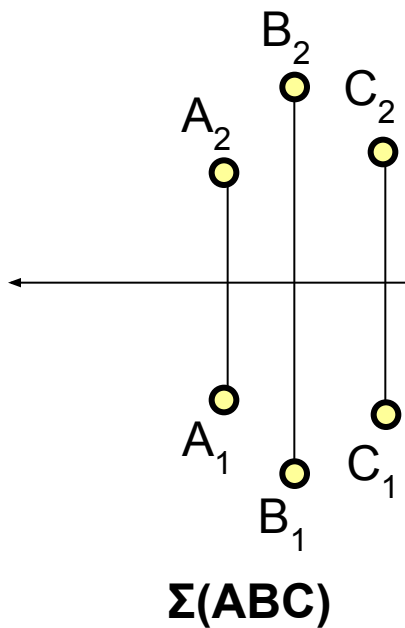
# Плоскость



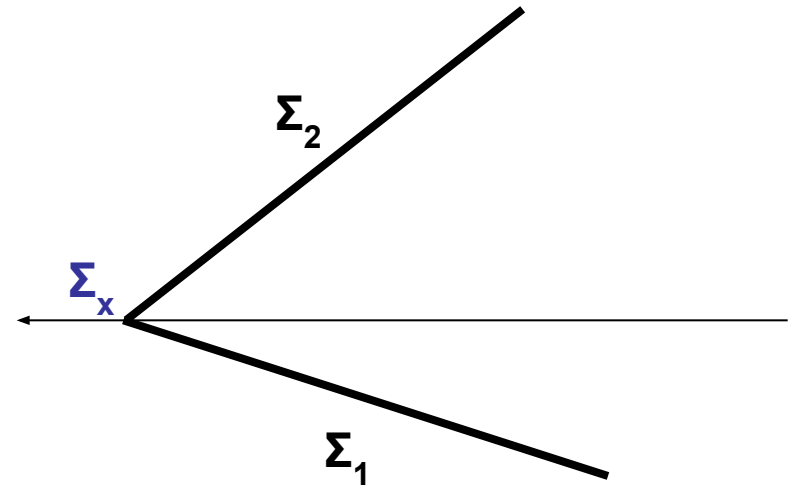
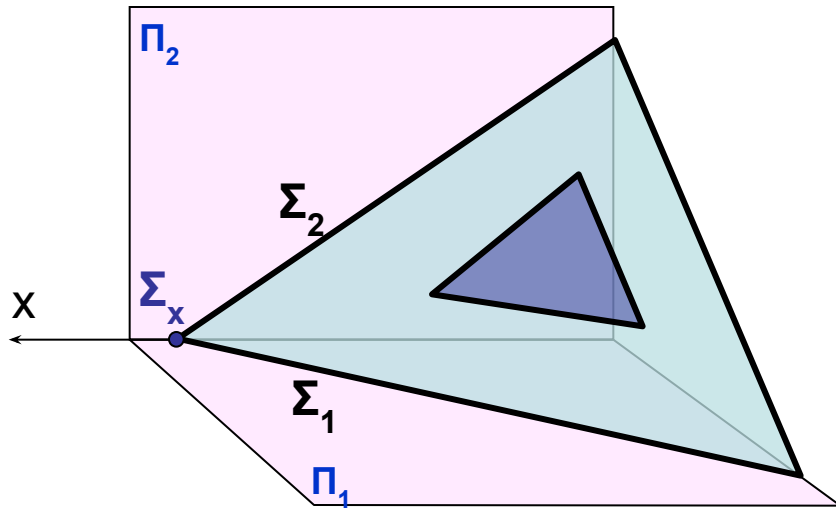
**доцент кафедры  
Инженерная графика и дизайн  
НИТУ «МИСИС»**

**Дербенева О.Л. [olderbeneva@mail.ru](mailto:olderbeneva@mail.ru)**

# Способы задания плоскости на чертеже



# Задание плоскости следами



Следом плоскости называется линия пересечения данной плоскости с плоскостью проекций.

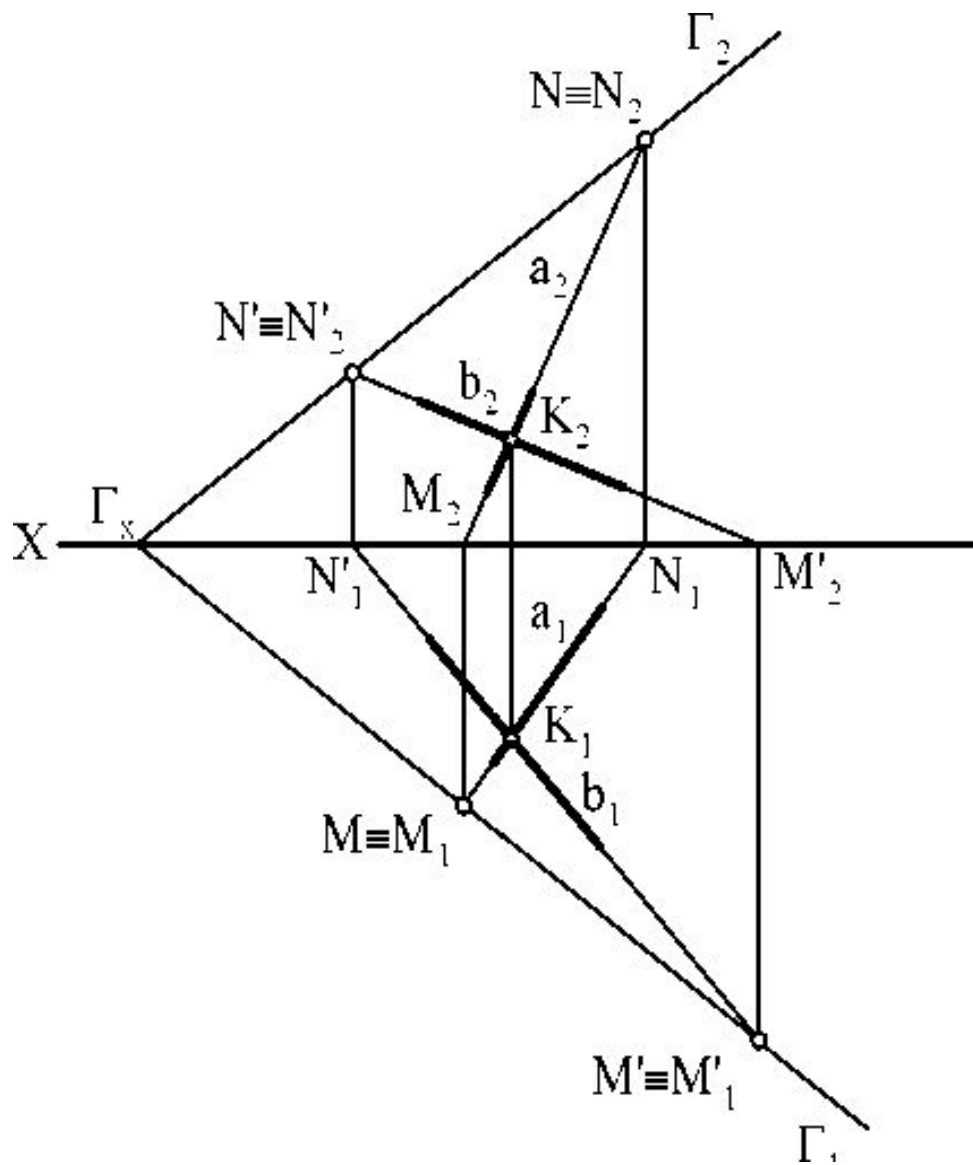
$$\Sigma (\Sigma_1, \Sigma_2) \parallel \perp \Pi_1 \Pi_2$$

$\Sigma_x$  - точка схода следов

$\Sigma_1$  - горизонтальный след плоскости( $h_0$ )

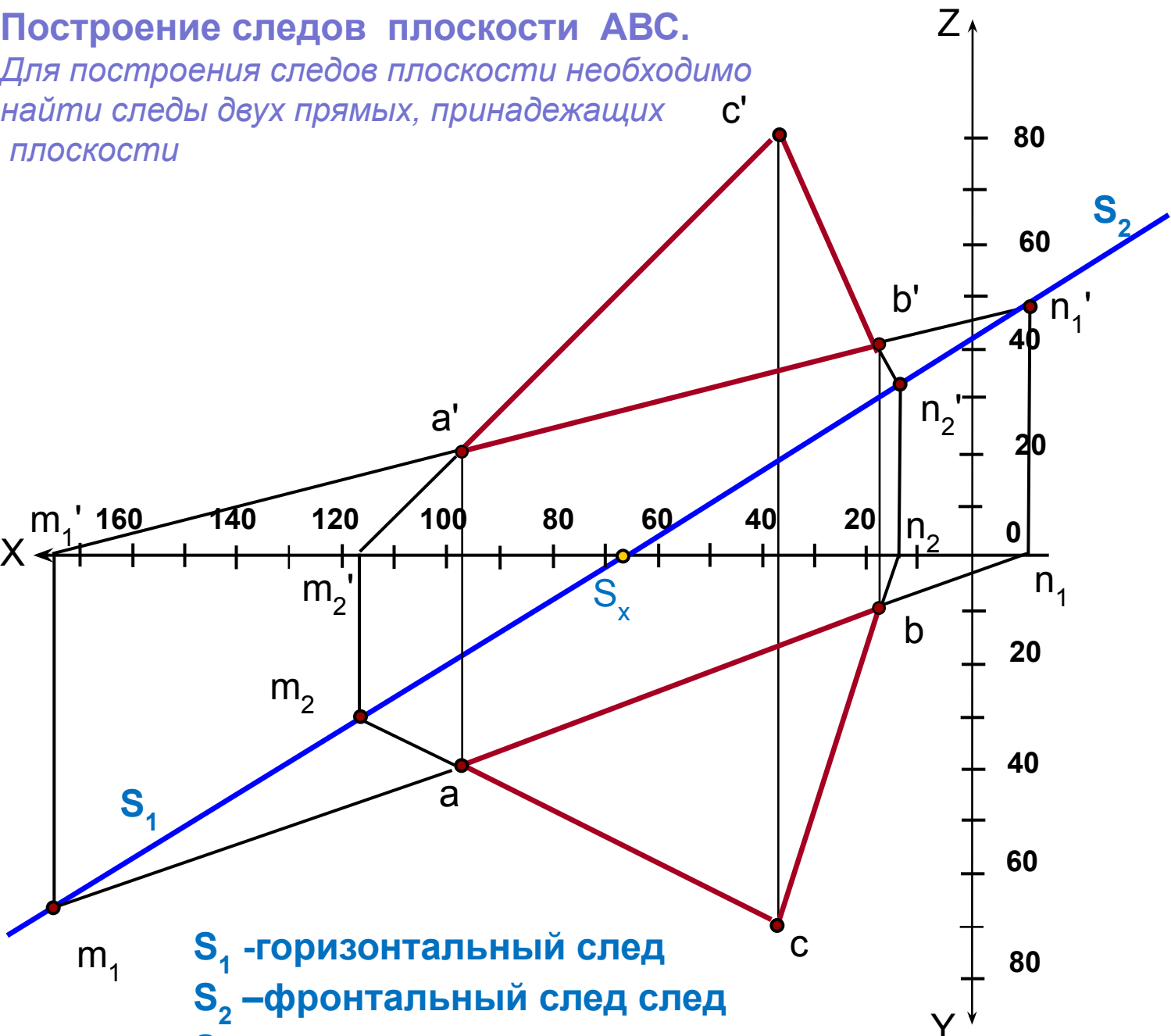
$\Sigma_2$  - фронтальный след плоскости( $f_0$ )

# Построение следов плоскости



# Построение следов плоскости ABC.

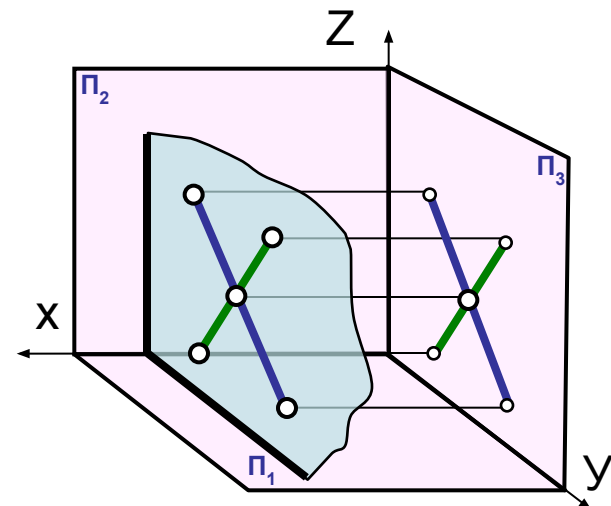
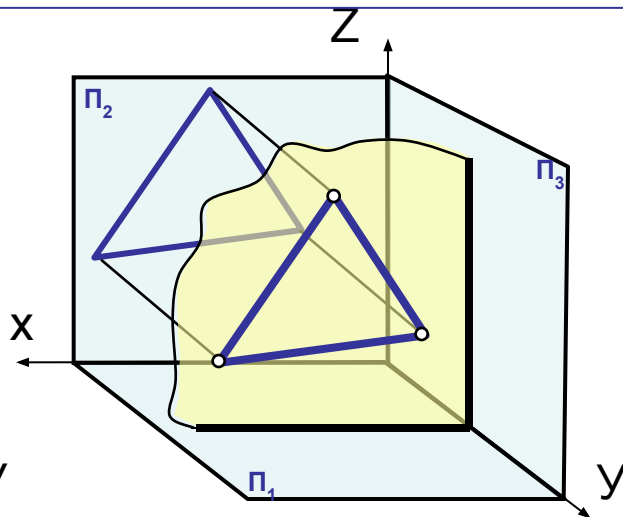
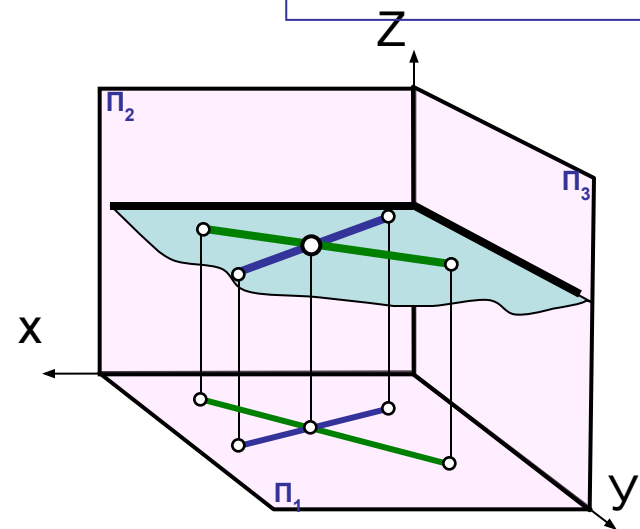
Для построения следов плоскости необходимо найти следы двух прямых, принадлежащих плоскости



- $S_1$  - горизонтальный след
- $S_2$  - фронтальный след
- $S_x$  - точка схода следов

# Плоскости частного положения

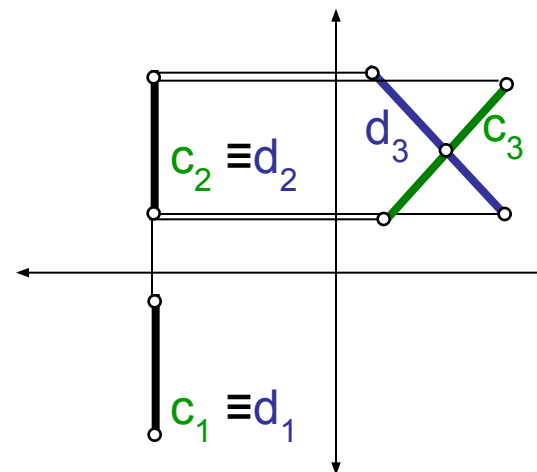
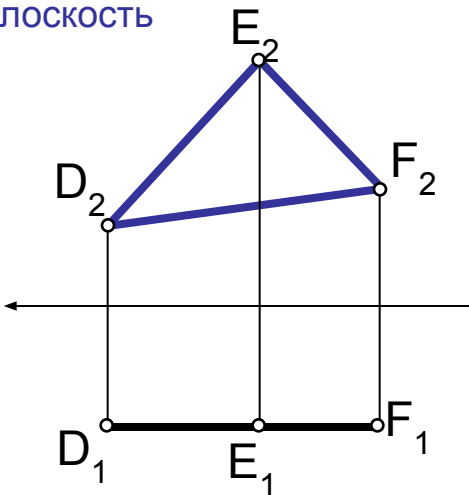
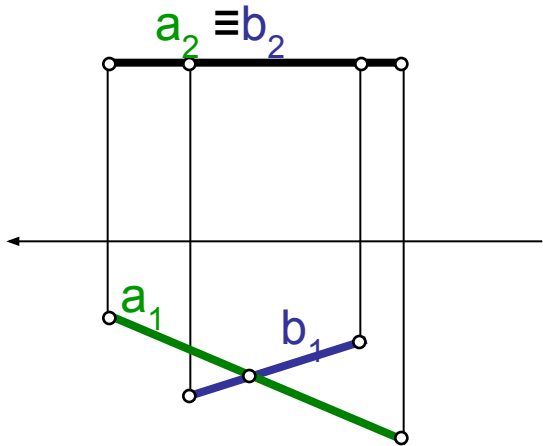
## Плоскости уровня



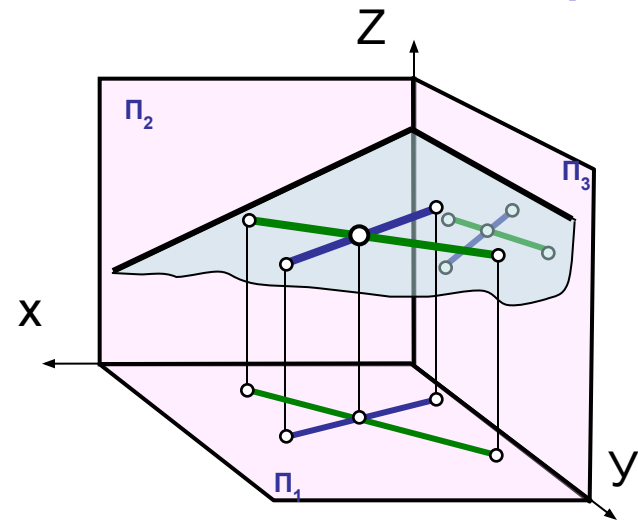
$\Omega \parallel \Pi_1$  – горизонтальная плоскость

$\Theta \parallel \Pi_2$  – фронтальная плоскость

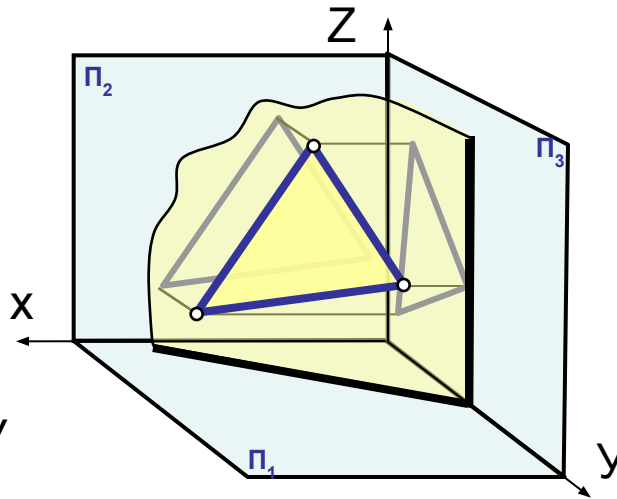
$\Psi \parallel \Pi_3$  – профильная плоскость



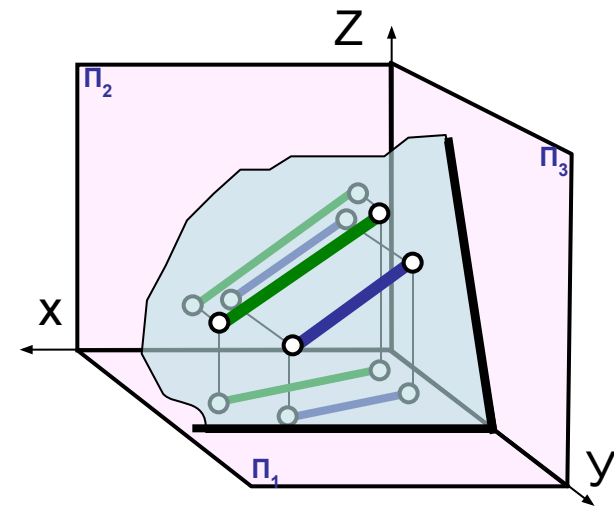
# Проецирующие плоскости



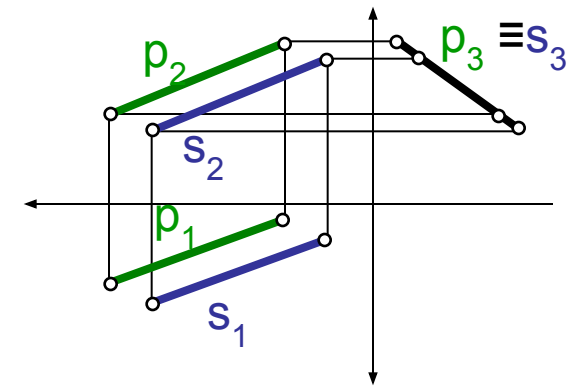
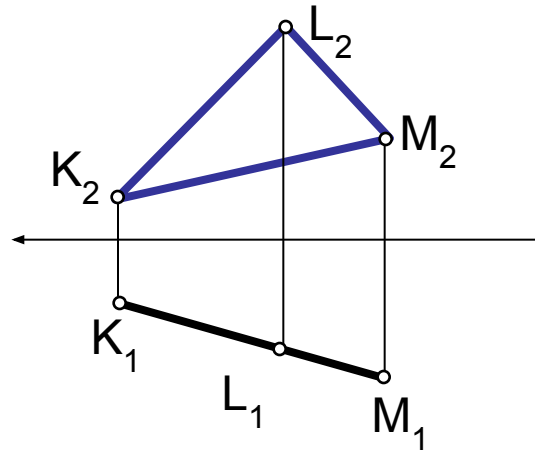
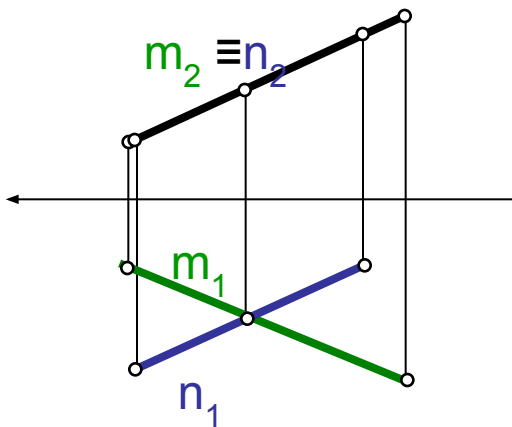
$\Phi \perp \Pi_2$  – фронтально-проецирующая плоскость



$\Gamma \perp \Pi_2$  – горизонтально-проецирующая плоскость



$\Lambda \perp \Pi_3$  – профильно-проецирующая плоскость

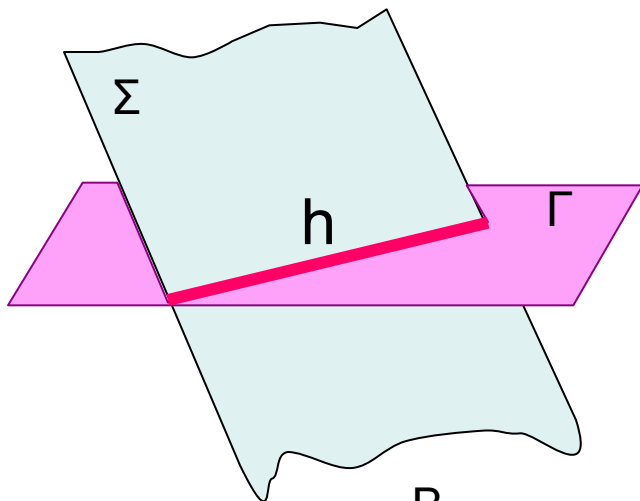


## Главные линии плоскости:

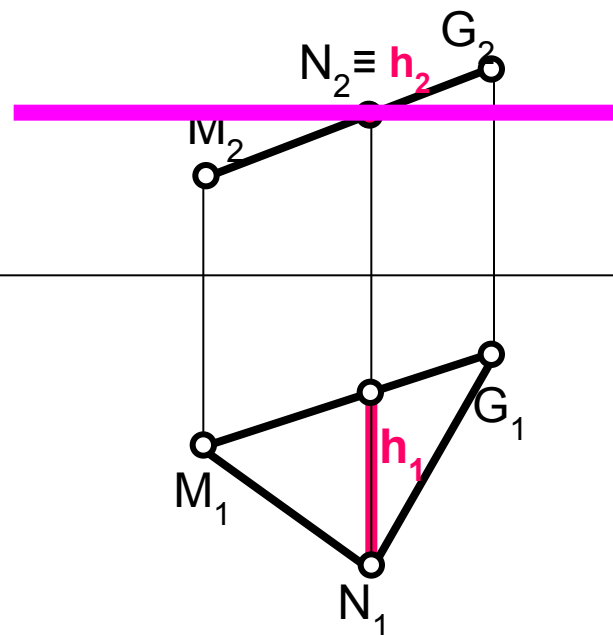
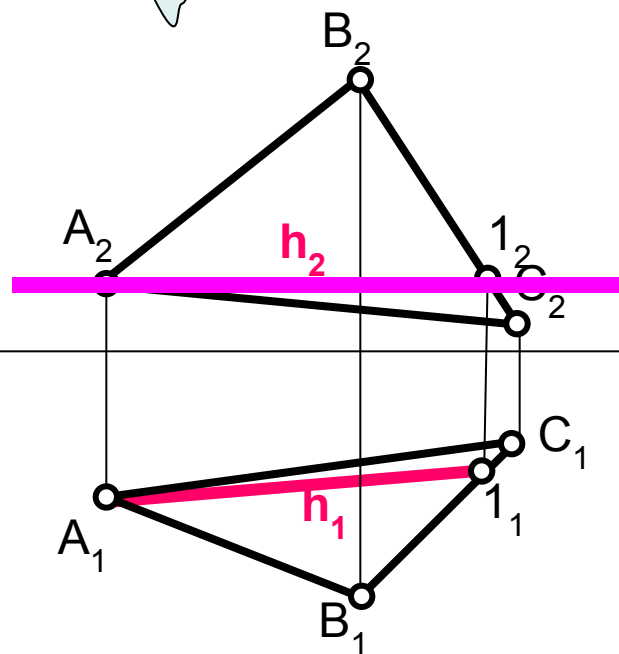
- ◆ горизонталь плоскости
- ◆ фронталь плоскости
- ◆ линия наибольшего наклона  
(ската) плоскости



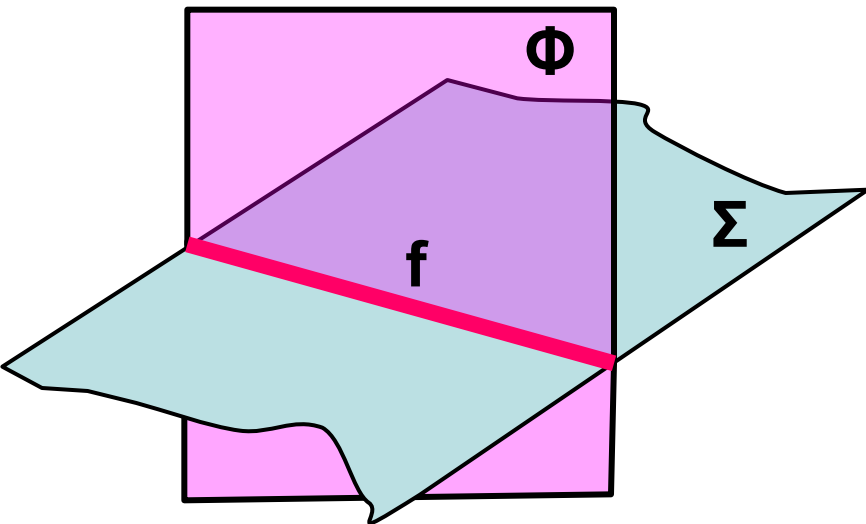
## Горизонталь плоскости



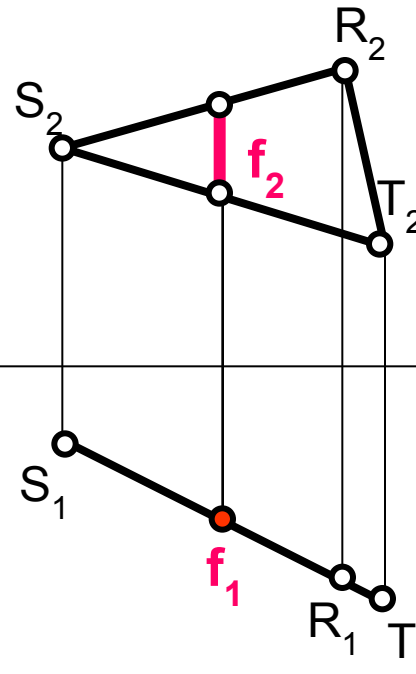
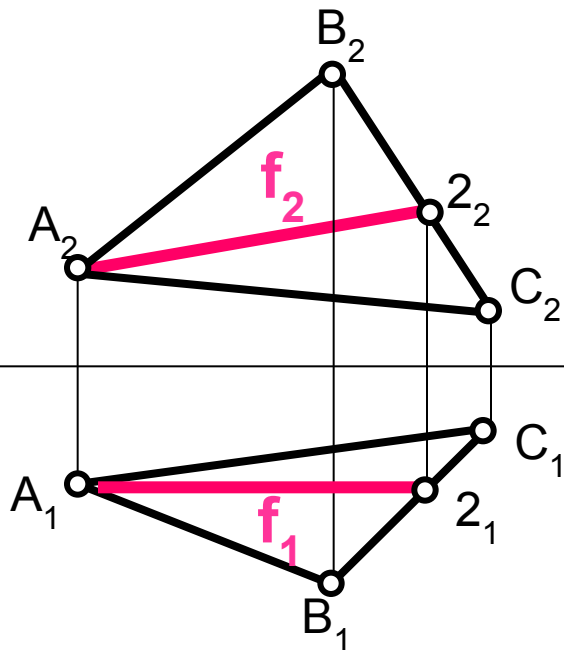
Горизонталью плоскости называется всякая прямая линия, лежащая в плоскости и расположенная параллельно горизонтальной плоскости проекций  $\Pi_1$



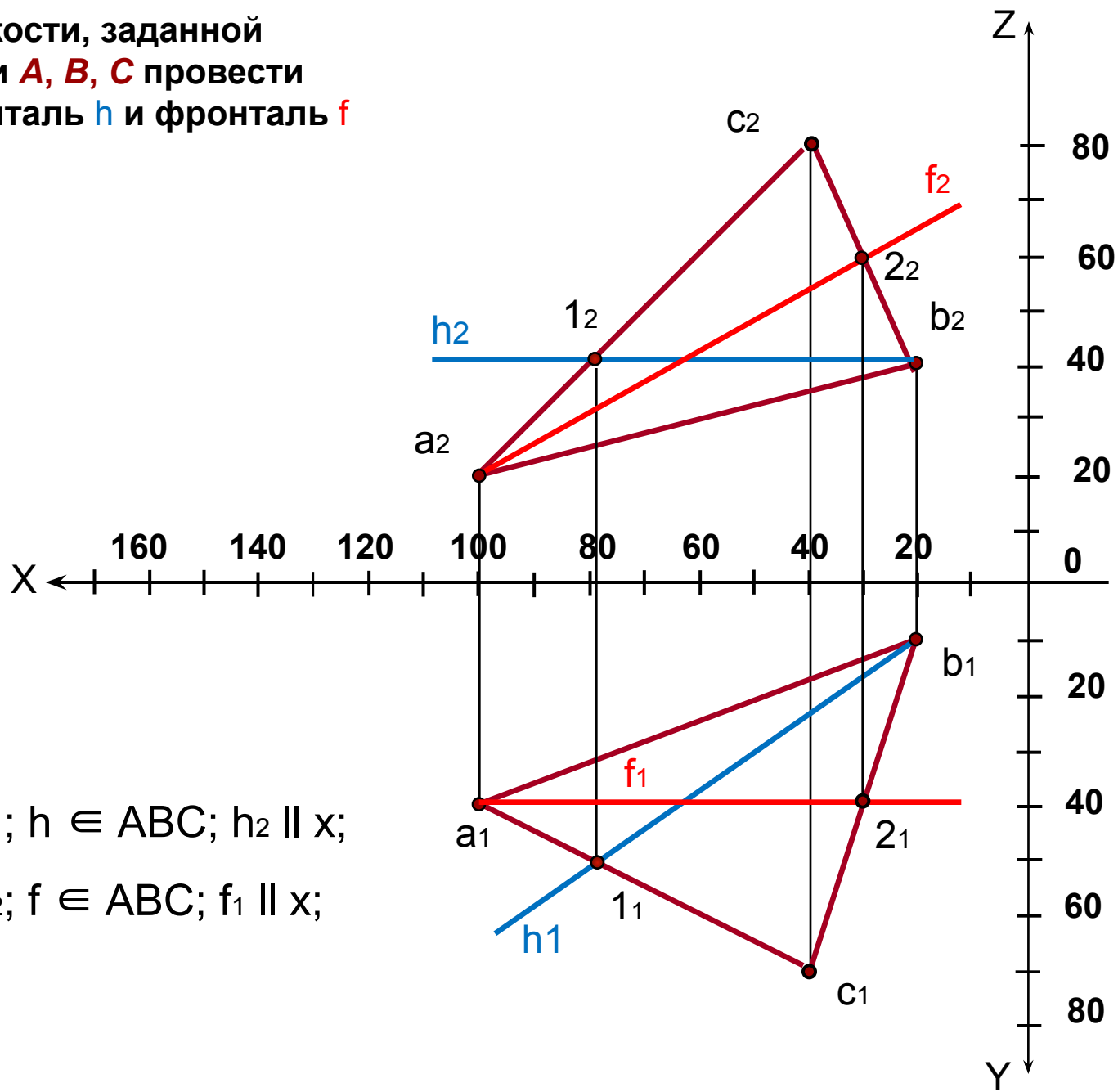
## Фронталь плоскости



Фронталью плоскости называется всякая прямая линия, лежащая в любой плоскости и расположенная параллельно плоскости  $\Pi_2$



В плоскости, заданной  
 точками **A, B, C** провести  
 горизонталь **h** и фронталь **f**



$h \parallel \Pi_1; h \in ABC; h_2 \parallel X;$

$f_2 \parallel \Pi_2; f \in ABC; f_1 \parallel X;$

## Линия наибольшего наклона (ската) плоскости

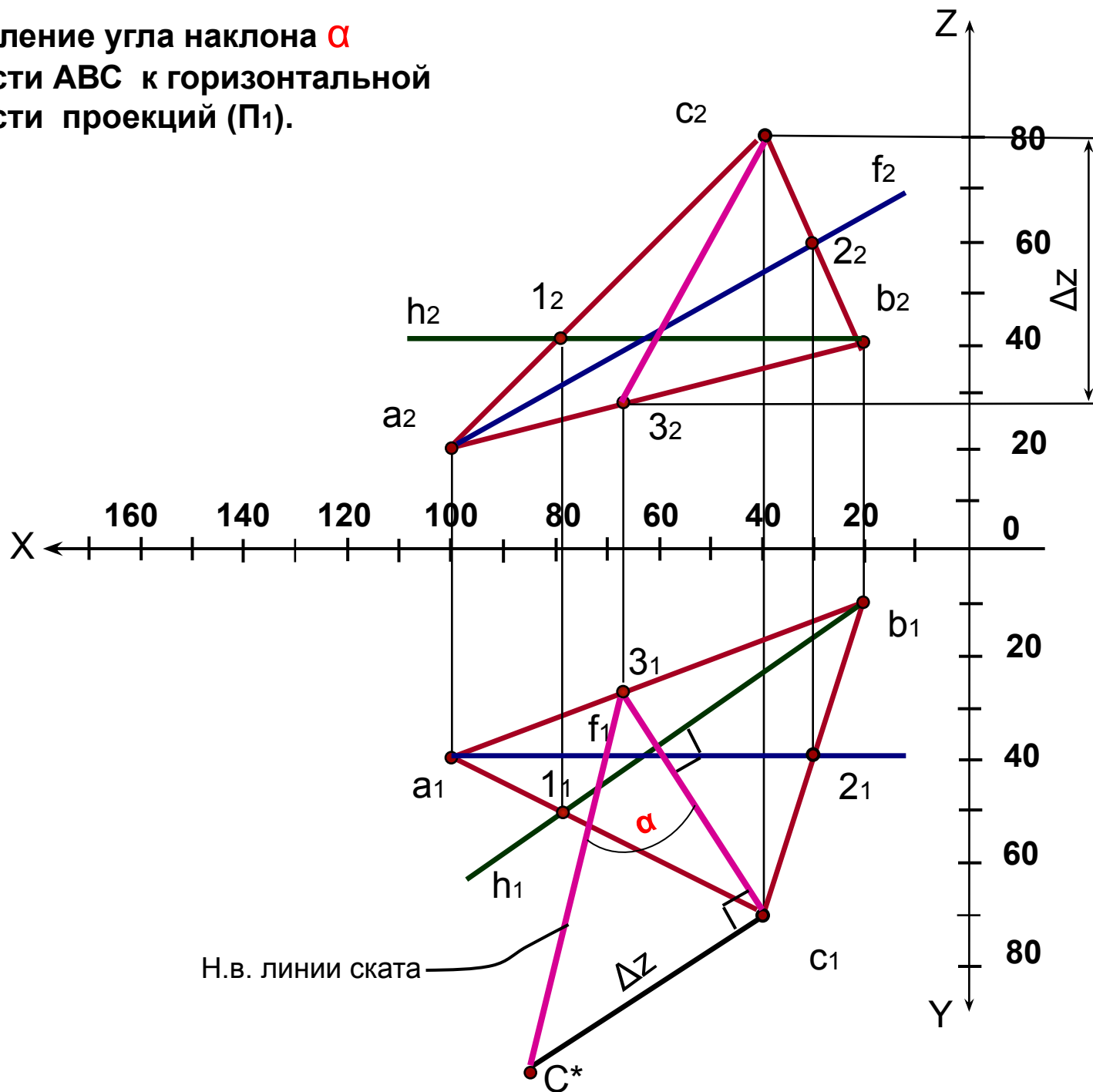
*Линии наибольшего ската* – это прямые, проведенные в плоскости перпендикулярно её горизонталям.

По углу наклона линии наибольшего ската к плоскости  $\Pi_1$  определяют двугранный угол наклона плоскости к горизонтальной плоскости проекций.

### Правило построения линии наибольшего ската плоскости

Горизонтальная проекция линии наибольшего ската плоскости перпендикулярна горизонтальным проекциям горизонталей плоскости.

Определение угла наклона  $\alpha$   
плоскости ABC к горизонтальной  
плоскости проекций ( $\Pi_1$ ).



**Взаимное положение прямой и плоскости**

**Прямая  
принадлежит  
плоскости**

**Прямая  
параллельна  
плоскости**

**Прямая  
пересекает  
плоскость**

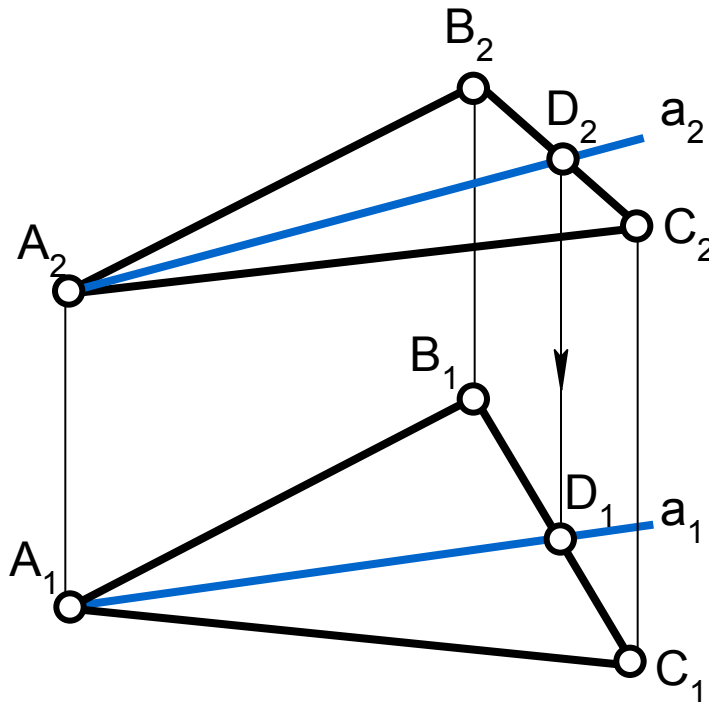
**Горизонталь и  
фронталь  
плоскости  
Линия  
наибольшее ската**

**Прямая  
перпендикулярна  
плоскости**

# Принадлежность прямой плоскости

Прямая принадлежит плоскости, если две ее точки принадлежат этой плоскости.

Точка принадлежит плоскости, если она принадлежит прямой этой плоскости.



Дано:

$\Sigma(\Delta ABC) \not\parallel \not\perp \Pi_1, \Pi_2$

$a \subset \Sigma$

$a_1 - ?$

$$\left. \begin{array}{l} a \subset \Sigma \\ A \wedge D \in a \end{array} \right\} \Rightarrow \begin{array}{l} A_2 \wedge D_2 \in \Sigma_2 \\ A_1 \wedge D_1 \in \Sigma_1 \\ A_1 \wedge D_1 \in a_1 \end{array}$$

$A_2 \wedge D_2 \in \Sigma_2$

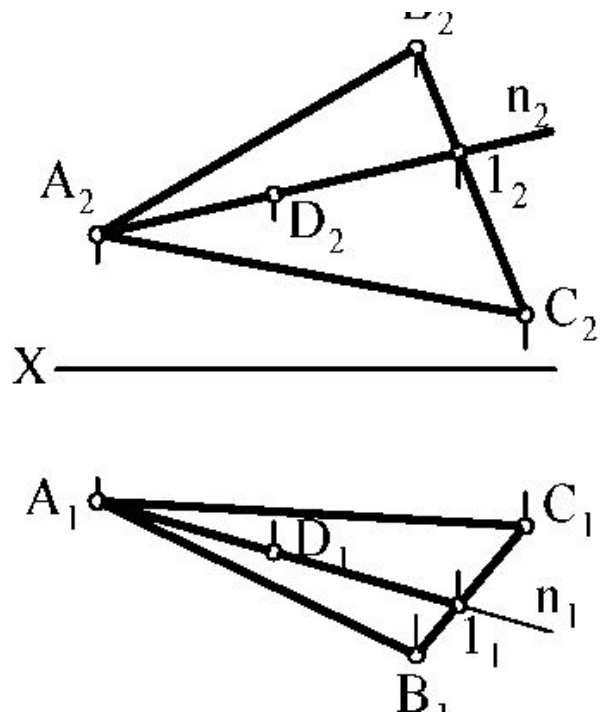
$A_1 \wedge D_1 \in \Sigma_1$

$A_1 \wedge D_1 \in a_1$

## Принадлежность прямой плоскости

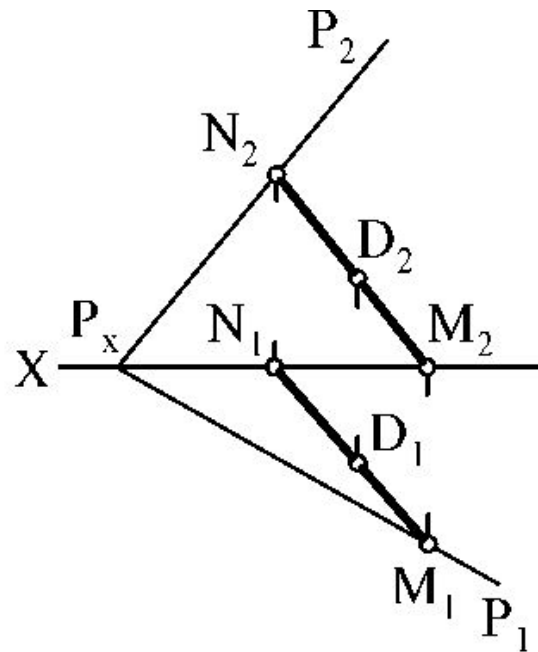
Прямая принадлежит плоскости, если две ее точки принадлежат следам этой плоскости.

Точка принадлежит плоскости, если она принадлежит прямой этой плоскости.



$n \in ABC$

$D \in ABC$

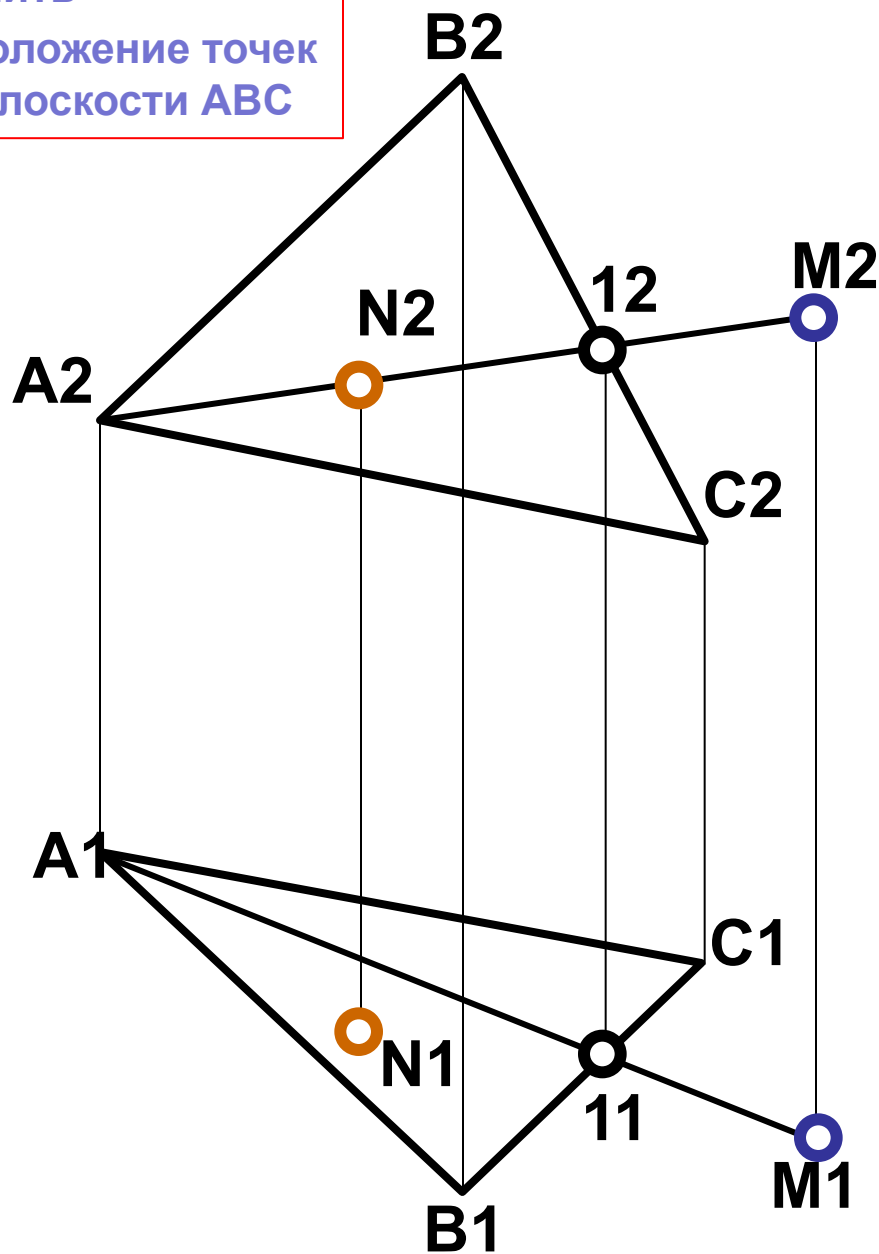


$NM \in P$

$D \in P$



Определить  
взаимоположение точек  
M и N и плоскости ABC



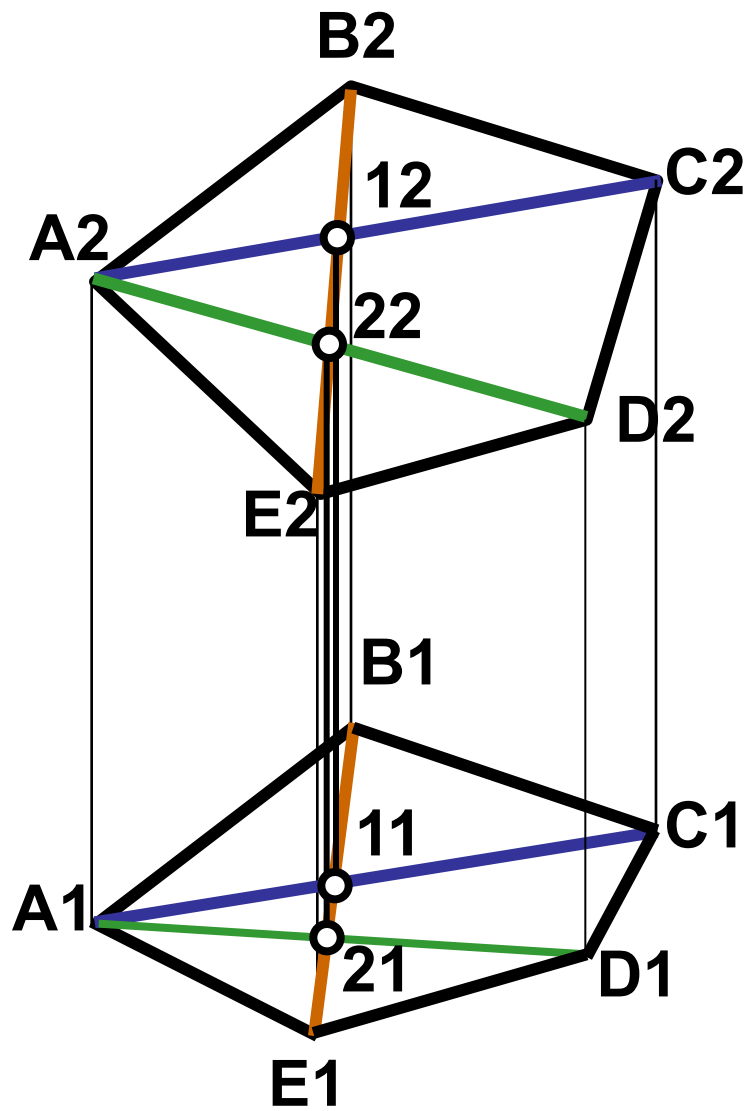
Дано:  
 $\Theta(\triangle ABC) \parallel \perp \Pi_1$   
 $\Pi_2$

$M \in \Theta ?$

$N \in \Theta ?$

$M \in \Theta$   $M_2 \in$   
 $(A_2 1 2)$   
 $M_1 \in$   
 $(A_1 1 1) \notin \Theta$

$N \notin \Theta$   $N_2 \in$   
 $(A_2 1 2)$   
 $(N_1 1 1) \in$   
 $(A_1 1 1)$



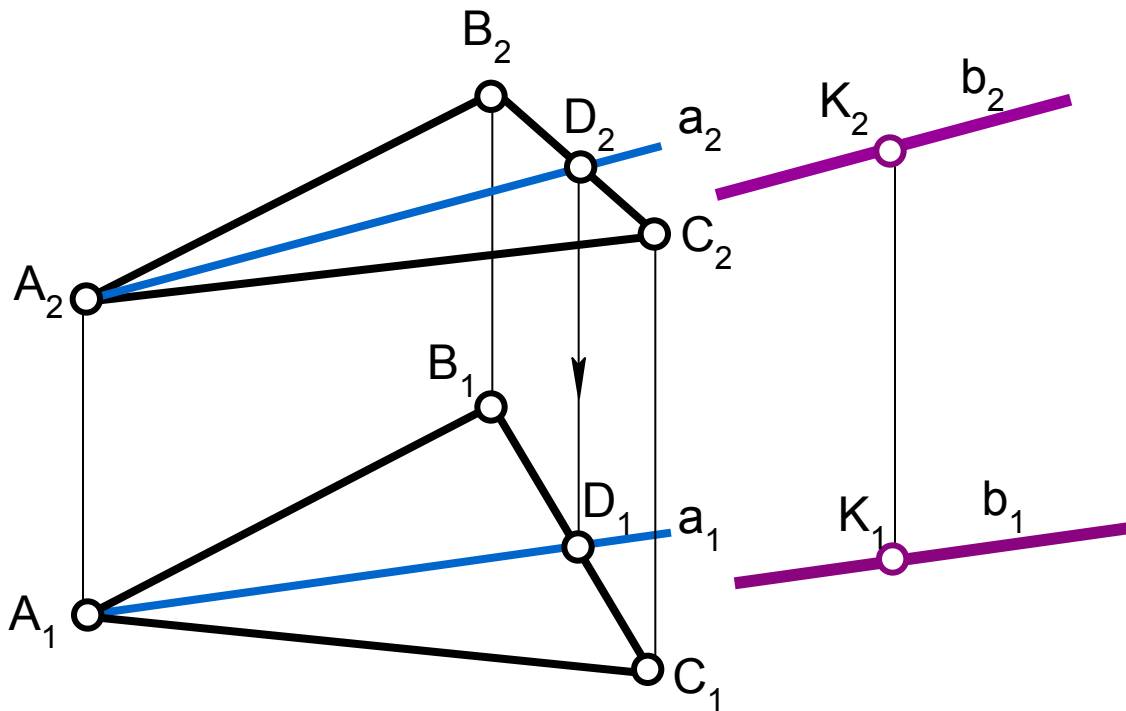
Дано:  
 $\Phi(ABCDE) \parallel \Delta \Pi_1$   
 $\Pi_2$

$\Phi_1 -$   
 ?

Определить недостающие проекции точек  $C_1$  и  $D_1$  плоскости  $ABCDE$ .

## Прямая параллельна плоскости

Прямая параллельна плоскости, если она параллельна прямой, лежащей в плоскости.



Дано:

$\Sigma(\triangle ABC) \parallel \Pi_1,$

$K_2 \notin \Sigma$

$b \parallel \Sigma$  -?

$K \in b$

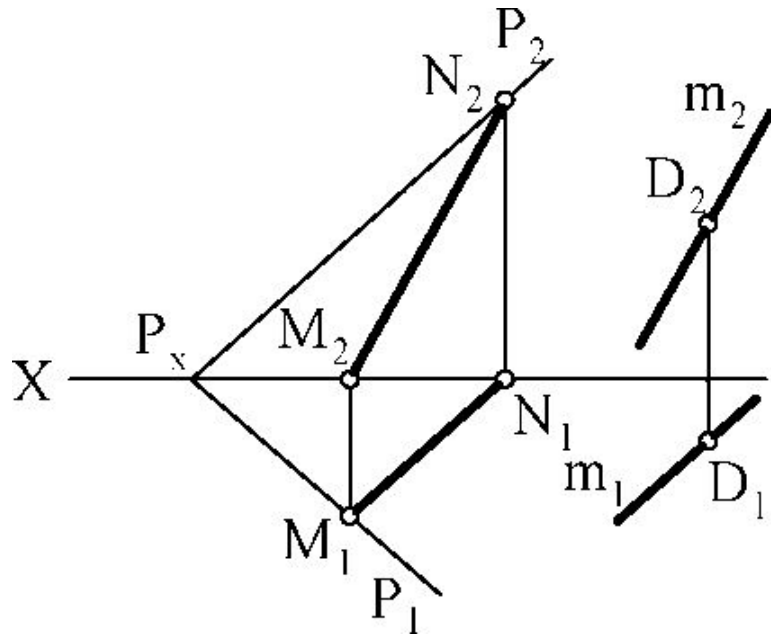
$b \parallel a$

$a \subset \Sigma$

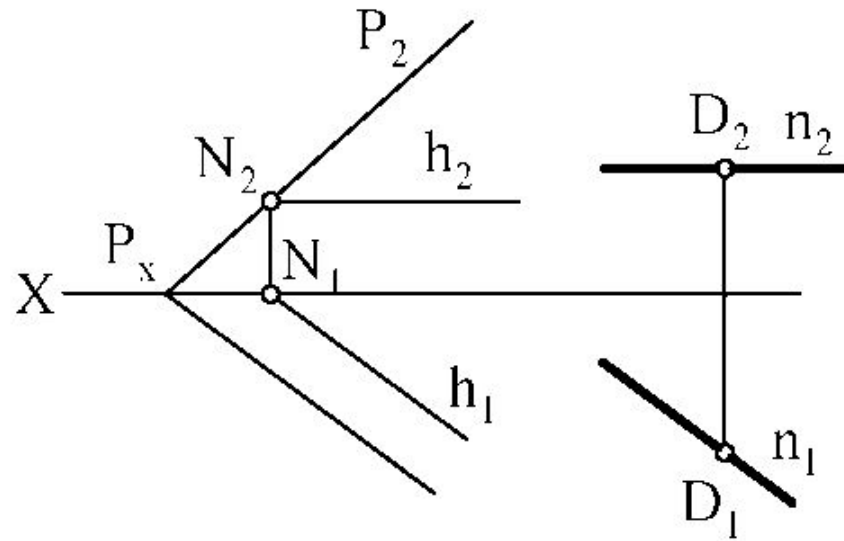
$\Rightarrow b \parallel \Sigma$

## Прямая параллельна плоскости

Прямая параллельна плоскости, если она параллельна прямой, лежащей в плоскости.



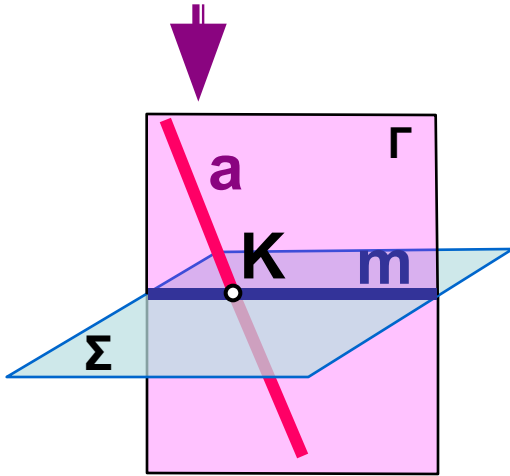
$m//P$



$n//P$

# Пересечение прямой с плоскостью

## Прямая пересекает плоскость



Дано:

$\Sigma$  - плоскость

$a$  – прямая линия

$a \cap \Sigma$

---

$a \cap \Sigma = K - ?$

1. Закljučаем прямую  $a$  во вспомогательную плоскость  $\Gamma$
2. Находим линию пересечения заданной плоскости  $\Sigma$  и вспомогательной плоскости  $\Gamma$
3. Определяем точку пересечения  $K$  заданной линии  $a$  и линии  $m$
4. Определяем видимость прямой  $a$

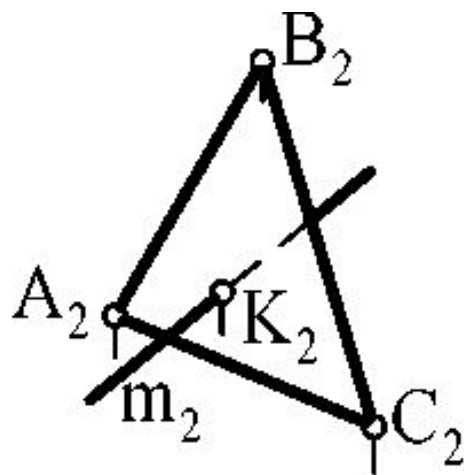
**Прямая пересекает плоскость  
частного положения**

Дано:

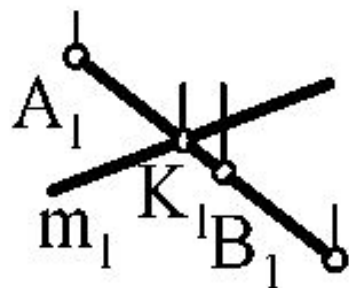
$(\triangle ABC) \perp \Pi_1$

$m \notin \triangle ABC$

$\frac{\quad}{m \cap \triangle ABC = ?}$

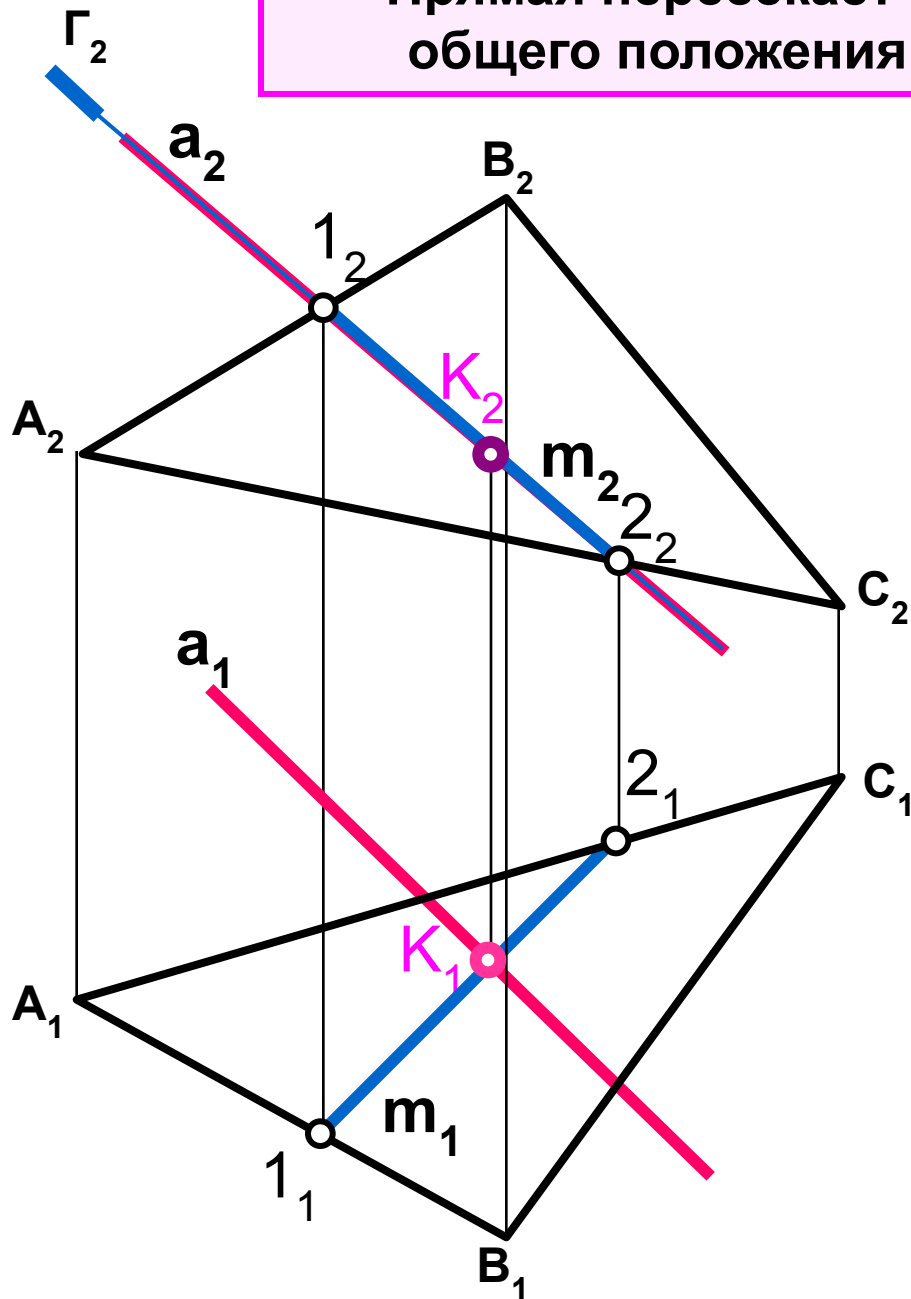


X —————



$m \cap \triangle ABC = K$

Прямая пересекает плоскость  
общего положения в точке К



Дано:

$\Sigma(\triangle ABC) \not\parallel \Pi_1,$

$\Pi_2 \not\parallel \Pi_1, \Pi_2$

$a \not\subset \Sigma$

---

$a \cap \Sigma = ?$

1.  $a \subset$

$\Gamma \quad \Gamma \perp \Pi_2$

2.  $\Gamma \cap \Sigma = m$

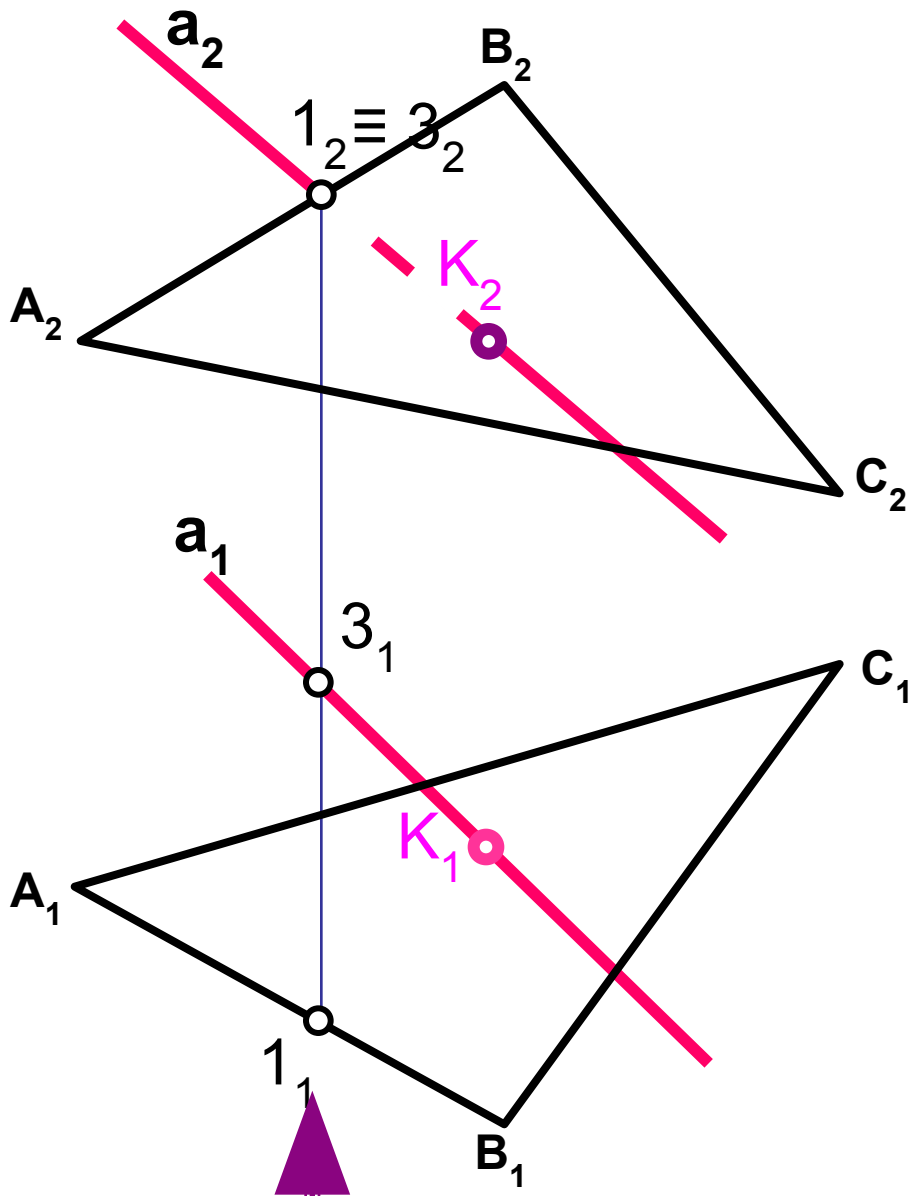
3.  $m \cap a = K$

$m \subset \Sigma \Rightarrow$

$\Sigma \cap a = K$



Прямая пересекает плоскость ABC в  
точке K



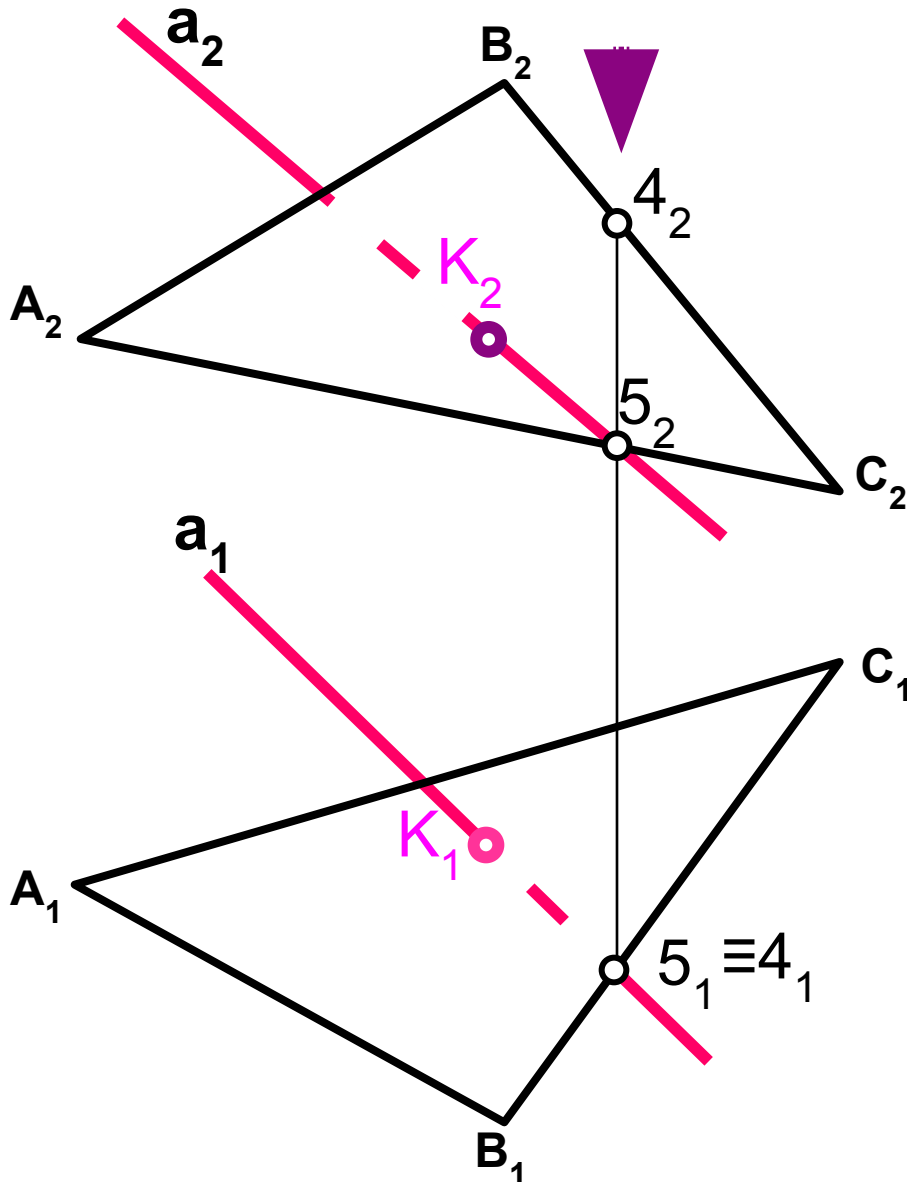
Дано:  
 $\Sigma(\triangle ABC) \not\perp \Pi_1,$   
 $\Pi_2 \not\perp \Pi_1, \Pi_2$   
 $a \not\subset \Sigma$   


---

 $a \cap \Sigma = ?$

1. Определим видимость прямой  $a$  от точки  $K$  и выше на фронтальной проекции.

# Прямая пересекает плоскость



Дано:

$\Sigma(\Delta ABC) \not\parallel \Pi_1,$

$a_2 \not\parallel \Pi_1, \Pi_2$

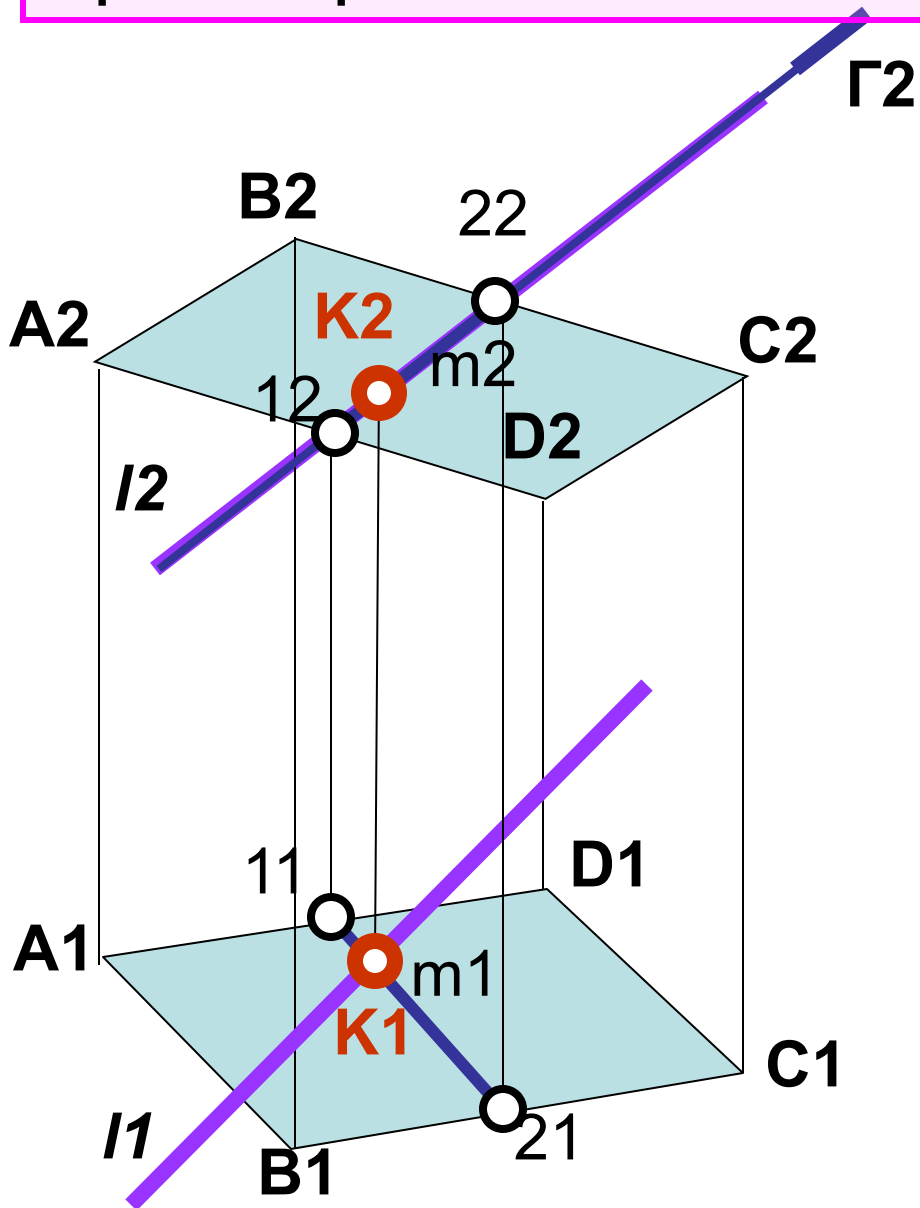
$a \not\subset \Sigma$

---

$a \cap \Sigma = ?$

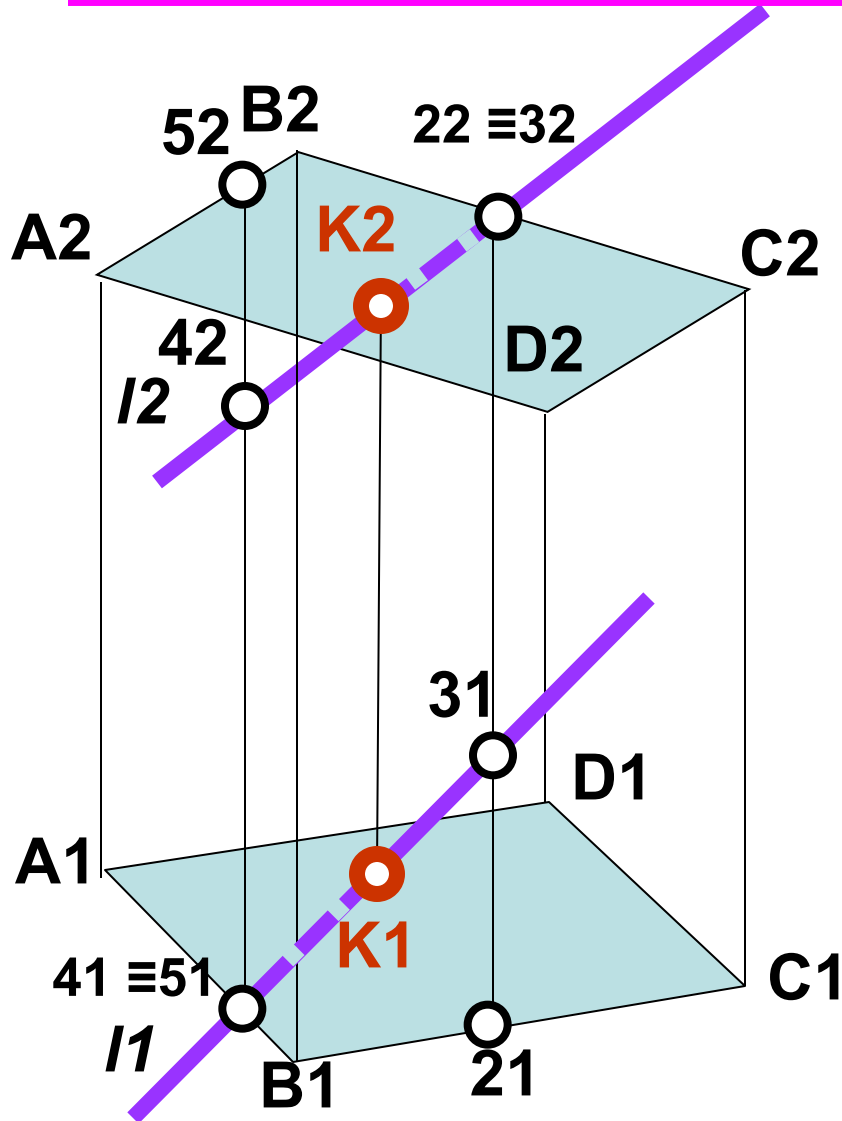
2. Определим видимость прямой  $a$  от точки  $K$  и ниже на горизонтальной проекции.

Прямая пересекает плоскость общего положения



1.  $I \subset \Gamma$   
 $\Gamma \perp \Pi_2$
2.  $\Gamma \cap \Sigma = m$
3.  $m \cap I = K$   
 $m \subset \Sigma \Rightarrow$   
 $\Sigma \cap a = K$

# Определение видимости элементов прямой и плоскости



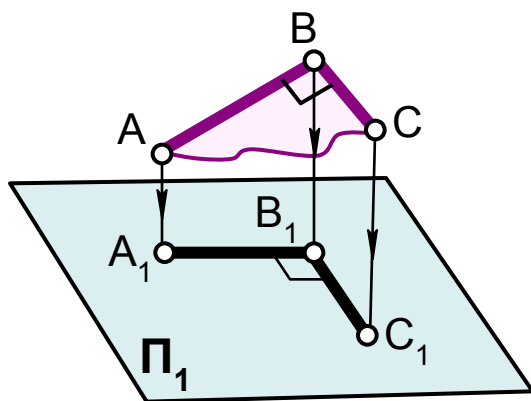
1.  $I \subset \Gamma$   
 $\Gamma \perp \Pi_2$
2.  $\Gamma \cap \Sigma = m$
3.  $m \cap I = K$   
 $m \subset \Sigma \Rightarrow$   
 $\Sigma \cap I = K$

# Перпендикулярность прямой и плоскости

## Прямая перпендикулярна плоскости

Прямая  $a \perp \Sigma$ , если она перпендикулярна двум пересекающимся прямым  $b$  и  $c$  этой плоскости

## Теорема о проецировании прямого угла



Если плоскость прямого угла **не перпендикулярна** плоскости проекций и хотя бы одна его сторона **параллельна** этой плоскости, то прямой угол проецируется на нее без искажения.

$$CB \parallel \Pi_1$$

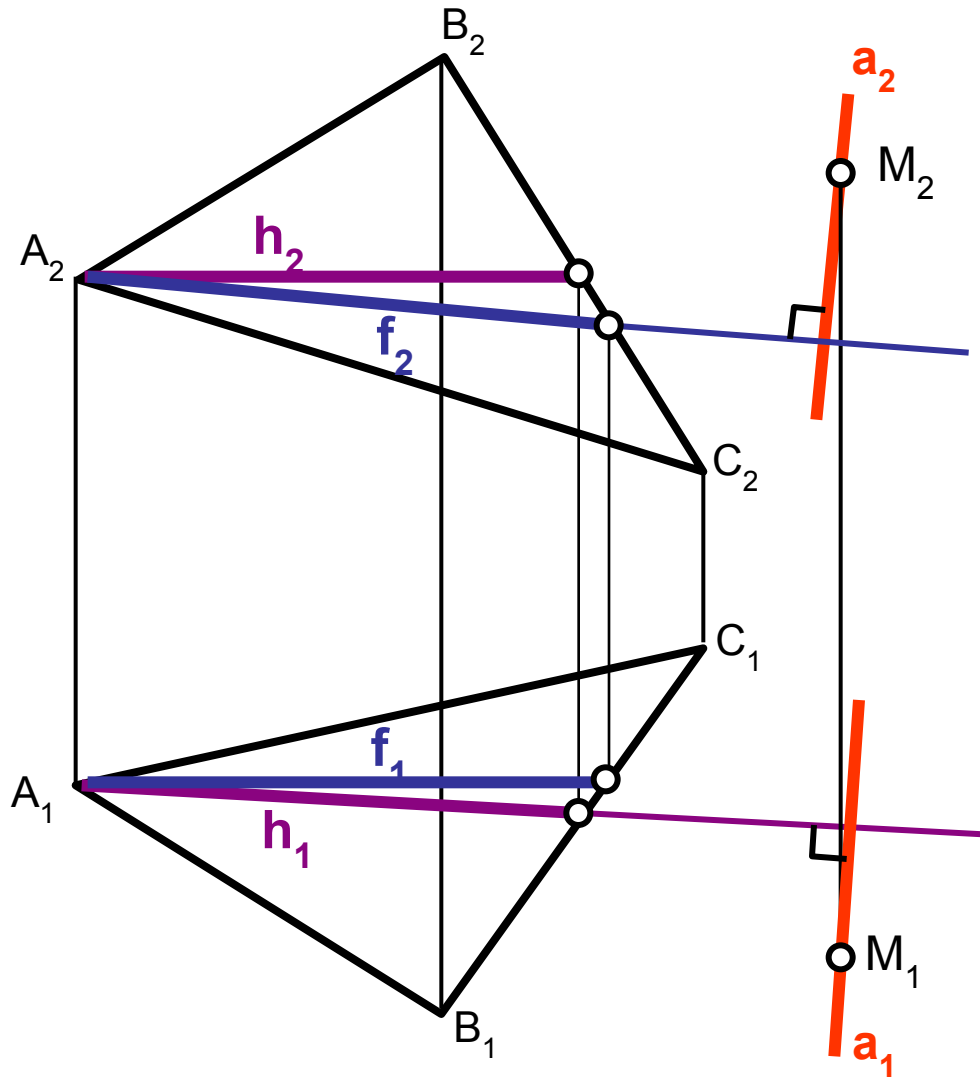
$$\widehat{ACB} = 90^\circ$$

$$\widehat{A_1C_1B_1} = 90^\circ$$

# Прямая перпендикулярна плоскости

## Пример 1

Из точки  $M$  провести прямую, перпендикулярную плоскости  $\Sigma$



Дано:  
 $\Sigma(\triangle ABC) \not\parallel \Pi_1,$   
 $\Pi_1 \not\subset \Sigma$

---


$$a \perp \Sigma$$

Проведем  $h$  и  $f$  в  $\Sigma$

$$a \perp h \quad h \parallel \Pi_1$$

$$a \perp f \quad f \parallel \Pi_2$$

$$h \subset \Sigma \quad f \subset \Sigma$$

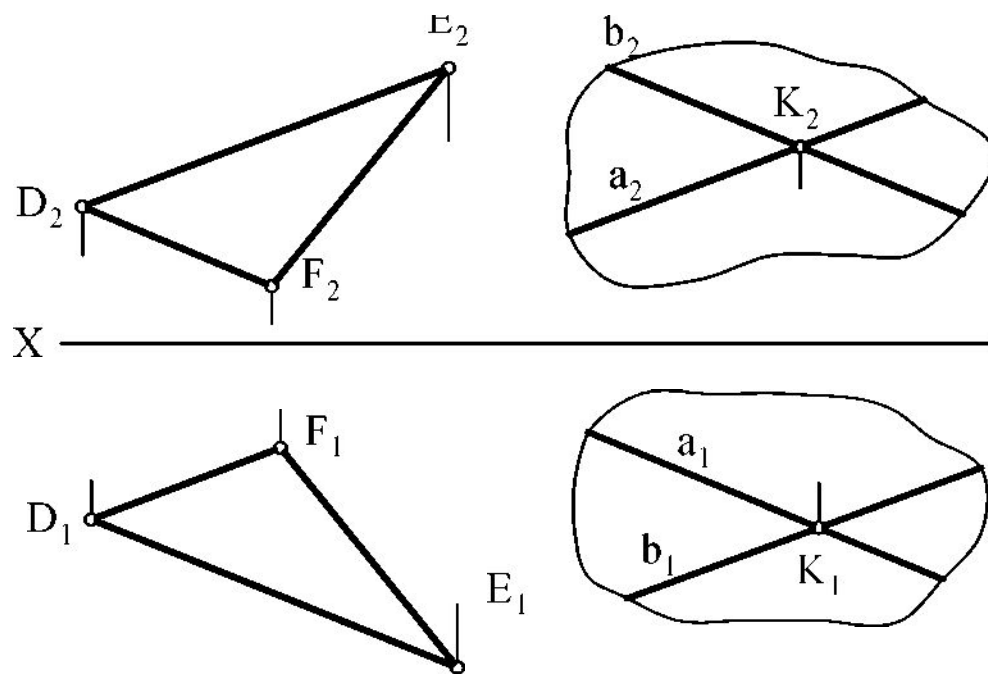
$$a \perp \Sigma$$

# Взаимоположение плоскостей

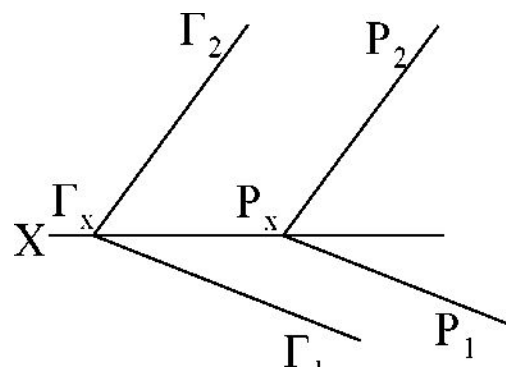
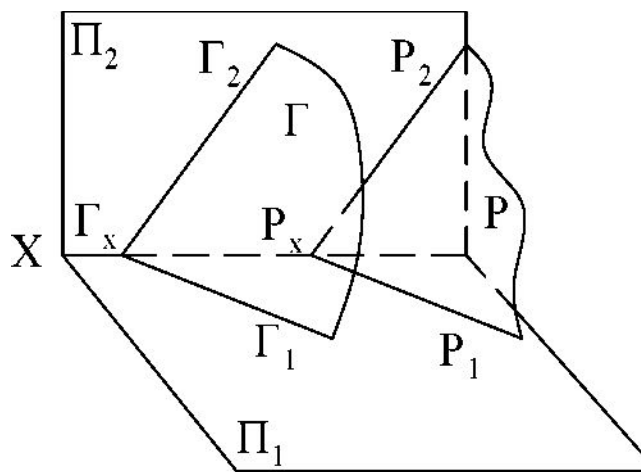
- ❖ Плоскости параллельны
- ❖ Плоскости пересекаются



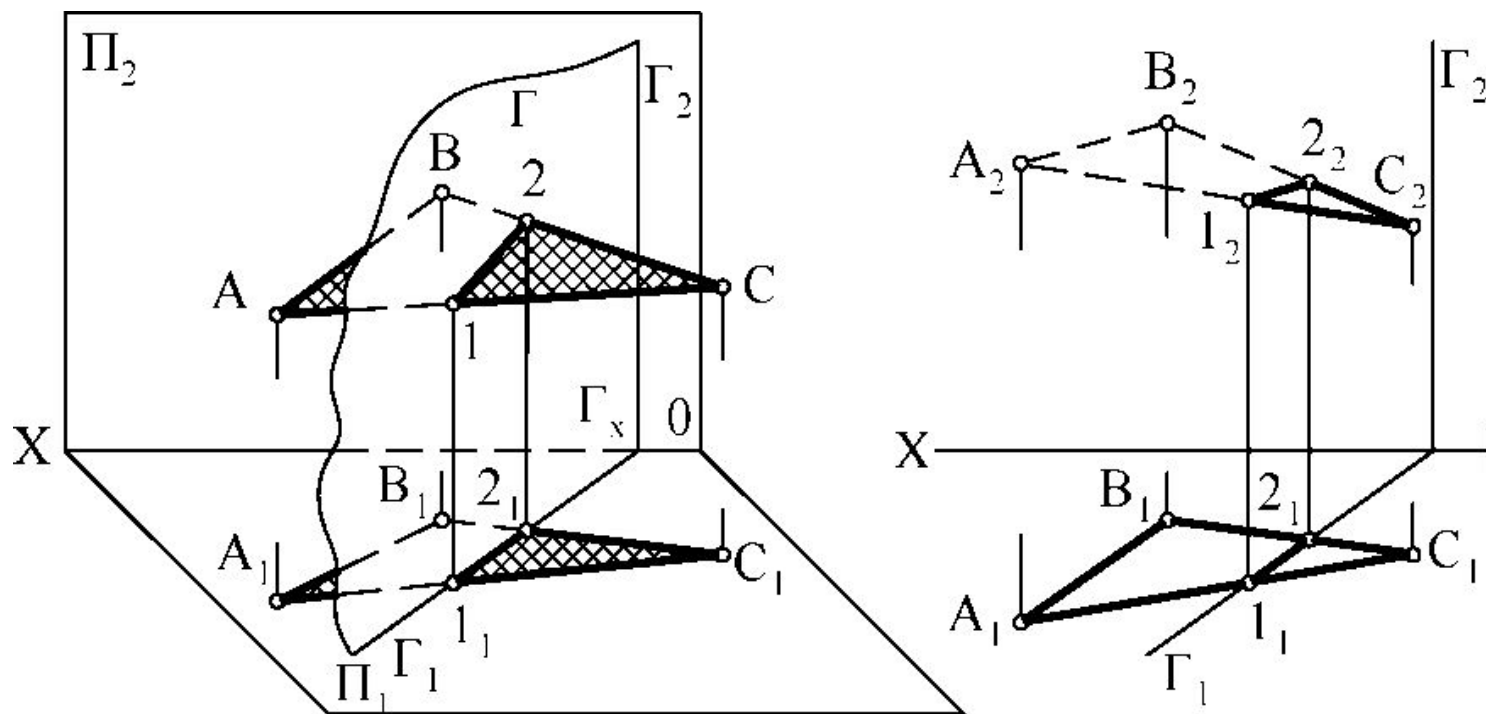
# Плоскости параллельны



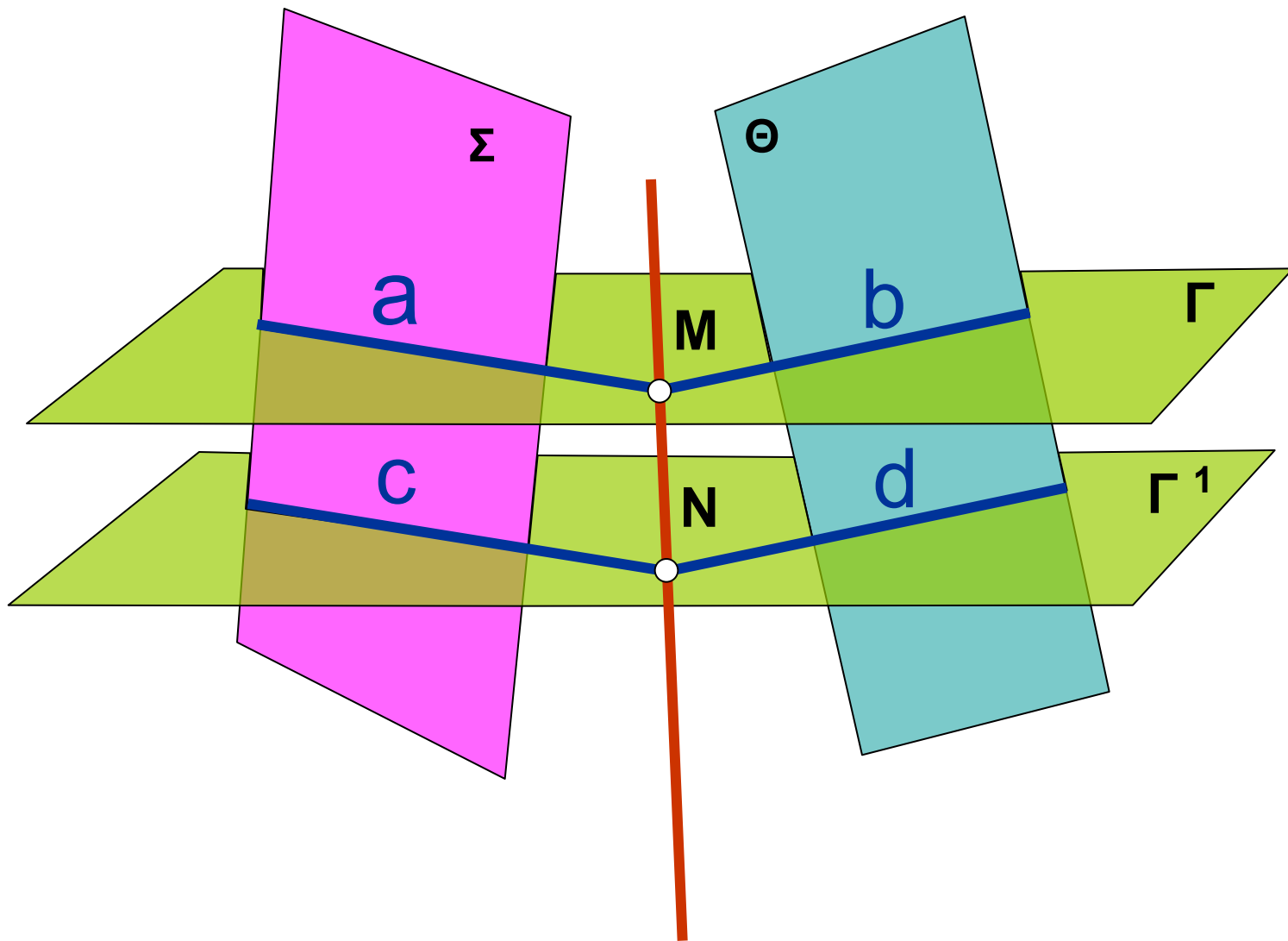
# Плоскости параллельны



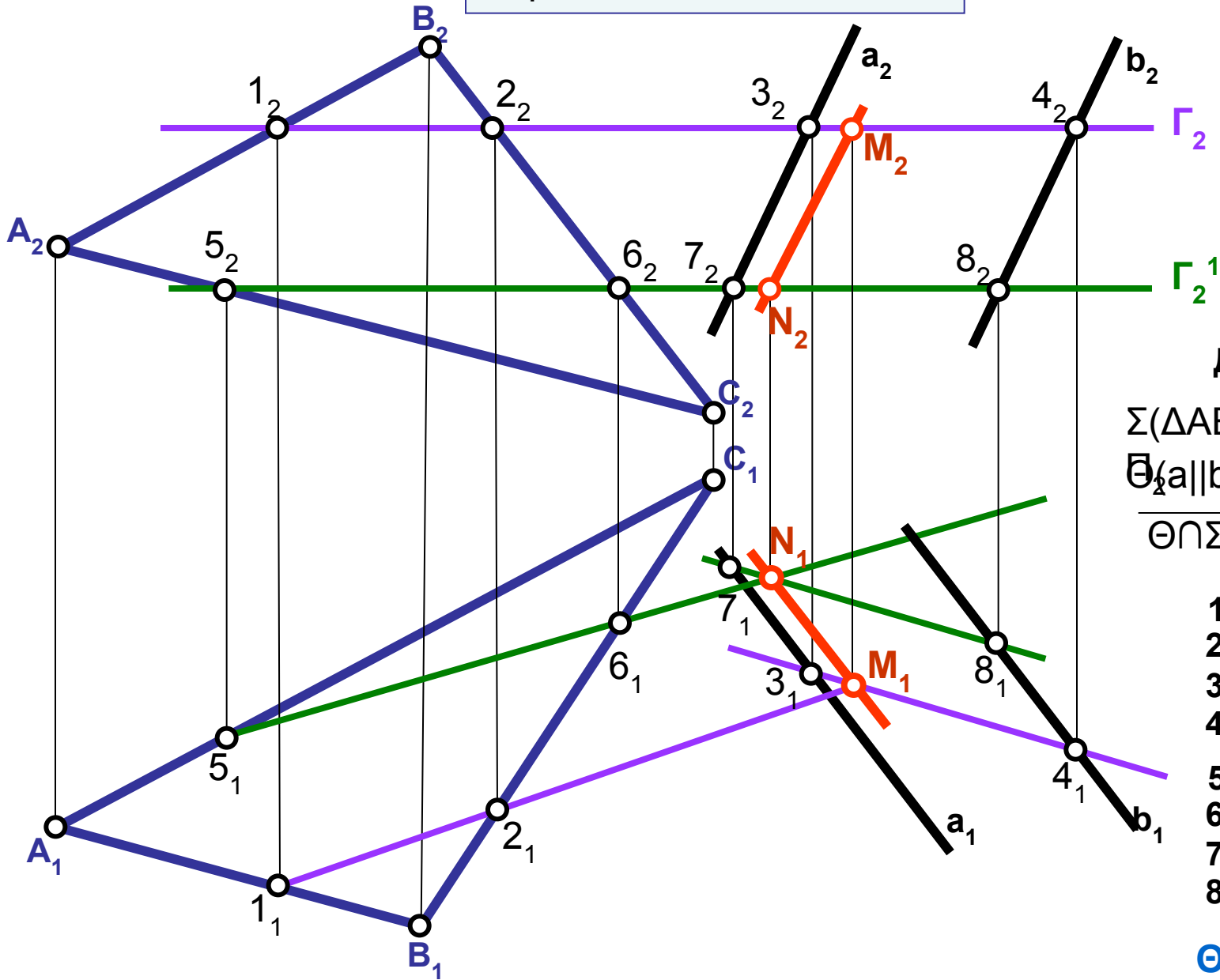
## Пересечение плоскости частного положения с плоскостью общего положения



Определение линии пересечения плоскостей общего положения при помощи вспомогательных плоскостей  $\Gamma$  и  $\Gamma^1$



# Пересечение плоскостей



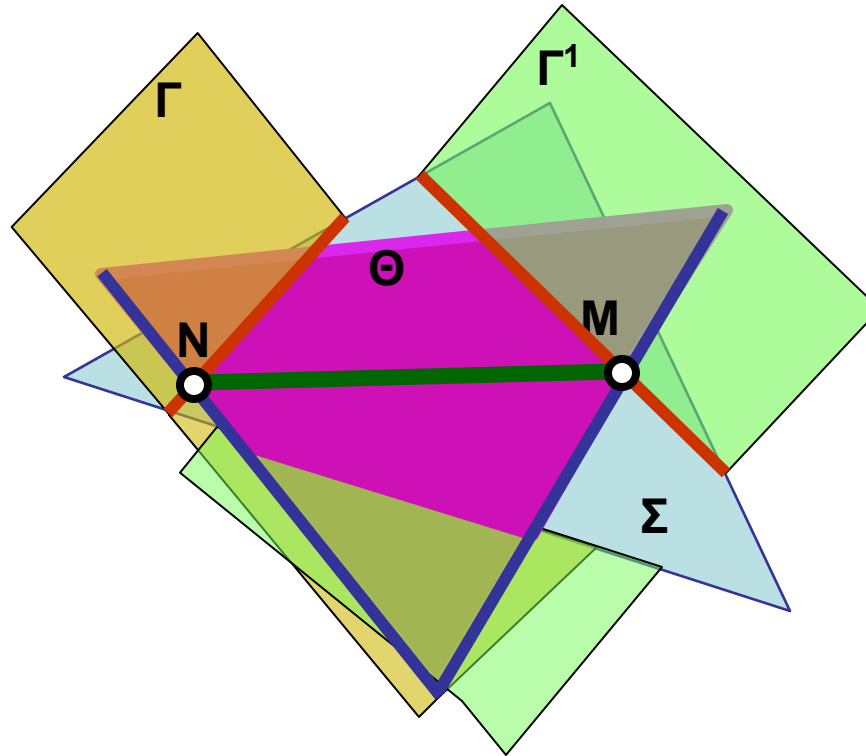
**Дано:**

$\Sigma(\triangle ABC) \not\parallel \perp \Pi_1,$   
 $\Theta(a \parallel b) \not\parallel \perp \Pi_1, \Pi_2$   
 $\Theta \cap \Sigma = MN \text{ -?}$

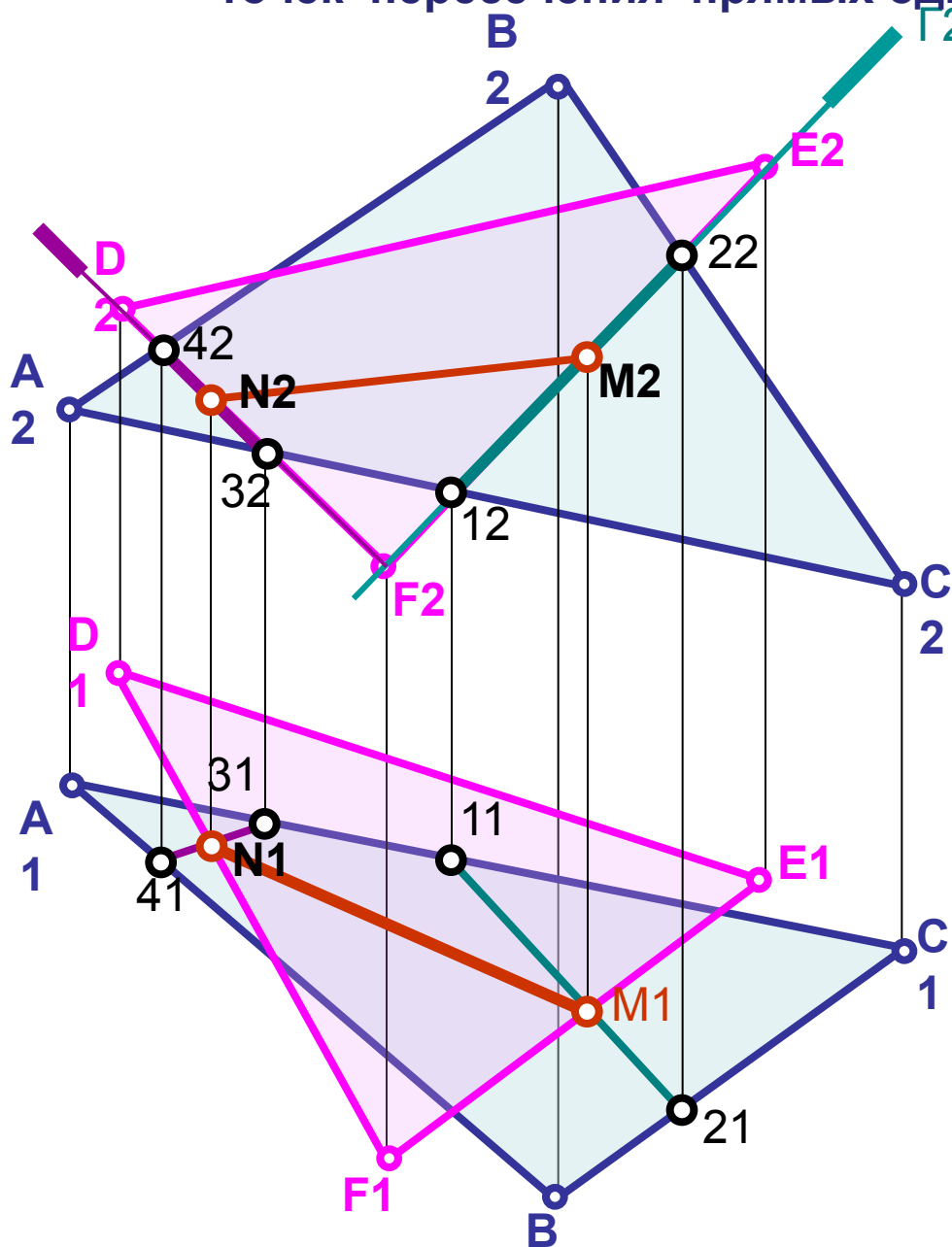
1.  $\Gamma \parallel \Pi_1$
2.  $\Gamma \cap \Sigma = [12]$
3.  $\Gamma \cap \Theta = [34]$
4.  $[12] \cap [34] = M$
5.  $\Gamma' \parallel \Pi_1$
6.  $\Gamma' \cap \Sigma = [56]$
7.  $\Gamma' \cap \Theta = [78]$
8.  $[56] \cap [78] = N$

**$\Theta \cap \Sigma = MN$**

# Определение линии пересечения плоскостей при помощи точек пересечения прямых одной плоскости с другой



# Определение линии пересечения плоскостей при помощи точек пересечения прямых одной плоскости с другой



Дано:

$$\Sigma(\Delta ABC) \parallel \not\perp \not\parallel \Pi_1 \Pi_2$$

$$\Theta(\Delta DTF) \parallel \not\perp \not\parallel \Pi_1, \Pi_2$$

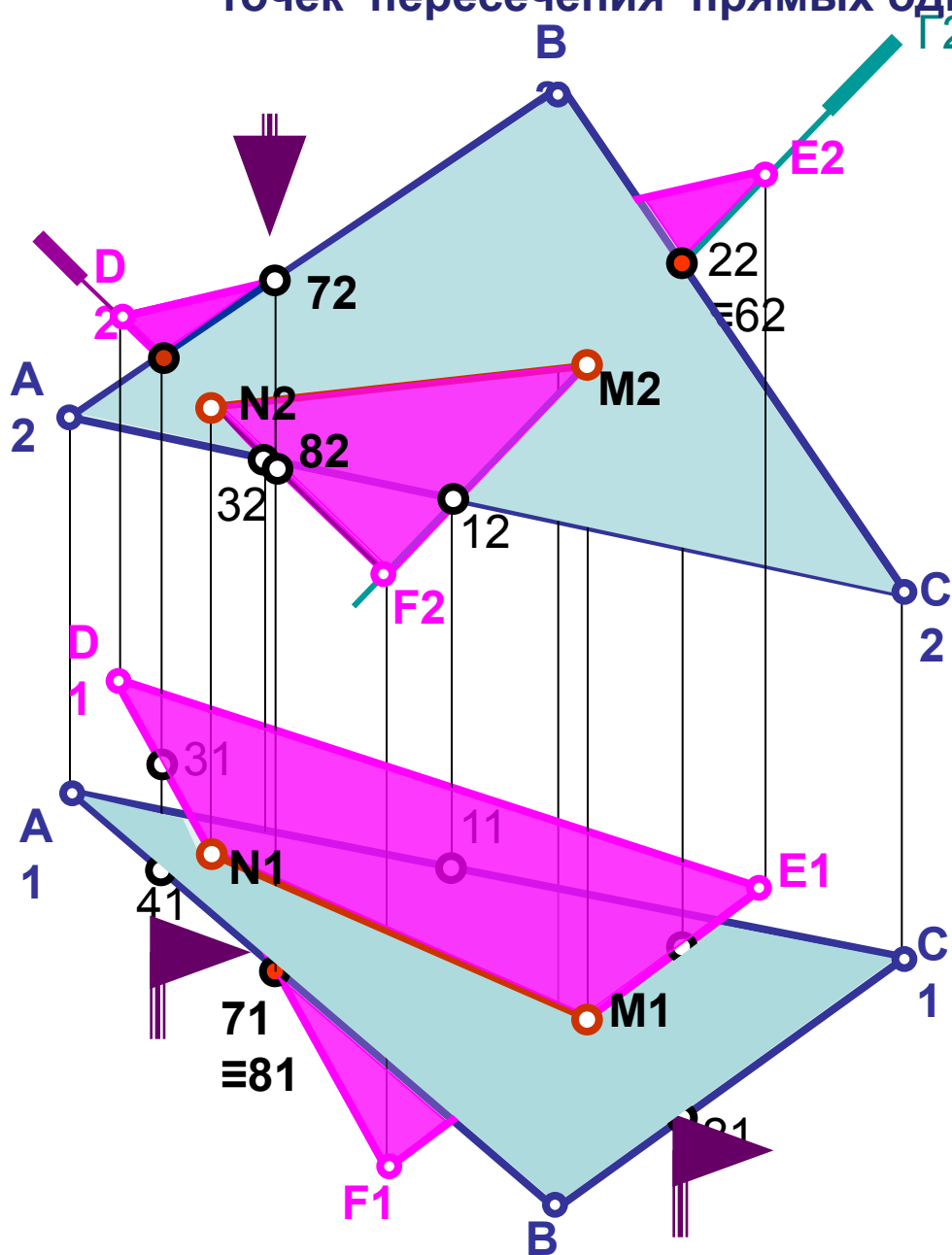
---


$$\Theta \cap \Sigma = MN \text{ -?}$$

1.  $[FE] \subset \Gamma$
2.  $\Gamma \cap \Sigma = [12]$
3.  $[12] \cap [FE] = M$   
 $[12] \subset \Sigma \Rightarrow \Sigma \cap [FE] = M$
4.  $[DF] \subset \Gamma^1$
5.  $\Gamma^1 \cap \Sigma = [34]$
6.  $[34] \cap [DF] = N$   
 $[34] \subset \Sigma \Rightarrow \Sigma \cap [DF] = N$

$$\Theta \cap \Sigma = MN$$

# Определение линии пересечения плоскостей при помощи точек пересечения прямых одной плоскости с другой



Дано:

$\Sigma(\Delta ABC) \not\perp \Pi_1, \Pi_2$

$\Theta(\Delta DTF) \not\perp \Pi_1, \Pi_2$

$\Theta \cap \Sigma = MN$  -?

1.  $[FE] \subset \Gamma$
2.  $\Gamma \cap \Sigma = [12]$
3.  $[12] \cap [FE] = M$   
 $[12] \subset \Sigma \Rightarrow \Sigma \cap [FE] = M$
4.  $[DF] \subset \Gamma^1$
5.  $\Gamma^1 \cap \Sigma = [34]$
6.  $[34] \cap [DF] = N$   
 $[34] \subset \Sigma \Rightarrow \Sigma \cap [DF] = N$

$\Theta \cap \Sigma = MN$