Симплекс-метод

- Впервые симплексный метод был предложен американским ученым Дж. Данцигом в 1949 году, однако еще в 1939 году идеи метода были разработаны российским ученым А.В. Канторовичем.
- СМ решения задачи ЛП основан на переходе от одного допустимого решения к другому, при котором значение ЦФ возрастает.
- Указанный переход возможен, если известно какое-нибудь допустимое решение.

- **Из линейной алгебры известно:**
- Равенства называются линейно независимыми, если никакое из них нельзя получить из других путем умножения на какие-то коэффициенты и суммирования, т.е. никакое из них не является следствием остальных.
- В линейной алгебре доказывается, что максимальное число линейно независимых равенств, связывающих n переменных $x_1 \ldots x_n$, равно n .
- В линейной алгебре доказывается, что систему из r независимых равенств с n переменными всегда можно разрешить относительно каких-то r переменных (называемых базовыми) и выразить через них остальные n-r переменных (называемых свободными). Свободным переменным можно придавать какие угодно значения.
- **Теорема1** *Любому допустимому решению задачи ЛП соответствует по крайней мере хотя бы одна угловая точка многоугольника решений, и наоборот, любой угловой точке многогранника решений соответствует допустимое базисное решение.*

- Для реализации СМ необходимо 3 основных момента:
- Необходимо отыскать способ отыскания исходного допустимого решения.
- Должен быть описан механизм перехода от одного допустимого решения к другому (к другой вершине многоугольника).
- Должен быть сформулирован критерий, с помощью которого можно проверить на оптимальность: остановить процесс поиска или идти дальше.

- Рассмотрим задачу ЛП в стандартной форме

$$F = \sum_{j=1}^{n} c_j x_j \longrightarrow \max$$

- при выполнении условий:

$$\begin{cases} \sum_{j=1}^{n} a_{ij} x_j \le b_i, & i = \overline{1, m} \\ x_j \ge 0, & j = \overline{1, n} \end{cases}$$

Алгоритм решения задачи :

1. Стандартная задача ЛП сводится к основной задаче.

$F= c_1x_1+\ldots+c_nx_n \to max$

$a_{11}x_1+\ldots+a_{1n}x_n+x_{n+1}=b_1$

$a_{11}x_1+\ldots+a_{1n}x_n \quad +x_{n+2}=b_2$

….

$a_{m1}x_1+\ldots+a_{mn}x_n+ \qquad x_{n+m}=b_m$

$x_j \geq 0$ $j=1,n$

2. Определяется начальное допустимое решение

Для этого запишем систему ограничений в векторной форме

$x_1A_1+x_2A_2+\ldots+x_nA_n+x_{n+1}A_{n+1}+\ldots+x_{n+m}A_{n+m}=A_0$, где

$$A_1=\begin{pmatrix} a_{11} \\ a_{21} \\ \ldots \\ a_{m1} \end{pmatrix} \quad \ldots A_n=\begin{pmatrix} a_{1n} \\ a_{2n} \\ \ldots \\ a_{mn} \end{pmatrix} \quad A_{n+1}=\begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ \ldots \\ 0 \end{pmatrix} \quad \ldots A_{n+m}=\begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ \ldots \\ 1 \end{pmatrix} \quad A_0=\begin{pmatrix} b_1 \\ b_2 \\ \ldots \\ b_m \end{pmatrix}$$

$A_{n+1}\ldots A_{n+m}$ – линейно-независимые векторы m – мерного пространства первоначальное допустимое решение: $x_0=(0,\ldots 0,b_1\ldots b_m)$.

3. По данным задачи составляется симплекс-таблица:

i	Базис	C_Δ	A_0	C_1	C_2	…	C_n	C_{n+1}	…	C_{n+m}
				A_1	A_2	…	A_n	A_{n+1}	…	A_{n+m}
1	A_{n+1}	0	b_1	a_{11}	a_{12}	…	a_{1n}	1	…	0
2	A_{n+2}	0	b_2	a_{21}	a_{22}	…	a_{2n}	0	…	0
…	…	…	…	…	…	…	…	…	…	…
m	A_{n+m}	0	b_m	a_{m1}	a_{m2}	…	a_{mn}	0	…	1
m+1			F_0	Δ_1	Δ_2	…	Δ_n	0	…	0

В (m+1) –й строке в столбцах векторов A_j записываются значения

$$\Delta_j = \sum_{i=1}^{m} c_i a_{ij} - c_j \quad (j = \overline{1, n})$$

$c_i a_{ij}$- значение целевой функции, если вместо неизвестных подставить коэффициенты разложения j – го вектора по векторам базиса. Δ- называют оценками плана.

Значение F_0 равно скалярному произведению вектора A_0 на вектор $C\Delta$

$$F_0 = \sum_{i=1}^{m} c_i b_i$$

4. Полученное допустимое решение проверяется на оптимальность (в случае максимизации).

- Используются теоремы:
- **Теорема2** *Если для некоторого опорного плана x* выполняются неравенства* $\Delta_j \geq 0$*, то этот план оптимальный .*
- **Теорема3** *Если для опорного плана X задачи ЛП существует хотя бы один элемент j , для которого* $\Delta_j < 0$ *и среди коэффициентов разложения j-го вектора есть хотя бы один* $a_{ij} > 0$*, то существует такой опорный план X', для которого F(x')>F(x).*
- Если хотя бы для одной отрицательной оценки $\Delta_j < 0$. коэффициенты разложения a_{ij} соответствующего вектора неположительные, то линейная функция не ограничена на многограннике решений, и следовательно, задача не имеет решения.

- Наличие оптимальности проверяется по следующему признаку:
- Согласно теорем выясняется, имеется ли хотя бы одно отрицательное Δ_j (ЦФ исследуется на *максимум)*. Если нет, то найденное решение является оптимальным.
- Если же среди чисел Δ_j имеются отрицательные, то либо устанавливается неразрешимость задачи, либо переходят к новому допустимому решению.

- В случае исследования целевой функции на **минимум** допустимое решение является оптимальным, если все разности $\Delta_j \leq 0$. Если хотя бы одно $\Delta_j > 0$, тогда в базис включается вектор, соответствующий этой оценке, и вычисляется новое допустимое решение, при котором линейная целевая функция будет принимать меньшее значение.
- Если положительных элементов в последней строке симплекс-таблицы, несколько, то в базис должен быть включен вектор, которому соответствует максимальный положительный Δ_j .> 0.
- Если имеется несколько одинаковых максимальных значений Δ_j , то из соответствующих им векторов включается в базис вектор, которому соответствует минимальное C_j .
- Если хотя бы для одной положительной оценки $\Delta_j > 0$. коэффициенты разложения a_{ij} соответствующего вектора неположительные, то линейная функция не ограничена на многограннике решений, и следовательно, задача не имеет решения.

5. Находится направляющий столбец и направляющая строка.

- **Направляющий** столбец определяется наибольшим по абсолютной величине отрицательным числом Δ_j , а **направляющая строка** – минимальным отношением компонент столбца вектора A_0 к положительным компонентам направляющего столбца
- Выбор максимального по модулю отрицательного элемента Δ_j означает включение в базис переменной, увеличение которой приводит к максимальному росту ЦФ

6. Определяются положительные компоненты нового допустимого решения и коэффициенты разложения векторов A_j по векторам нового базиса и числа F_0 Δ_j по следующим формулам:

$$b_i = \begin{cases} b_i - (b_r / a_{rk}) \cdot a_{ik}, & при \;\; i \neq r \\ b_r / a_{rk} & при \; i = r \end{cases}$$

$$a_{rj} = \begin{cases} a_{ij} - (a_{rj} / a_{rk}) \cdot a_{ik}, & при \;\; i \neq r \\ a_{rj} / a_{rk} & при \; i = r \end{cases}$$

где k – номер направляющего столбца (вектор A_k вводится в базис), r – номер направляющей строки (A_r исключается из базиса).

Полученные данные записываются в новую симплекс–таблицу:

i	Базис	C_Δ	A_0	C_1	C_2	…	C_n	C_{n+1}	…	C_{n+m}
				A_1	A_2	…	A_n	A_{n+1}	…	A_{n+m}
1	A_{n+1}	0	b_1'	a_{11}'	a_{12}'	…	a_{1n}'	1	…	0
2	A_{n+2}	0	b_2'	a_{21}'	a_{22}'	…	a_{2n}'	0	…	0
…	…	…	…	…	…	…	…	…	…	…
m	A_{n+m}	0	b_m'	a_{m1}'	a_{m2}'	…	a_{mn}'	0	…	1
m+1			F_0'	Δ_1'	Δ_2'	…	Δ_n'	0	…	0

7. Проверяют найденное допустимое решение на оптимальность

Если решение не является оптимальным то возвращаются к п.5 ,

если оптимальное или установлена неразрешимость задачи процесс решения заканчивается.

Пример

Для изготовления изделий *А*, *В* и *С* предприятие использует три вида сырья.

Составить план производства изделий, при котором общая стоимость всей произведенной предприятием продукции является максимальной

Вид Сырья	Нормы затрат сырья на одно изделие (кг)			Общее Количество сырья (кг)
	А	В	С	
I	18	15	12	360
II	6	4	8	192
III	5	3	3	180
Цена одного Изделия (руб.)	9	10	16	

Составим математическую модель задачи.

$$\begin{cases} 18x_1 + 15x_2 + 12x_3 \le 360 \\ 6x_1 + 4x_2 + 8x_3 \le 192 \\ 5x_1 + 3x_2 + 3x_3 \le 180 \\ x_1 \ge 0, \quad x_2 \ge 0, \quad x_3 \ge 0 \end{cases}$$

$$F = 9x_1 + 10x_2 + 16x_3 \longrightarrow \textbf{max}$$

Запишем эту задачу в форме основной задачи линейного программирования.

$$\begin{cases} 18x_1 + 15x_2 + 12x_3 + x_4 = 360 \\ 6x_1 + 4x_2 + 8x_3 + x_5 = 192 \\ 5x_1 + 3x_2 + 3x_3 + x_6 = 180 \end{cases}$$

Полученную систему уравнений запишем в векторной форме:

$$x_1 A_1 + x_2 A_2 + x_3 A_3 + x_4 A_4 + x_5 A_5 + x_6 A_6 = A_0,$$ где

$$A_1 = \begin{pmatrix} 18 \\ 6 \\ 5 \end{pmatrix};\ A_2 = \begin{pmatrix} 15 \\ 4 \\ 3 \end{pmatrix};\ A_3 = \begin{pmatrix} 12 \\ 8 \\ 3 \end{pmatrix};\ A_4 = \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix};\ A_5 = \begin{pmatrix} 0 \\ 1 \\ 0 \end{pmatrix};\ A_6 = \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 1 \end{pmatrix};\ A_0 = \begin{pmatrix} 360 \\ 192 \\ 180 \end{pmatrix}.$$

- Среди векторов имеются три единичных вектора , которые образуют базис трехмерного векторного пространства.

$$A_4,\ A_5,\ A_6$$

Исходное решение задачи

$$X_1 = (0, 0, 0, 360, 192, 180)$$

Составим первую симплексную таблицу и проверим исходное решение на оптимальность.

i	Базис	C_Δ	A_0	9	10	16	0	0	0
				A_1	A_2	A_3	A_4	A_5	A_6
1	A_4	0	360	18	15	12	1	0	0
2	A_5	0	192	6	4	8	0	1	0
3	A_6	0	180	5	3	3	0	0	1
4			0	-9	-10	-16	0	0	0

Значения, стоящие в четвертой строке симплексной таблицы вычисляются следующим образом:

$$F_0 = \left(c_\Delta, A_0 \right) = 0 \cdot 360 + 0 \cdot 192 + 0 \cdot 180 = 0$$

$$\Delta_1 = \left(c_\Delta, A_1 \right) - c_1 = 0 \cdot 18 + 0 \cdot 6 + 0 \cdot 5 - 9 = -9$$

$$\Delta_2 = \left(c_\Delta, A_2 \right) - c_2 = 0 \cdot 15 + 0 \cdot 4 + 0 \cdot 3 - 10 = -10$$

$$\Delta_3 = \left(c_\Delta, A_3 \right) - c_3 = 0 \cdot 12 + 0 \cdot 8 + 0 \cdot 3 - 16 = -16$$

Исходное решение не является оптимальным, т.к. в 4-й строке таблицы имеются три отрицательных числа:

-9, -10, -16**.**

В базис будем вводить вектор $\mathbf{A_3}$, т.к. максимальное по абсолютной величине отрицательное число (-16) стоит в 4-й строке этого вектора .

Определим вектор, исключаемый из базиса.

$$\min\left(b_i / a_{i3}\right) \text{ для } a_{i3} > 0, \text{ т.е.}$$

$$\min\left(360/12;\ 192/8;\ 180/3\right) = 192/8.$$

Следовательно, вектор $\mathbf{A_5}$ исключается из базиса.

i	Базис	C_Δ	A_0	9	10	16	0	0	0
				A_1	A_2	A_3	A_4	A_5	A_6
1	A_4	0	360	18	15	12	1	0	0
2	A_5	0	192	6	4	**8**	0	1	0
3	A_6	0	180	5	3	3	0	0	1
4			0	-9	-10	-16	0	0	0

Составим новую симплексную таблицу:

i	Базис	C_Δ	A_0	9	10	16	0	0	0
				A_1	A_2	A_3	A_4	A_5	A_6
1	A_4	0					1		0
2	A_3	16					0		0
3	A_6	0					0		1
4									

Заполняем строку A_3, разделив все элементы на разрешающий a_{22} =8

$$a_{rj} = \{a_{rj} / a_{rk} \quad i = r$$

i	Базис	C_Δ	A_0	9	10	16	0	0	0
				A_1	A_2	A_3	A_4	A_5	A_6
1	A_4	0					1		0
2	A_3	16	24	3/4	1/2	1	0	1/8	0
3	A_6	0					0		1
4									

Вычисление остальных элементов таблицы производим по рекуррентным формулам:

$$b_i' = b_i - \left(b_r / a_{rk}\right) \cdot a_{ik}, \text{ при } i \neq r$$

$$a_{ij}' = a_{ij} - \left(a_{rj} / a_{rk}\right) \cdot a_{ik}, \text{ при } i \neq r,$$

где k - номер направляющего столбца

r - номер направляющей строки.

В нашем случае k=3 r=2

Тогда компоненты вектора $\boldsymbol{A}_0$ находятся

$$b_1^{'} = b_1 - \left(b_2 / a_{23}\right) \cdot a_{13} = 360 - \frac{192}{8} \cdot 12 = 72$$

$$b_3^{'} = b_3 - \left(b_2 / a_{23}\right) \cdot a_{33} = 180 - 24 \cdot 3 = 108$$

i	Базис	C_Δ	A_0	9	10	16	0	0	0
				A_1	A_2	A_3	A_4	A_5	A_6
1	A_4	0	72			0	1		0
2	A_3	16	24	3/4	1/2	1	0	1/8	0
3	A_6	0	108			0	0		1
4									

Вычислим компоненты вектора $\boldsymbol{A}_1$:

$$a_{11}^{'} = a_{11} - \left(a_{21} / a_{23} \right) \cdot a_{13} = 18 - 6/8 \cdot 12 = 9$$

$$a_{31}^{'} = a_{31} - \left(a_{21} / a_{23} \right) \cdot a_{33} = \quad 5 - 6/8 \cdot 3 = 11/4$$

i	Базис	C_Δ	A_0	9	10	16	0	0	0
				A_1	A_2	A_3	A_4	A_5	A_6
1	A_4	0	72	9		0	1		0
2	A_3	16	24	3/4	1/2	1	0	1/8	0
3	A_6	0	108	11/4		0	0		1
4									

Аналогично находятся элементы столбцов векторов $\boldsymbol{A}_2$, $\boldsymbol{A}_5$.

i	Базис	C_Δ	A_0	9	10	16	0	0	0
				A_1	A_2	A_3	A_4	A_5	A_6
1	A_4	0	72	9	9	0	1	-3/2	0
2	A_3	16	24	3/4	1/2	1	0	1/8	0
3	A_6	0	108	11/4	3/2	0	0	-3/8	1
4									

Теперь заполним четвертую строку симплексной таблицы.

$$F_0 = (c_\Delta, A_0) = 0 \cdot 72 + 16 \cdot 24 + 0 \cdot 108 = 384$$

$$\Delta_1 = (c_\Delta, A_1) - c_1 = 0 \cdot 9 + 16 \cdot 3/4 + 0 \cdot 11/4 - 9 = 3$$

$$\Delta_2 = (c_\Delta, A_2) - c_2 = 16 \cdot 1/2 - 10 = -2$$

$$\Delta_5 = (c_\Delta, A_5) - c_5 = 16 \cdot 1/8 - \ 0 = \ 2$$

i	Базис	C_Δ	A_0	9	10	16	0	0	0
				A_1	A_2	A_3	A_4	A_5	A_6
1	A_4	0	72	9	9	0	1	-3/2	0
2	A_3	16	24	3/4	1/2	1	0	1/8	0
3	A_6	0	108	11/4	3/2	0	0	-3/8	1
4			384	3	-2	0	0	2	0

В результате мы получим новое допустимое решение:

изготовление 24 изделий *C*, остаются неиспользованными 72 кг сырья *I* вида и 108 кг сырья *III* вида. Стоимость производимой продукции равна 384 рубля.

$$X_2 = \left(0,\, 0,\, 24,\, 72,\, 0,\, 108\right)$$

Решение $\boldsymbol{X}_2$ не является оптимальным, т.к. в 4-ой строке последней симплекс–таблице в столбце вектора $\boldsymbol{A}_2$ стоит отрицательное число –2.

В базис вводится вектор $A_{2,}$

Для определения направляющей строки найдем

$$\min\left(72/9,\ 24\cdot 2/1,\ 108\cdot 2/3\right)=\frac{72}{9}=8$$

Следовательно, исключению из базиса подлежит вектор $A4$,

i	Базис	C_Δ	A_0	9	10	16	0	0	0
				A_1	A_2	A_3	A_4	A_5	A_6
1	A_4	0	72	9	9	0	1	-3/2	0
2	A_3	16	24	3/4	1/2	1	0	1/8	0
3	A_6	0	108	11/4	3/2	0	0	-3/8	1
4			384	3	-2	0	0	2	0

Проводим аналогичные преобразования с таблицей.

i	Базис	C_{Δ}	A_0	9	10	16	0	0	0
				A_1	A_2	A_3	A_4	A_5	A_6
1	A_2	10	8	1	1	0	1/9	-1/6	0
2	A_3	16	20	1/4	0	1	-1/18	5/24	0
3	A_6	0	96	5/4	0	0	11/16	-1/8	1
4			400	5	0	0	2/9	5/3	0

В результате получаем новое оптимальное решение

$$X_3 = \left(0, 8, 20, 0, 0, 96\right)$$

Ответ

Это решение соответствует плану выпуска продукции, включающего изготовление 8 изделий *B* и 20 изделий *C*.

При этом сырье *I* и *II* видов используется полностью и остается неиспользованным 96 кг сырья *III* вида.

Стоимость производимой продукции равна 400 рублей.

Вопросы

1. В чем смысл симплекс-метода?
2. Что необходимо для реализации СМ?
3. Теорема о соответствии допустимых решений задачи и многоугольника решений.
4. С чего начинается решение задачи СМ?
5. Как определяется начальное допустимое решение (опорный план)?
6. Что такое оценка плана?
7. Теоремы, позволяющие проверить решение на оптимальность (при максимизации).

8. Что меняется при определении минимального решения?
9. Как определяется направляющий столбец?
10. Как определяется направляющая строка?
11. Как рассчитать следующую симплекс-таблицу?
12. Когда задача не имеет решения?