

Тема 6. ПРИМЕНЕНИЕ ТЕОРИИ РЕШЕНИЙ В ЗАДАЧАХ КОНТРОЛЯ И ДИАГНОСТИРОВАНИЯ ОБЪЕКТОВ АВИАЦИОННОГО ОБОРУДОВАНИЯ

6.2 Байесовские процедуры принятия решений о состоянии объектов авиационного оборудования

В общем случае ошибочные решения могут привести к различным последствиям (потерям). Например, замена исправного блока как неисправного приведет к задержке вылета самолета, а выпуск в полет самолета с неисправным блоком может привести к невыполнению полетного задания. Кроме того, потери могут быть приписаны и правильным решениям.

В этом случае для принятия решения о состоянии объекта используется критерий байесовского риска, а соответствующие правила выбора решения называются байесовскими правилами.

При проверке гипотезы о состоянии объекта контроля возможны четыре ситуации и следующие, связанные с ними, потери:

C_{00} – потери при принятии гипотезы \mathfrak{H}_0 , когда на самом деле справедлива гипотеза \mathfrak{H}_0 ;

C_{01} – потери при принятии гипотезы \mathfrak{H}_0 , когда на самом деле справедлива гипотеза \mathfrak{H}_1 ;

C_{10} – потери при принятии гипотезы \mathfrak{H}_1 , когда на самом деле справедлива гипотеза \mathfrak{H}_0 ;

C_{11} – потери при принятии гипотезы \mathfrak{H}_1 , когда на самом деле справедлива гипотеза \mathfrak{H}_1 .

Определим байесовский риск B как среднее значение потерь в указанных четырех ситуациях. Тогда можно записать

$$B = C_{00}P(\mathfrak{G}_0, \mathfrak{G}_0) + C_{01}P(\mathfrak{G}_0, \mathfrak{G}_1) + C_{10}P(\mathfrak{G}_1, \mathfrak{G}_0) + C_{11}P(\mathfrak{G}_1, \mathfrak{G}_1), \quad (15.6)$$

где $P(\mathfrak{G}_0, \mathfrak{G}_0)$ – совместная вероятность принятия гипотезы \mathfrak{G}_0 и справедливости гипотезы \mathfrak{G}_0 ;

$P(\mathfrak{G}_0, \mathfrak{G}_1)$ – совместная вероятность принятия гипотезы \mathfrak{G}_0 и справедливости гипотезы \mathfrak{G}_1 ;

$P(\mathfrak{G}_1, \mathfrak{G}_0)$ – совместная вероятность принятия гипотезы \mathfrak{G}_1 и справедливости гипотезы \mathfrak{G}_0 ;

$P(\mathfrak{G}_1, \mathfrak{G}_1)$ – совместная вероятность принятия гипотезы \mathfrak{G}_1 и справедливости гипотезы \mathfrak{G}_1 .

Воспользуемся правилом Байеса для умножения вероятностей

$$P(A, B) = P(A/B)P(B) = P(B/A)P(A), \quad (15.7)$$

где $P(A, B)$ – вероятность совместного появления событий A и B ;

$P(A/B)$ – вероятность появления события A при условии появления события B ;

$P(B)$ – вероятность появления события B .

В этом случае выражение для риска B можно переписать следующим образом:

$$B = C_{00}P(\mathfrak{G}_0/\mathfrak{G}_0)P(\mathfrak{G}_0) + C_{01}P(\mathfrak{G}_0/\mathfrak{G}_1)P(\mathfrak{G}_1) + \\ + C_{10}P(\mathfrak{G}_1/\mathfrak{G}_0)P(\mathfrak{G}_0) + C_{11}P(\mathfrak{G}_1/\mathfrak{G}_1)P(\mathfrak{G}_1),$$

где $P(\mathfrak{G}_0/\mathfrak{G}_0)$ – условная вероятность принятия гипотезы \mathfrak{G}_0 , когда справедлива гипотеза \mathfrak{G}_0 ;

$P(\mathfrak{G}_0/\mathfrak{G}_1)$ – условная вероятность принятия гипотезы \mathfrak{G}_0 , когда справедлива гипотеза \mathfrak{G}_1 ;

$P(\mathfrak{G}_1/\mathfrak{G}_0)$ – условная вероятность принятия гипотезы \mathfrak{G}_1 , когда справедлива гипотеза \mathfrak{G}_0 ;

$P(\mathfrak{G}_1/\mathfrak{G}_1)$ – условная вероятность принятия гипотезы \mathfrak{G}_1 , когда справедлива гипотеза \mathfrak{G}_1 ;

$P(\mathfrak{G}_0)$ – вероятность справедливости гипотезы \mathfrak{G}_0 ;

$P(\mathfrak{G}_1)$ – вероятность справедливости гипотезы \mathfrak{G}_1 .

Правило выбора решения представляет собой сравнение результата наблюдения с пороговым значением, т.е. принимается гипотеза \mathfrak{D}_1 , если полученное наблюдение больше порога z_{Π} , и принимается гипотеза \mathfrak{D}_0 , если полученное наблюдение меньше порога z_{Π} . Поэтому для риска B можно записать следующее выражение (см. рисунок 15.1):

$$\begin{aligned}
 B &= C_{00}P(\mathfrak{D}_0) \int_{-\infty}^{z_{\Pi}} f(z/\mathfrak{D}_0)dz + C_{01}P(\mathfrak{D}_1) \int_{-\infty}^{z_{\Pi}} f(z/\mathfrak{D}_1)dz + \\
 &+ C_{10}P(\mathfrak{D}_0) \int_{z_{\Pi}}^{\infty} f(z/\mathfrak{D}_0)dz + C_{11}P(\mathfrak{D}_1) \int_{z_{\Pi}}^{\infty} f(z/\mathfrak{D}_1)dz = \\
 &= C_{00}P(\mathfrak{D}_0) \int_{-\infty}^{z_{\Pi}} f(z/\mathfrak{D}_0)dz + C_{01}P(\mathfrak{D}_1) \int_{-\infty}^{z_{\Pi}} f(z/\mathfrak{D}_1)dz + \\
 &+ C_{10}P(\mathfrak{D}_0)[1 - \int_{-\infty}^{z_{\Pi}} f(z/\mathfrak{D}_0)dz] + C_{11}P(\mathfrak{D}_1)[1 - \int_{-\infty}^{z_{\Pi}} f(z/\mathfrak{D}_1)dz].
 \end{aligned}$$

Группируя слагаемые полученного выражения, можно записать

$$B = C_{10}P(\mathfrak{G}_0) + C_{11}P(\mathfrak{G}_1) + (C_{00} - C_{10})P(\mathfrak{G}_0) \int_{-\infty}^{z_{\Pi}} f(z/\mathfrak{G}_0) dz + \\ + (C_{01} - C_{11})P(\mathfrak{G}_1) \int_{-\infty}^{z_{\Pi}} f(z/\mathfrak{G}_1) dz. \quad (15.8)$$

Значение порога z_{Π} необходимо выбрать так, чтобы минимизировать значение байесовского риска (15.8). Естественно, можно предположить, что потери при неправильных решениях будут больше, чем потери при правильных решениях (часто потери при правильных решениях принимают равными нулю), т.е. $C_{00} < C_{10}$ и $C_{11} < C_{01}$. Будем считать также, что потери при любых решениях неотрицательны.

В выражении для байесовского риска B (15.8) от порога z_{Π} зависит только значение интеграла. Дифференцируя риск B по z и приравнявая производную нулю, найдем такое значение z_{Π} , при котором обеспечивается минимум потерь при принятии решения о состоянии ОК.

$$\left. \frac{\partial B}{\partial z} \right|_{z=z_{\Pi}} = 0.$$

Подставляя значение байесовского риска B из выражения (15.8), получим равенство

$$(C_{00} - C_{10})P(\mathfrak{G}_0)f(z_{\Pi}/\mathfrak{G}_0) + (C_{01} - C_{11})P(\mathfrak{G}_1)f(z_{\Pi}/\mathfrak{G}_1) = 0.$$

Отсюда можно записать

$$\frac{f(z_{\Pi}/\mathfrak{G}_1)}{f(z_{\Pi}/\mathfrak{G}_0)} = \frac{(C_{10} - C_{00})P(\mathfrak{G}_0)}{(C_{01} - C_{11})P(\mathfrak{G}_1)}. \quad (15.9)$$

Если левая часть равенства (15.9) – это значение отношения правдоподобия L (смотри выражение (15.5)) в точке $z = z_{\Pi}$, то правую часть равенства (15.9) можно рассматривать как порог Π для отношения правдоподобия L .

$$\Pi = \frac{(C_{10} - C_{00})P(\mathfrak{G}_0)}{(C_{01} - C_{11})P(\mathfrak{G}_1)}. \quad (15.10)$$

Тогда правило принятия решения о состоянии ОК будет следующим. Если $L > \Pi$, принимается гипотеза \mathfrak{G}_1 – ОК неисправен, если $L \leq \Pi$, принимается гипотеза \mathfrak{G}_0 – ОК исправен.

Часто при вычислениях используются значения натуральных логарифмов для отношения правдоподобия $\ln L$ и порога $\ln \Pi$. Это особенно удобно в том случае, когда обе рассматриваемые плотности вероятности являются нормальными.

В последующем анализе предполагается, что имеется вся информация, необходимая для вычисления порога Π , т.е. известны потери C_{00} , C_{01} , C_{10} , C_{11} и априорные вероятности гипотез \mathfrak{H}_0 и \mathfrak{H}_1 . В действительности значения потерь и априорных вероятностей обычно неизвестны и должны быть определены из каких-либо дополнительных соображений или на основе результатов дополнительной обработки реальных наблюдений. Значение отношения правдоподобия L определяется по экспериментальным данным.

Кроме того, на практике однократное наблюдение часто не позволяет обеспечить нужное для практических целей достаточно малое значение минимума байесовского риска. Это приводит к необходимости многократного проведения наблюдений.