Многочлены. Делимость многочленов.

Цели:

1. Ввести понятие многочлена, степени многочлена, стандартной записи многочлена.
2. Рассмотреть свойства многочлена (теоремы).
3. Разобрать деление многочлена на многочлен «уголком».
4. Научиться делить многочлен на многочлен.

Многочлены.

Из курса алгебры основной школы, мы знаем что существуют различные виды многочленов.

1. Одночлен: $2a^3$, $3a^2b$, 7…
2. Двучлен: $3x+4$, $2a^3 - 4c^2$ …
3. Трёхчлен (включая квадратный трёхчлен): $3x+4b+c$, $2x^2+3x-7$…

И так далее

Особое место занимают многочлены от одной переменной.

Многочлен от одной переменной.

Многочлен от одной переменной $P(x)$ представляет собой сумму одночленов. Одночлены располагаются по убывающим степеням переменной x. Записывается так:

$$P_n(x) = a_0 x^n + a_1 x^{n-1} + a_2 x^{n-2} + \ldots + a_{n-2} x^2 + a_{n-1} x + a_n$$

Причем, старший коэффициент a_0 отличен от нуля.

Такая запись называется стандартным видом многочлена $P(x)$.

Многочлен от одной переменной

$$P_n(x) = a_0 x^n + a_1 x^{n-1} + a_2 x^{n-2} + \ldots + a_{n-2} x^2 + a_{n-1} x + a_n$$

Если $a_0 = 1$, то многочлен называется приведённым, в противном случае он называется неприведённым.

Одночлен a_n называют свободным членом многочлена $P(x)$.

Число n – показатель степени старшего члена – называют степенью многочлена.

Вывод.

Любой многочлен P(x), содержащий только переменную x и её натуральные степени, можно записать в стандартном виде

$$\mathbf{P(\mathit{x}) = \mathit{a}_0\mathit{x}^n + \mathit{a}_1\mathit{x}^{n-1} + \ldots + \mathit{a}_{n-1}\mathit{x} + \mathit{a}_n}$$

где $a_0, a_1 \ldots\ldots a_{n-1}, a_n$ – некоторые действительные числа.

Если $a_0 \neq 0$, то многочлен P(x) называют многочленом n – ой степени, член a_0x^n старшим членом, a_n – свободным членом.

Если P(x) = a_0, где $a_0 \neq 0$, называют многочленом нулевой степени. Число 0 называют нулевым многочленом.

Способы разложения многочленов на множители от одной переменной

1. Вынесение общего множителя за скобки.
2. Способ группировки
3. Использование формул сокращенного умножения
4. Разложение квадратного трехчлена на множители.

Свойства многочленов от одной переменной

Теорема 1.

Два многочлена $\boldsymbol{P(x)}$ и $\boldsymbol{S(x)}$ тождественны тогда и только тогда, когда они имеют одинаковую степень и коэффициенты при одноименных степенях переменной в обоих многочленах равны.

Свойства многочленов от одной переменной.

Теорема 2.

Для любых двух многочленов ненулевой степени ***p(x)*** и ***s(x)*** существует пара многочленов ***q(x)*** и ***r(x)*** такая, что степень многочлена ***r(x)*** меньше степени многочлена ***s(x)*** и выполняется тождество

$$\boxed{p(x) \equiv s(x)q(x) + r(x)}$$

В результате сложения, вычитания и умножения многочленов получаются многочлены.

Особое место в теории многочленов занимает деление многочленов.

Но прежде рассмотрим ещё несколько теорем.

Свойства многочленов от одной переменной.

Теорема 3.

Остаток от деления многочлена ***p(x)*** ненулевой степени на двучлен $\boldsymbol{x - a}$ равен ***p(a)***

(т.е. значению многочлена ***p(x)*** при $\boldsymbol{x = a}$).

Эту теорему обычно называют *теоремой Безу* в честь французского математика Этьена Безу (1730 – 1783).

Свойства многочленов от одной переменной.

Теорема 4.

Пусть все коэффициенты многочлена $\boldsymbol{p(x)}$ - целые числа. Если целое число $\boldsymbol{a}$ является корнем многочлена $\boldsymbol{p(x)}$, то $\boldsymbol{a}$ – делитель свободного члена многочлена $\boldsymbol{p(x)}$.

Свойства многочленов от одной переменной.

Теорема 5.

Любой многочлен ***p(x)*** степени $\geq$ **3** разлагается в произведение многочленов первой и второй степени.

Многочлены от нескольких переменных

Кроме одночленов от одной переменной выделяются ещё многочлены от двух и более переменных.

Среди многочленов от двух переменных выделяют ***однородные*** и ***симметрические*** многочлены.

Многочлены от нескольких переменных

Многочлен $\boldsymbol{p(x;y)}$ называют **однородным** многочленом $\boldsymbol{n}$-ой степени, если сумма показателей степеней переменных в каждом члене многочлена равна $\boldsymbol{n}$.

Если $\boldsymbol{p(x;y)}$ – однородный многочлен, то уравнение $\boldsymbol{p(x;y)} = 0$ называют однородным уравнением.

Многочлены от нескольких переменных

Систему уравнений $\begin{cases} p(x;\,y) = a, \\ q(x;\,y) = b \end{cases}$ называют **однородной**, если $p(x;\,y)$, $q(x;\,y)$ — однородные многочлены одной и той же степени, а a и b — действительные числа.

Многочлены от нескольких переменных

Многочлен ***p(x;y)*** называют **симметрическим**, если он сохраняет свой вид при одновременной замене ***x*** на ***y*** и ***y*** на ***x***.

Теорема. Любой симметрический многочлен ***p(x; y)*** можно представить в виде многочлена от ***xy*** и ***x+y***.

Многочлены от нескольких переменных

Если $p(x;y)$ – симметрический многочлен, то уравнение $p(x;y) = 0$ называют симметрическим уравнением.

Систему двух уравнений с двумя переменными называют симметрической системой, если оба ее уравнения – симметрические.

Деление многочленов с одной переменной «уголком».

Пример 1 : Разделить уголком многочлен $P(x) = 10x^2 - 7x - 12$ на многочлен $Q(x) = 5x + 4$.

ДЕЛИМОЕ

ДЕЛИТЕЛЬ

$$
\begin{array}{r|l}
10x^2 - 7x - 12 & 5x + 4 \\
\cline{2-2}
-\quad 10x^2 + 8x - 12 & 2x - 3 \\
\cline{1-1}
-15x - 12 & \\
-\quad -15x - 12 & \\
\cline{1-1}
0 &
\end{array}
$$

ПЕРВЫЙ ОСТАТОК

ЧАСТНОЕ

ОСТАТОК

Остаток равен нулю, поэтому многочлен P(x) делиться на многочлен Q(x)

Пример 2 : Разделить многочлен $P(x) = 3x^4 + 2x^2 - 1$ на многочлен $Q(x) = x^2 + x$.

$$
\begin{array}{r|l}
-\;3x^4 + 0x^3 + 2x^2 + 0x - 1 & x^2 + x \\
\underline{3x^4 + 3x^3 \qquad\qquad\qquad\qquad} & \overline{3x^2 - 3x + 5} \\
-\;-3x^3 + 2x^2 + 0x - 1 & \\
\underline{-3x^3 - 3x^2 \qquad\qquad\quad} & \\
-\;5x^2 + 0x - 1 & \\
\underline{5x^2 + 5x \qquad} & \\
-5x - 1 &
\end{array}
$$

Степень остатка $-5x - 1$ меньше степени делителя $x^2 + x$, деление закончено.

Ответ: $3x^2 - 3x + 5$ − частное, $-5x - 1$ −остаток.

Формула деления многочленов с остатком

Если многочлен P(x) степени $n > 1$ делят на многочлен Q(x) степени $k \geq 1, k \leq n$ то справедливо равенство:

$$\mathbf{P}(x) = \mathbf{S}(x) \cdot \mathbf{Q}(x) + \mathbf{R}(x)$$

где $S(x)$ – частное, степень которого $m = n - k$, $R(x)$ – остаток , степень которого $l < k$.

Чтобы разделить многочлен P(x) на многочлен Q(x) нужно:

1. Расположить делимое и делитель по убывающим степеням x;
2. Разделить старший член делимого на старший член делителя; полученный одночлен сделать первым членом частного;
3. Первый член частного умножить на делитель; результат вычесть из делимого; полученная разность является первым остатком;
4. Чтобы получить следующий член частного, нужно с первым остатком поступить так, как поступали с делимым и делителем в пунктах 2 и 3.

Пример 3 : Разделить многочлен $3x + 4x^4 + 1 - 15x^3 + 2x^5 - 9x^2$ на многочлен $2x^2 - x^3$

$$
\begin{array}{r|l}
-\begin{array}{l} 2x^5 + 4x^4 - 15x^3 - 9x^2 + 3x + 1 \\ 2x^5 - 4x^4 \end{array} & -x^3 + 2x^2 \\ \cline{2-2}
\quad -\begin{array}{l} 8x^4 - 15x^3 - 9x^2 + 3x + 1 \\ 8x^4 - 16x^3 \end{array} & -2x^2 - 8x - 1 \\
\qquad -\begin{array}{l} x^3 - 9x^2 + 3x + 1 \\ x^3 - 2x^2 \end{array} & \\
-7x^2 + 3x + 1 &
\end{array}
$$

Ответ: $-2x^2 - 8x - 1$ – частное, $-7x^2 + 3x + 1$ –остаток.

Свойства делимости многочленов

1. Если многочлен P(x) делится на многочлен Q(x), а многочлен Q(x) делится на многочлен M(x) , то многочлен P(x) делиться на многочлен M(x) .

2. Если многочлены P(x) и Q(x) делятся на многочлен M(x), то многочлены P(x) + Q(x) и P(x) − Q(x) делятся на многочлен M(x), а многочлен P(x) $\cdot$ Q(x) делиться на многочлен M ^{2}(x) .

Найдите частное:

1) $(x^2 + 3x - 4):(x + 4)$

2) $(x^2 - 7x + 10):(x - 5)$

3) $(6x^3 + 7x^2 - 6x + 1):(3x - 1)$

4) $(4x^3 - 5x^2 + 6x + 9):(4x + 3)$

5) $(15x^3 - x^2 + 8x - 4):(3x^2 + x + 2)$

6) $(9x^4 - 9x^3 - x^2 + 3x - 2):(3x^2 - 2x + 1)$

Ответы:

1) $x - 1$

2) $x - 2$

3) $2x^2 + 3x - 1$

4) $x^2 - 2x + 3$

5) $5x - 2$

6) $3x^2 - x - 2$

Домашняя работа.

Глава 3. § 1 стр. 92 – 96,

Упражнения №№ 1, 4 (всем), № 7 (по желанию) стр. 96 – 97.

Использованная литература.

1. Ю.М.Колягин и др. «Алгебра и начала математического анализа». 10 класс. Учебник для общеобразовательных учреждений. Базовый и профильный уровни. Под редакцией А.Б.Жижченко. 4-е издание. Москва. Просвещение, 2011.
2. Ю.М.Колягин и др. «Алгебра и начала математического анализа». 11 класс. Учебник для учащихся общеобразовательных учреждений. Профильный уровень. 8-е издание стереотипное. Москва. Мнемозина, 2010.
3. М.И.Шабунин и др. «Алгебра и начала математического анализа». Дидактические материалы. 10 класс. Профильный уровень. 3-е издание. Москва. Просвещение, 2011.
4. С.Н.Олехник и др. «Алгебра и начала анализа. Уравнения и неравенства». Учебно-методическое пособие для учащихся 10 – 11 классов. Москва. Экзамен. 1998.
5. С.М.Никольский и др. «Алгебра и начала математического анализа». 10 класс. Учебник для общеобразовательных учреждений. Базовый и профильный уровни. 10-е издание. Москва. Просвещение. 2011.
6. М.И.Шабунин и др. «Математика. Алгебра. Начала математического анализа». Профильный уровень. Учебник для 10 класса. Москва. БИНОМ. Лаборатория знаний. 2009.
7. Н.Я.Виленкин и др. «Алгебра и начала математического анализа». Углубленный уровень. Учебник для учащихся 10 класса общеобразовательных организаций. 18-е издание стереотипное. Москва. Мнемозина, 2014.