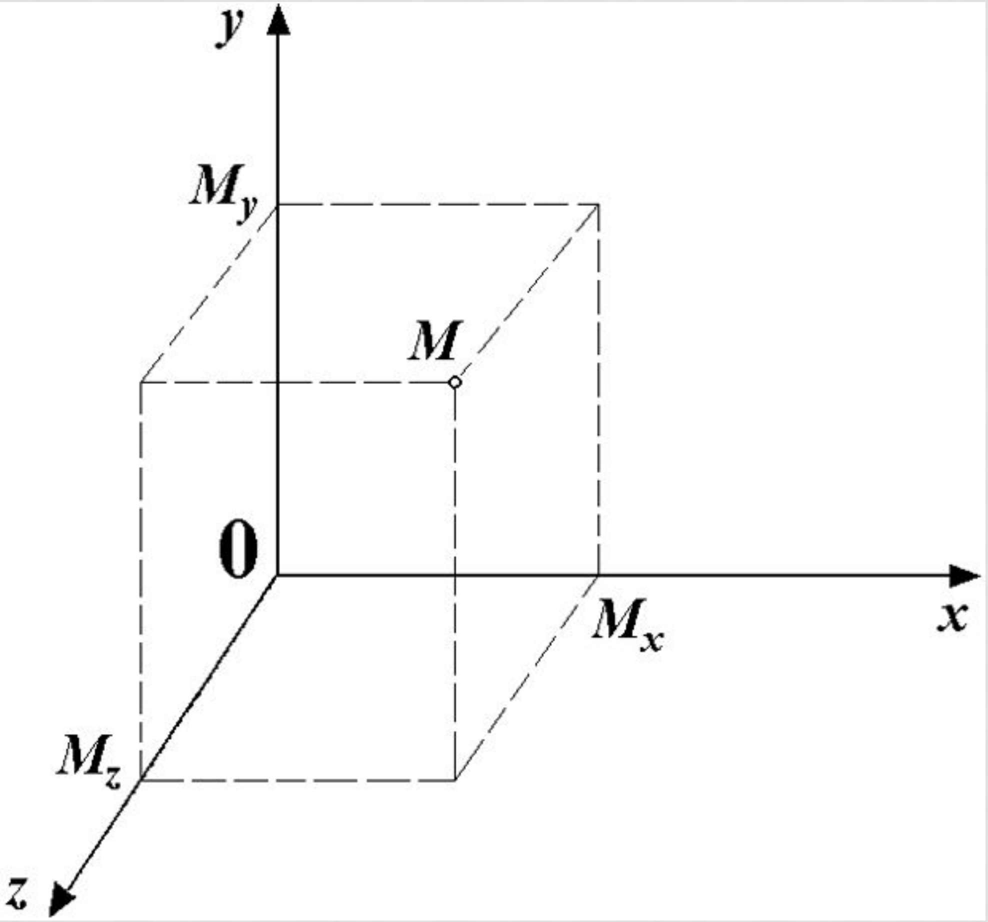
ГЕОМЕТРИЯ В 3D-ПРОСТРАНСТВЕ

ЛЕКЦИЯ 5

КООРДИНАТЫ ТОЧКИ

- В трехмерном пространстве положение каждой точки задается набором из 3 вещественных чисел – координат точки
- Так же, как и в двумерном случае, самыми распространенными являются декартова и полярная системы координат
- Декартовы координаты точки x, y, z – это проекции точки на оси абсцисс (OX), ординат (OY) и аппликат (OZ)

ДЕКАРТОВА СК



СФЕРИЧЕСКИЕ КООРДИНАТЫ

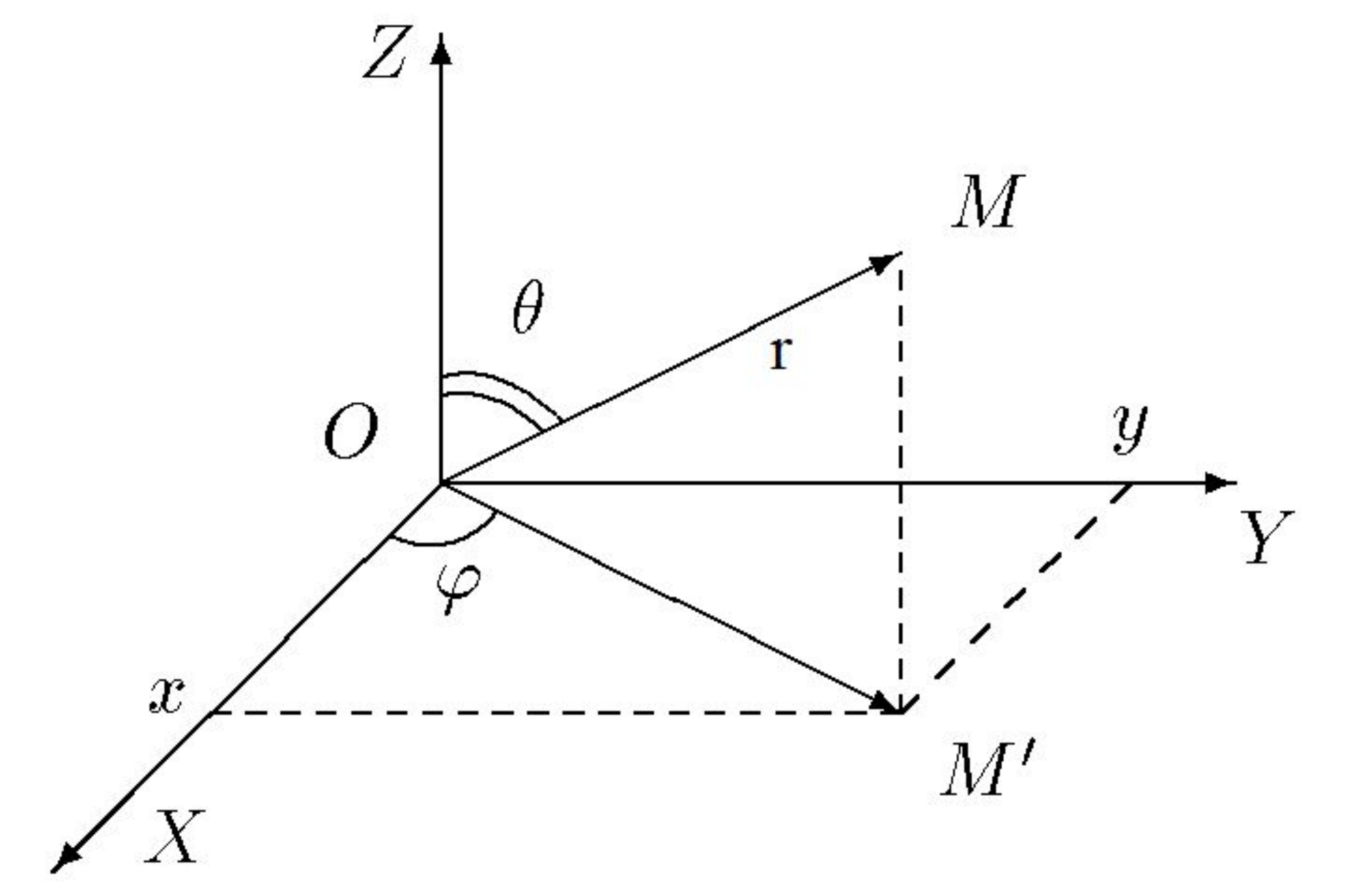
- Сферические координаты являются обобщением полярных координат на случай трехмерного пространства, получаемого путем добавления еще одного координатного угла
- Сферические координаты точки r, θ, φ проще всего ввести, используя декартову систему координат
- В этом случае они имеют следующий смысл:

  r – длина радиус-вектора точки (расстояние до нее от начала координат),

  θ – полярный угол (угол, образованный радиус-вектором точки с осью OZ),

  φ – азимутальный угол (угол, образованный проекцией радиус-вектора точки на плоскость XOY с осью OX)

СФЕРИЧЕСКАЯ СК



ВЗАИМОСВЯЗЬ ДЕКАРТОВЫХ И СФЕРИЧЕСКИХ КООРДИНАТ ТОЧКИ

- Декартовы координаты следующим образом выражаются через полярные:

$$x = r \times \sin(\theta) \times \cos(\varphi)$$

$$y = r \times \sin(\theta) \times \sin(\varphi)$$

$$\mathrm{z} = r \times \cos(\theta)$$

- Соответственно, полярные координаты можно выразить через декартовы:

$$r = \sqrt{x^2 + y^2 + z^2}$$

$$\cos\theta = z/r\ ,\ \tan\varphi = y/x$$

ОБЪЕКТЫ КОНЕЧНЫХ РАЗМЕРОВ

- Для описания объектов конечных размеров с объектом, как и в двумерном случае, связывают *объектную систему координат*
- Как правило, объектная система координат выбирается так, чтобы объект в ней описывался наиболее простым образом
- В частности, при наличии у объекта оси симметрии с ней совмещают одну из координатных осей

ОРИЕНТАЦИЯ ОБЪЕКТА В ПРОСТРАНСТВЕ

- Ориентация объекта в пространстве определяется ориентацией осей объектной системы координат относительно осей мировой СК
- В отличие от случая плоского двумерного пространства в трехмерном пространстве ориентация объектной системы координат относительно мировой системы задается тремя углами, выбор которых может быть сделан по-разному

ПОВОРОТ ОБЪЕКТНОЙ СИСТЕМЫ КООРДИНАТ

- Наиболее часто используется способ, предложенный в 1748 году Леонардом Эйлером, а соответствующий набор углов называют *эйлеровыми углами*
- Эйлеровы углы можно рассматривать как углы трех последовательных поворотов, в результате которых оси X′,Y′,Z′ одной декартовой системы координат (объектной) становятся параллельными осям X,Y,Z другой декартовой системы координат (мировой)

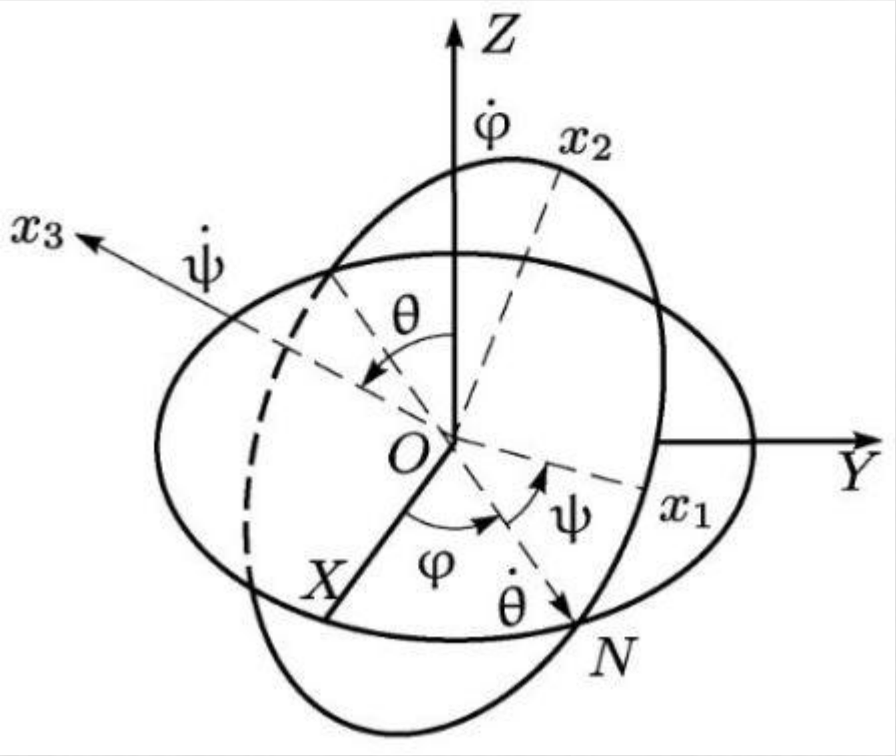
ЭЙЛЕРОВЫ УГЛЫ

- Согласно Эйлеру для этого необходимо выполнить следующую последовательность поворотов
  - поворот вокруг оси Z' на угол ψ, называемый *углом прецессии,* такой, чтобы ось абсцисс ОСК совпала с нормалью к плоскости ZZ'; оси абсцисс и ординат переходят в положения X'' и Y'', соответственно, причем X'' оказывается в плоскости XOY, перпендикулярной оси Z

ЭЙЛЕРОВЫ УГЛЫ

- поворот вокруг оси X'' на угол θ, называемый *углом нутации,* такой, чтобы ось Z' совпала с осью Z; при этом ось ординат ОСК также оказывается в плоскости XOY и занимает положение Y'''
- поворот вокруг оси Z на угол ϕ, называемый *углом собственного вращения,* такой, что оси абсцисс и ординат совпали с осями X и Y, соответственно

ПОВОРОТ ОБЪЕКТНОЙ СИСТЕМЫ КООРДИНАТ



ФОРМУЛЫ ПРЕОБРАЗОВАНИЙ

Преобразование координат

- Декартовы координаты следующим образом выражаются через полярные:

$$x = r \times \sin(\theta) \times \cos(\varphi)$$
$$y = r \times \sin(\theta) \times \sin(\varphi)$$
$$z = r \times \cos(\theta)$$

- Соответственно, полярные координаты можно выразить через декартовы:

$$r = \sqrt{x^2 + y^2 + z^2}$$
$$\cos\theta = z/r\ ,\ \tan\varphi = y/x$$

- Декартовы координаты следующим образом выражаются через полярные:

$$x = r \times \sin(\theta) \times \cos(\varphi)$$
$$y = r \times \sin(\theta) \times \sin(\varphi)$$
$$z = r \times \cos(\theta)$$

- Соответственно, полярные координаты можно выразить через декартовы:

$$r = \sqrt{x^2 + y^2 + z^2}$$
$$\cos\theta = z/r\ ,\ \tan\varphi = y/x$$

- Декартовы координаты следующим образом выражаются через полярные:

$$x = r \times \sin(\theta) \times \cos(\varphi)$$
$$y = r \times \sin(\theta) \times \sin(\varphi)$$
$$z = r \times \cos(\theta)$$

- Соответственно, полярные координаты можно выразить через декартовы:

$$r = \sqrt{x^2 + y^2 + z^2}$$
$$\cos\theta = z/r\ ,\ \tan\varphi = y/x$$

Матрица поворота

- Декартовы координаты следующим образом выражаются через полярные:

$$x = r \times \sin(\theta) \times \cos(\varphi)$$
$$y = r \times \sin(\theta) \times \sin(\varphi)$$
$$z = r \times \cos(\theta)$$

- Соответственно, полярные координаты можно выразить через декартовы:

$$r = \sqrt{x^2 + y^2 + z^2}$$
$$\cos\theta = z/r\ ,\ \tan\varphi = y/x$$

ОБЛАСТЬ ПРИМЕНЕНИЯ ЭЙЛЕРОВЫХ УГЛОВ

- Эйлеровы углы традиционно используются в механике для задания ориентации твердого тела в трехмерном пространстве
- Однако это сопряжено с определенным неудобством, связанным с вращением вокруг промежуточного положения одной из осей
- В компьютерной графике применяют аффинные преобразования координат, избавленные от этого недостатка

АФФИННЫЕ ПРЕОБРАЗОВАНИЯ

- В трехмерном пространстве (3D) положение точки может быть задано в однородных координатах p(x, y, z, 1)
- Любое аффинное преобразование в 3D-пространстве также как и в пространстве двумерном можно представить в виде суперпозиции операций поворота, растяжения, отражения и переноса

МАТРИЦЫ ВРАЩЕНИЯ

- Вращение на угол φ вокруг оси абсцисс:

$$R_x(\varphi) = \begin{vmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & \cos(\varphi) & \sin(\varphi) & 0 \\ 0 & -\sin(\varphi) & \cos(\varphi) & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \end{vmatrix}$$

МАТРИЦЫ ВРАЩЕНИЯ

- Вращение на угол ψ вокруг оси ординат:

$$R_y(\psi) = \begin{vmatrix} \cos(\psi) & 0 & -\sin(\psi) & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 0 \\ \sin(\varphi) & 0 & \cos(\psi) & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \end{vmatrix}$$

МАТРИЦЫ ВРАЩЕНИЯ

- Вращение на угол χ вокруг оси аппликат :

$$R_z(\chi) = \begin{vmatrix} \cos(\chi) & \sin(\chi) & 0 & 0 \\ -\sin(\chi) & \cos(\chi) & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \end{vmatrix}$$

ПРОЧИЕ МАТРИЦЫ

- Матрицы растяжения/сжатия, матрицы отражения относительно координатных плоскостей и матрица перемещения легко могут быть построены по аналогии с 2D-пространством

ПОВОРОТ ОБЪЕКТНОЙ СИСТЕМЫ КООРДИНАТ

- Так же, как и при использовании эйлеровых углов, совмещение осей объектной системы координат с осями мировой системы координат достигается тремя поворотами
- Для совмещения оси OZ′ с осью OZ необходимо выполнить два поворота
- Поворот на некоторый угол φ вокруг оси OX до совмещения оси OZ′ с плоскостью XOZ; при этом оси OZ и OZ′ оказываются лежащими в одной плоскости

ПОВОРОТ ОБЪЕКТНОЙ СИСТЕМЫ КООРДИНАТ

Математически такой поворот описывается следующей матричной операцией:

$(x'', y'', z'', 1) = (x', y', z', 1) * R_x(\varphi)$

2. Поворот на некоторый угол ψ вокруг оси OY до совмещения оси OZ′ с осью OZ; при этом плоскость X″OY″ совмещается с плоскостью XOY:

$(x''', y''', z, 1) = (x'', y'', z'', 1) * R_y(\psi)$

ПОВОРОТ ОБЪЕКТНОЙ СИСТЕМЫ КООРДИНАТ

- Последний поворот выполняется на некоторый угол χ вокруг оси OZ до совмещения осей OX‴ и OY‴ с осями OX и OY, соответственно:

  $(x, y, z, 1) = (x''', y''', z, 1) * R_z(\chi)$
- Таким образом, имеем:

  $(x, y, z, 1) = (x', y', z', 1) * R(\varphi, \psi, \chi)$,

где $R(\varphi, \psi, \chi) = R_x(\varphi) * R_y(\psi) * R_z(\chi)$

МАТРИЦА ПОВОРОТА

- Полная матрица поворота, полученная перемножением трех матриц имеет вид:

$$R(\varphi, \psi, \chi) = \begin{vmatrix} \cos(\psi)*\cos(\chi) & \cos(\psi)*\sin(\chi) & -\sin(\psi) & 0 \\ \begin{matrix}\sin(\varphi)*\sin(\psi)*\cos(\chi) \\ -\cos(\varphi)*\sin(\chi)\end{matrix} & \begin{matrix}\sin(\varphi)*\sin(\psi)*\sin(\chi) \\ +\cos(\varphi)*\cos(\chi)\end{matrix} & \sin(\varphi)*\cos(\psi) & 0 \\ \begin{matrix}\cos(\varphi)*\sin(\psi)*\cos(\chi) \\ +\sin\varphi)*\sin(\chi)\end{matrix} & \begin{matrix}\cos(\varphi)*\sin(\psi)*\sin(\chi) \\ -\sin\varphi)*\cos(\chi)\end{matrix} & \cos(\varphi)*\cos(\psi) & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \end{vmatrix}$$

АЛГОРИТМЫ ПРОЕЦИРОВАНИЯ

ЗАДАЧА ПРОЕЦИРОВАНИЯ

- Отображение некоторого множества точек S пространства R^n на другое пространство R^m той же или меньшей размерности называется проецированием S на R^m, а полученный образ - проекцией S
- Частным случаем проецирования является изображение трехмерного объекта на плоскости.

ПОСТРОЕНИЕ ПРОЕКЦИЙ

- Для построения проекции выбирается некоторая точка – центр проецирования – и плоскость проецирования или картинная плоскость
- Из центра проецирования через каждую точку P изображаемого объекта проводится луч, пересечение которого с *картинной плоскостью* является проекцией P' этой точки на плоскость

ВИДЫ ПРОЕКЦИЙ

- Если в качестве центра проецирования выбирается собственная точка пространства R^3, то проекция называется *центральной* (*перспективной*), а проецирующий пучок лучей является расходящимся.
- Если же центром проецирования является несобственная точка, лучи проецирующего пучка параллельны и проекция называется *параллельной*.

ВИДЫ ПАРАЛЛЕЛЬНЫХ ПРОЕКЦИЙ

- В зависимости от расположения картинной плоскости и координатных осей параллельные проекции делятся на
  - *ортографические*,
  - *аксонометрические*,
  - *косоугольные*.

ОРТОГРАФИЧЕСКИЕ ПРОЕКЦИИ

Картинная плоскость совпадает с одной из координатных плоскостей или параллельна ей. Матрица проецирования вдоль оси X на плоскость YOZ имеет вид:

$$P_x = \begin{pmatrix} 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}$$

ОРТОГРАФИЧЕСКИЕ ПРОЕКЦИИ

- В случае, если картинная плоскость параллельна плоскости YOZ, матрица проецирования умножается на матрицу параллельного сдвига вдоль оси X.

$$P_x = \begin{pmatrix} 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 0 \\ p & 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}$$

ОРТОГРАФИЧЕСКИЕ ПРОЕКЦИИ

- Аналогичным образом могут быть получены матрицы проецирования вдоль двух других координатных осей:

$$P_y = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & q & 0 & 1 \end{pmatrix} \qquad P_z = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & r & 1 \end{pmatrix}$$

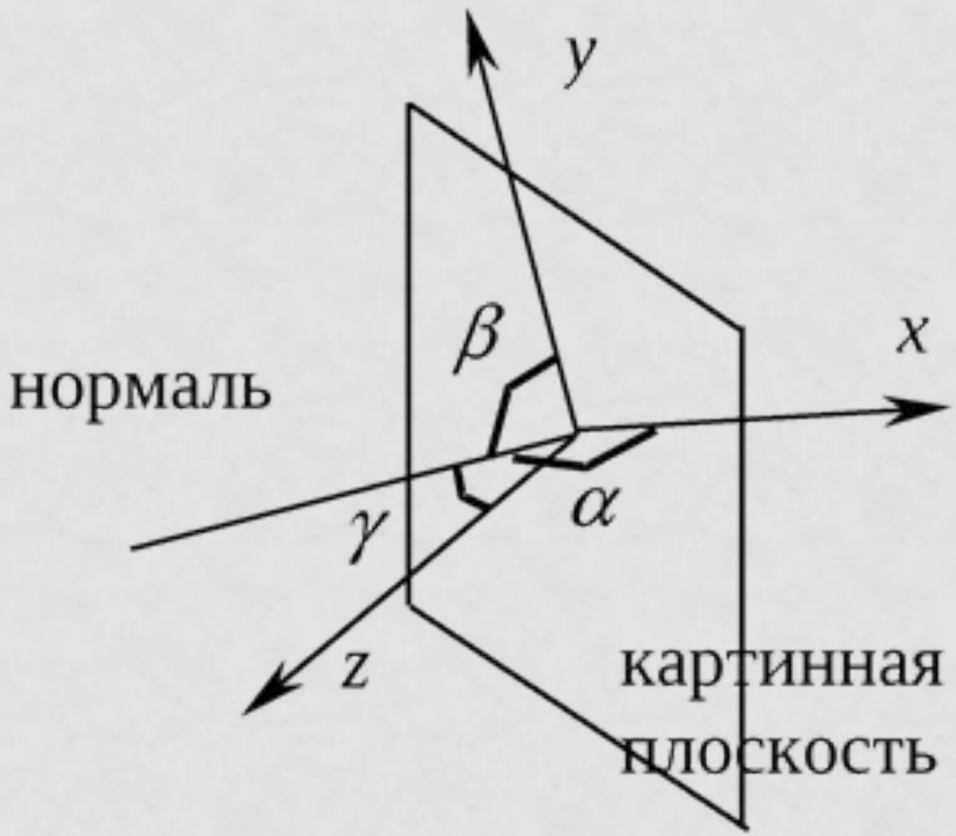
ВЫРОЖДЕННОСТЬ МАТРИЦ

- Матрицы проецирования являются ***вырожденными***, т.е. проецирование является необратимой операцией
- Это отражает тот очевидный факт, что любое проецирование связано с потерей части информации об объекте, так что полное восстановление объекта по его единственной проекции невозможно

АКСОНОМЕТРИЧЕСКИЕ ПРОЕКЦИИ

- При аксонометрической проекции проектирующие прямые также перпендикулярны картинной плоскости, однако сама картинная плоскость ориентирована в пространстве произвольным образом
- Ориентация картинной плоскости задается вектором нормали к этой плоскости

АКСОНОМЕТРИЧЕСКОЕ ПРОЕЦИРОВАНИЕ



ВИДЫ АКСОНОМЕТРИЧЕСКИХ ПРОЕКЦИЙ

- В соответствии со взаимным расположением картинной плоскости и координатных осей различают три вида аксонометрических проекций:
  - *триметрическая проекция* –вектор нормали к картинной плоскости образует с осями координат попарно различные углы;
  - *диметрическая проекция* – два из трех указанных углов равны;
  - *изометрическая проекция* – все углы равны.

ПОСТРОЕНИЕ АКСОНОМЕТРИЧЕСКОЙ ПРОЕКЦИИ

- Любая аксонометрическая проекция может быть получена комбинацией поворота до совмещения нормали к картинной плоскости с одной из координатных осей и последующего ортографического проецирования:

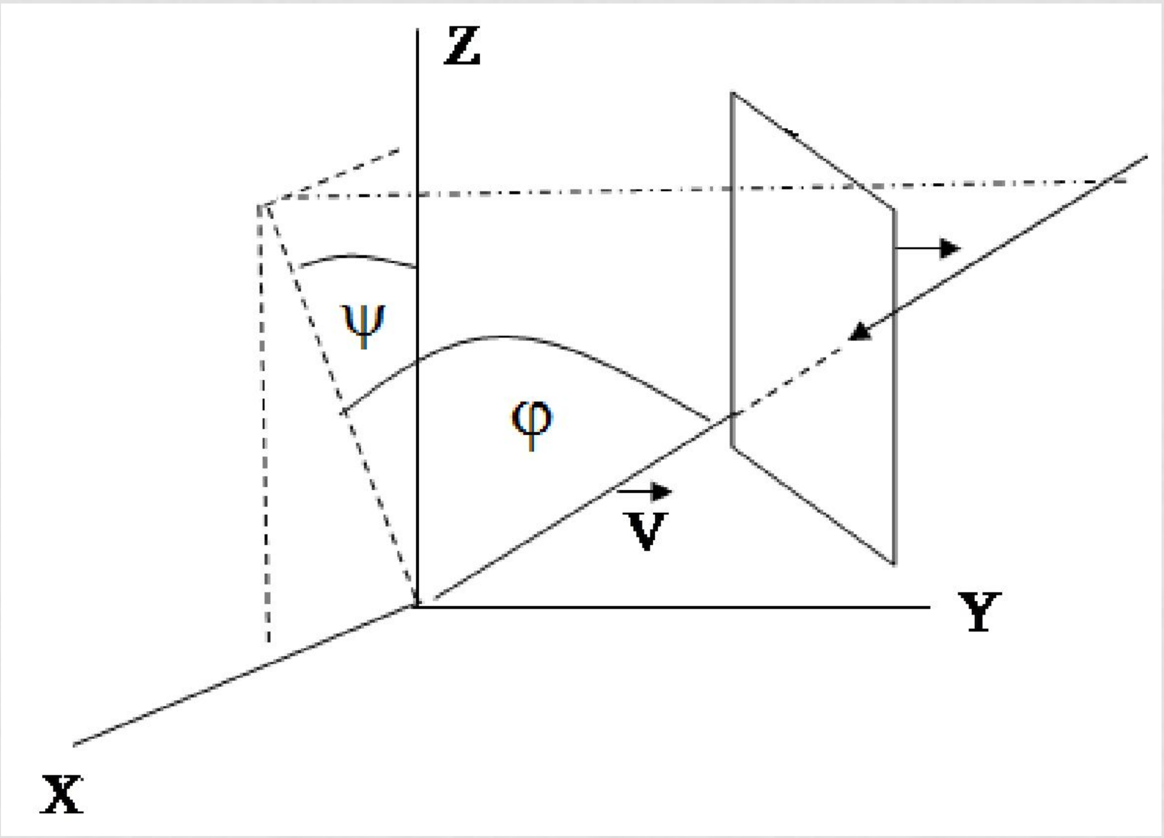
$$M = R * P$$

- Для совмещения произвольного вектора с координатной осью в пространстве требуется выполнить два поворота

ВЫБОР ПЛОСКОСТИ ПРОЕЦИРОВАНИЯ

- В дальнейшем мы будем рассматривать фронтальные проекции объектов, то есть в качестве картинной плоскости выбирать плоскость XOY мировой системы координат
- Соответственно, перед выполнением фронтального проецирования потребуется совместить вектор нормали к картинной плоскости с осью OZ мировой системы координат

ВЫБОР УГЛОВ ПОВОРОТА



МАТРИЦА ПОВОРОТА

- Совмещение вектора нормали к картинной плоскости с осью OZ мировой системы координат достигается выполнением двух последовательных поворотов:

$$R = R_y(\Psi) * R_x(\varphi)$$

$$R_y = \begin{vmatrix} \cos(\psi) & 0 & -\sin(\psi) & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 0 \\ \sin(\psi) & 0 & \cos(\psi) & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \end{vmatrix} \qquad R_x = \begin{vmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & \cos(\varphi) & \sin(\varphi) & 0 \\ 0 & -\sin(\varphi) & \cos(\varphi) & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \end{vmatrix}$$

ПОСТРОЕНИЕ АКСОНОМЕТРИЧЕСКОЙ ПРОЕКЦИИ

- После перемножения матриц $R_y(\Psi)$ и $R_x(\varphi)$, а также последующего проецирования вдоль оси Z матрица преобразования примет вид:

$$M = \begin{pmatrix} \cos\psi & \sin\varphi * \sin\psi & 0 & 0 \\ 0 & \cos\varphi & 0 & 0 \\ \sin\psi & -\sin\varphi * \cos\psi & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}$$

ТРИМЕТРИЧЕСКАЯ ПРОЕКЦИЯ

- При таком проецировании единичные орты координатных осей преобразуются следующим образом:

$\mathbf{e}_x$*M=(1 0 0 1)*M=(cosψ, sinφ *sin ψ, 0, 1)

$\mathbf{e}_y$*M=(0 1 0 1)*M=(0, cosφ, 0, 1)

$\mathbf{e}_z$*M=(0 0 1 1)*M=(sinψ, -sinφ *sin ψ, 0, 1)

ДИМЕТРИЧЕСКАЯ ПРОЕКЦИЯ

- Равенство углов между нормалью к картинной плоскости и двумя координатными осями означает равенство проекций соответствующих ортов
- Например, равенство углов нормали с осями абсцисс и ординат означает, что:

$$\cos^2\psi + \sin^2\varphi * \sin^2\psi = \cos^2\varphi$$

ДИМЕТРИЧЕСКАЯ ПРОЕКЦИЯ

- Отсюда следует, что

$$\sin^2\psi = \mathrm{tg}^2\,\varphi$$

- Теперь углы поворота вокруг осей ординат и абсцисс уже не являются независимыми и задание одного из них определяет возможные значения другого угла
- Так, для $\psi=\pi/4$ угол φ может иметь значения, равные $\pm\,\mathrm{arctg}\,(\sqrt{1/2})$

ДИМЕТРИЧЕСКАЯ ПРОЕКЦИЯ

- Аналогичным образом могут быть рассмотрены две другие диметрические проекции, соответствующие другим возможным выборам пар равных углов
- Вводится понятие стандартной диметрической проекции, при которой длины проекций единичных ортов на картинную плоскость находятся в отношении 2 : 2 : 1

СТАНДАРТНАЯ ДИМЕТРИЧЕСКАЯ ПРОЕКЦИЯ

- Тогда из условий

$$\sin^2\psi = \mathrm{tg}^2\varphi$$

и

$$\cos^2\varphi = 4*(\sin^2\psi + \sin^2\varphi * \cos^2\psi)$$

получим

$$\mathrm{tg}^2\varphi = 1/8,$$

что приблизительно соответствует углам

$\varphi = \pm$ 19,5° и $\psi = \pm$ 20,7°

СТАНДАРТНАЯ ДИМЕТРИЧЕСКАЯ ПРОЕКЦИЯ

- В случае, когда единичный вектор нормали к картинной плоскости лежит в 1-м октанте, $\varphi > 0$ и $\psi < 0$ и матрица диметрического проецирования равна:

$$M = \begin{pmatrix} 0,935 & -0,118 & 0 & 0 \\ 0 & 0,943 & 0 & 0 \\ -0,354 & -0,312 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}$$

ИЗОМЕТРИЧЕСКАЯ ПРОЕКЦИЯ

- В этом случае все три проекции единичных ортов равны между собой, что приводит к равенствам:

$$\cos^2\psi + \sin^2\varphi * \sin^2\psi = \cos^2\varphi$$

$$\sin^2\psi + \sin^2\varphi * \cos^2\psi = \cos^2\varphi$$

- Откуда следует, что

$$\sin^2\varphi = 1/3, \ \sin^2\psi = 1/2.$$

СТАНДАРТНАЯ ИЗОМЕТРИЧЕСКАЯ ПРОЕКЦИЯ

- Соответствует выбору $\psi = \pi/4$
- В этом случае матрица проецирования принимает вид:

$$M = \begin{pmatrix} 0{,}707 & -0{,}408 & 0 & 0 \\ 0 & 0{,}816 & 0 & 0 \\ -0{,}707 & -0{,}408 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}$$

КОСОУГОЛЬНЫЕ ПРОЕКЦИИ

- При косоугольном проецировании пучок проецирующих лучей не перпендикулярен картинной плоскости. Косоугольные проекции сочетают в себе свойства ортографических и аксонометрических проекций.
- При косоугольном проектировании орта $\mathbf{e}_z$ на плоскость XY имеем:

$$(0, 0, 1, 1) \rightarrow (\alpha, \beta, 0, 1)$$

КОСОУГОЛЬНЫЕ ПРОЕКЦИИ

Матрица соответствующего преобразования имеет вид:

$$\begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 0 \\ \alpha & \beta & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}$$

ВИДЫ КОСОУГОЛЬНЫХ ПРОЕКЦИЙ

- Выделяют два вида косоугольных проекций:
  - свободную,
  - кабинетную.
- В случае свободной проекции угол наклона проецирующего пучка к картинной плоскости равен $\pi/4$ и, соответственно

$$\alpha = \beta = \cos \pi/4.$$

ВИДЫ КОСОУГОЛЬНЫХ ПРОЕКЦИЙ

- Кабинетная проекция является частным случаем свободной проекции – масштаб по оси Z вдвое меньше. Тогда

$$\alpha = \beta = 0{,}5 * \cos \pi/4.$$

ЦЕНТРАЛЬНЫЕ ПРОЕКЦИИ

- Пусть центр проецирования – точка С с координатами (0, 0, с) на оси Z и картинная плоскость совпадает с координатной плоскостью XY. Тогда уравнение прямой, проходящей через точку С и произвольную точку $M(x_0,y_0,z_0)$ будет иметь вид:

$$x=x_0*t;\ y=y_0*t;\ z=c+(z_0-c)*t.$$

ЦЕНТРАЛЬНЫЕ ПРОЕКЦИИ

- Эта прямая пересекается с картинной плоскостью в точке с координатами

$$x_0' = c*x_0/(c-z_0);\ y_0' = c*y_0/(c-z_0);\ z_0' = 0.$$

- Полученный результат соответствует преобразованию координат точки М с помощью матрицы

$$\begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & -1/c \\ 0 & 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}$$

ЦЕНТРАЛЬНАЯ ПРОЕКЦИЯ ТОЧКИ

- В случае, когда центр проецирования имеет координаты (c_x, c_y, c_z), а картинная плоскость, по-прежнему, совпадает с координатной плоскостью XOY матрица проецирования имеет вид:

$$\begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 0 \\ -c_x/c_z & -c_y/c_z & 0 & -1/c_z \\ 0 & 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}$$

ЦЕНТРАЛЬНАЯ ПРОЕКЦИЯ ТОЧКИ

- Аналогичным образом можно получить матрицы центрального проецирования на плоскость XOZ

$$\begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 \\ -c_x/c_y & 0 & -c_z/c_y & -1/c_y \\ 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}$$

ЦЕНТРАЛЬНАЯ ПРОЕКЦИЯ ТОЧКИ

- и на плоскость YOZ

$$\begin{pmatrix} 0 & -c_y/c_x & -c_z/c_x & -1/c_x \\ 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}$$

ЦЕНТРАЛЬНАЯ ПРОЕКЦИЯ ПРЯМОЙ

- Центральной проекцией прямой также является прямая. Пусть

$$\mathbf{p}(t) = \mathbf{p}_0 + \mathbf{V}t$$

- При центральном проецировании точки с координатами (x, y, z, 1) этой прямой на плоскость XY получим:

$$x' = (x_0 - s_x z_0 + (V_x - s_x V_z)t)/(1 - s_f z_0 - s_f V_z t),$$

$$y' = (x_0 - s_y z_0 + (V_y - s_y V_z)t)/(1 - s_f z_0 - s_f V_z t),\ z' = 0$$

ОСНОВНОЕ СВОЙСТВО ЦП

- В пределе при $t \to \infty$ получим

  $$\lim p'(t) = (c_x - V_x c_z / V_z,\ c_y - V_y c_z / V_z,\ 0,\ 1)$$

- Это значит, что предельное положение (точка схода) прямой линии *не зависит* от положения точки p_0, а определяется только положением центра проецирования С и направляющим вектором V
- Следовательно, *пучок параллельных прямых проецируется в сходящийся пучок*