

Лекция 7

Исследование нелинейных процессов на рынке ВРП аналитическими методами

1. Модель взаимовлияния спроса и предложения для слабонеравновесного рынка

Цель: найти математические уравнения кривых спроса и предложения.

- В слабонеравновесных процессах все коэффициенты эластичности не меняются: $L_{ii} = \text{Const}$, $L_{ee} = \text{Const}$, $L_{ei} = L_{ie} = \text{Const}$, т.е. система линейная;
- $I_i(t)$, $I_e(t)$, $X_i(t)$, $X_e(t)$ – потоки и цены изменяются во времени.

В условиях сокращения выпуска продукции изменение предложения, спроса и цен можно представить уравнениями:

$$I_i - \tau_i \frac{dI_i}{dt} = L_{ii}X_i + L_{ie}X_e \quad (1)$$

$$I_e + \tau_e \frac{dI_e}{dt} = L_{ee}X_e + L_{ei}X_i \quad (2)$$

$$\frac{dX_i}{dt} = X_i(I_i - L_{ii}X_i - L_{ie}X_e) \quad (3)$$

$$\frac{dX_e}{dt} = X_e(I_e - L_{ee}X_e - L_{ei}X_i) \quad (4)$$

где $\frac{dI_i}{dt}$, τ_i – скорость и время сокращения выпуска продукции
соответственно;

$\frac{dI_e}{dt}$, τ_e – скорость и время повышения спроса на продукцию
соответственно.

Из совместного решения (1) и (3), а также (2) и (4) следует:

$$\frac{dX_i}{dt} = X_i \cdot \tau_i \frac{dI_i}{dt} \quad \cdot \left| \frac{dt}{X_i} \right.$$
$$\frac{dX_e}{dt} = X_e \cdot \left(-\tau_e \frac{dI_e}{dt} \right) \quad \cdot \left| \frac{dt}{X_e} \right.$$

После преобразования:

$$\frac{dX_i}{X_i} = \tau_i \cdot dI_i$$
$$\frac{dX_e}{X_e} = -\tau_e \cdot dI_e$$

Интегрирование дает уравнения:

$$\ln X_i = \tau_i I_i + \ln Const$$

$$\ln X_e = -\tau_e I_e + \ln Const$$

После потенцирования имеем:

$$X_i = Const \cdot e^{\tau_i I_i}$$

$$X_e = Const \cdot e^{-\tau_e I_e}$$

где основание натурального логарифма $e \approx 2,7$.

Из начальных условий можно найти значения Const:

$$\text{если } \tau_i = 0, \quad Const = X_i = X_i^\circ,$$

$$\text{если } \tau_e = 0, \quad Const = X_e = X_e^\circ,$$

Подставляя получаем уравнения:

$$X_i = X_i^0 \cdot e^{\tau_i I_i} \quad (5)$$

$$X_e = X_e^0 \cdot e^{-\tau_e I_e} \quad (6)$$

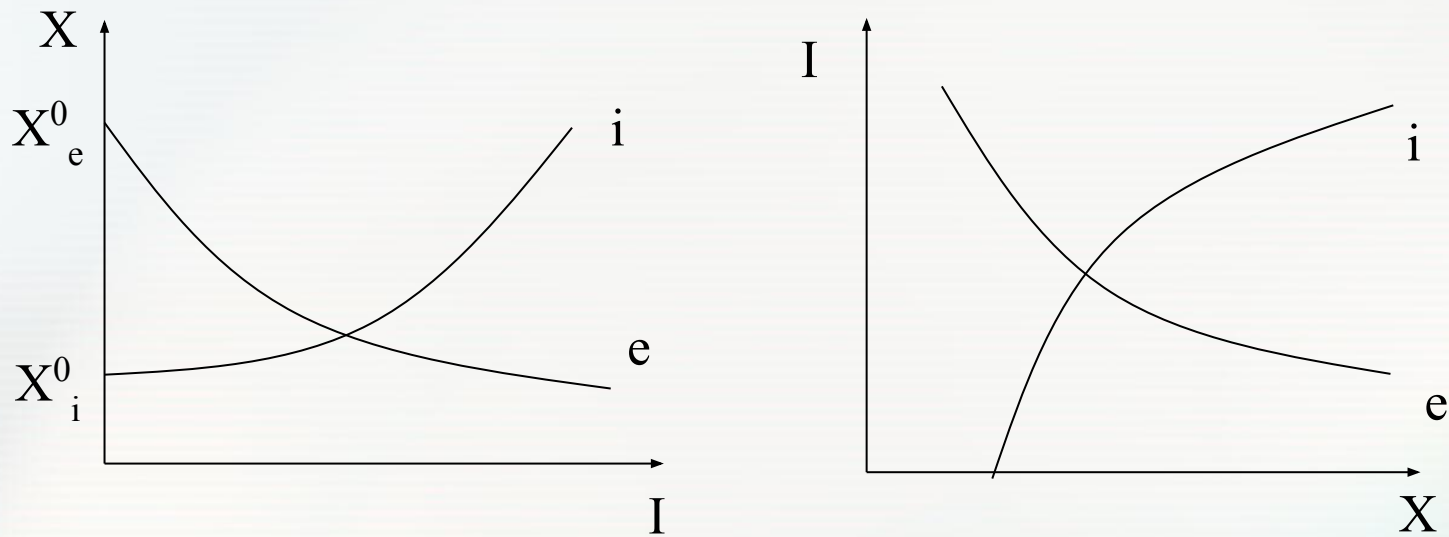


Рис.1. График спроса (e) и предложения (i).

- *Кривая спроса*: нисходящая экспонента устанавливает для рынка ВРП количество продукции, покупаемой в течение τ_e (дня, месяца, года) по различным ценам;
- *Кривая предложения*: восходящая экспонента показывает цену, ниже которой производитель продукции не может продавать товар;
- Модель отражает реальные взаимовлияния спроса и предложения вблизи стационарного состояния (линейные процессы).

- Кривые спроса и предложения содержат одну точку стационарного состояния («равновесия»), что согласуется с представлениями классической экономической теории о рыночной экономике.

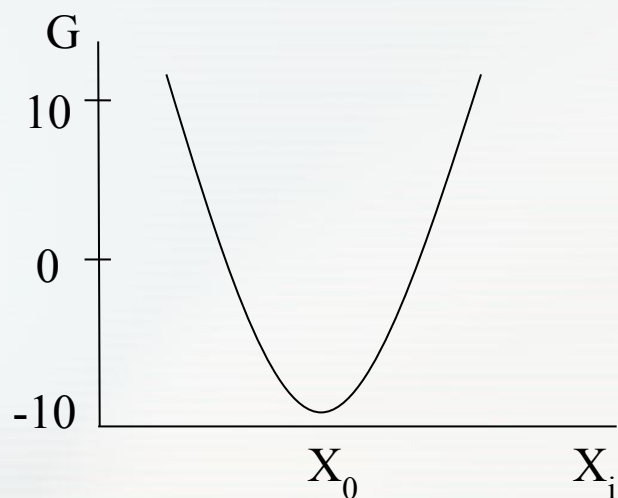


Рис.3. Потенциальная функция $G(x)$ имеет один глобальный \min , соответствующий стационарному состоянию линейного рынка.

- Исследование нелинейных рыночных процессов нуждается в применении более сложных методов анализа.

2. Элементы теории катастроф

Катастрофами называются внезапные изменения в системах – резкие переходы в новые состояния, происходящие при плавном изменении управляющих параметров.

Теория катастроф позволяет исследовать нелинейную динамику систем в зависимости от числа управляющих параметров.

Процессы, связанные с катастрофой, описываются уравнением:

$$\frac{dx}{dt} = - \frac{\partial F(x, a, b, c \dots)}{\partial x} \quad (7)$$

где x – переменная, *параметр порядка*;
 a, b, c, \dots – *управляющие параметры*;
 F – потенциальная функция.

В зависимости от величины показателя степени переменной и числа управляющих параметров можно назвать ряд катастроф:

1. Складка

$$F = \frac{1}{3}x^3 + ax$$

2. Сборка

$$F = \frac{1}{4}x^4 + \frac{1}{2}ax^2 + bx$$

3. Ласточкин хвост

$$F = \frac{1}{5}x^5 + \frac{1}{3}ax^3 + \frac{1}{2}bx^2 + cx$$

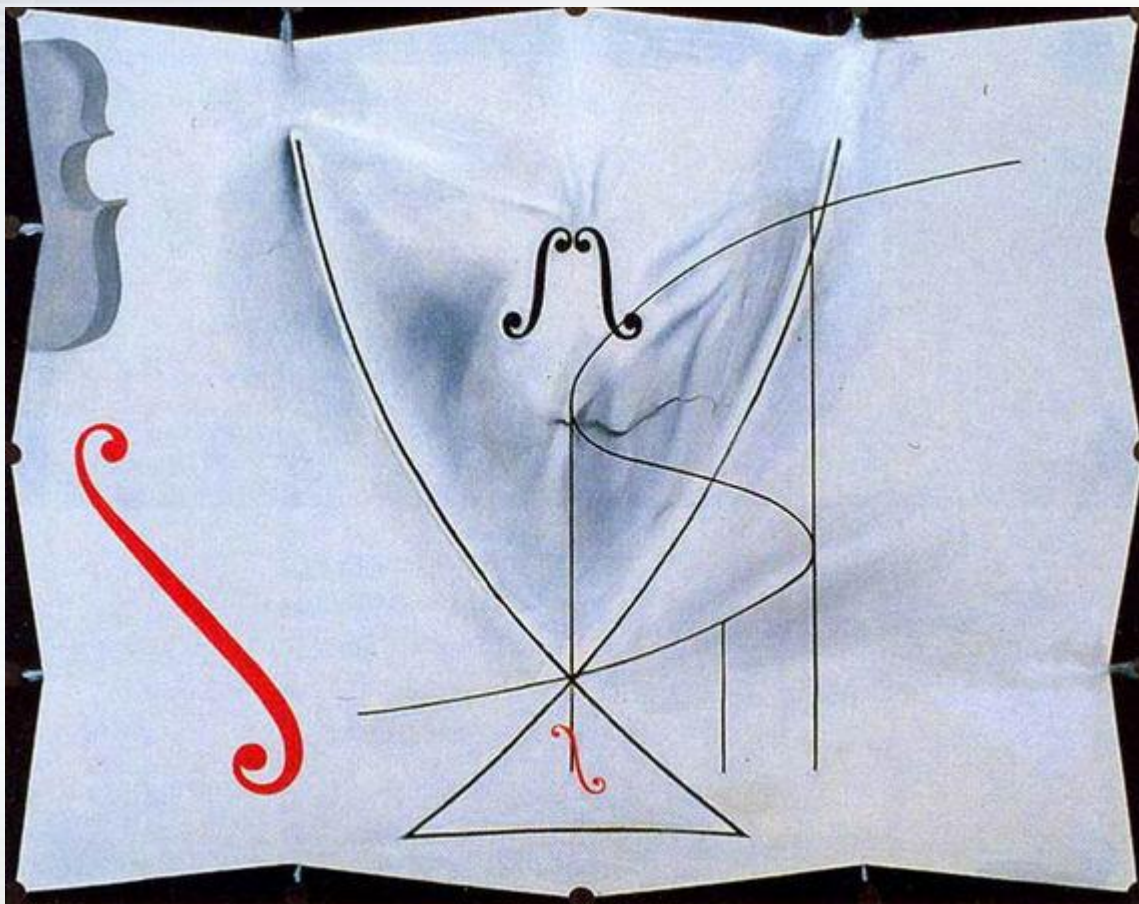
4. Бабочка

$$F = \frac{1}{6}x^6 + \frac{1}{4}ax^4 + \frac{1}{3}bx^3 + \frac{1}{2}cx^2 + dx$$

5. Вигвам

$$F = \frac{1}{7}x^7 + \frac{1}{5}ax^5 + \frac{1}{4}bx^4 + \frac{1}{3}cx^3 + \frac{1}{2}dx^2 + ex$$

- Все перечисленные и другие катастрофы используются при анализе экономических процессов.
- В ряде случаев модели теории катастроф способны обнаружить новые эффекты в нелинейных экономических системах.



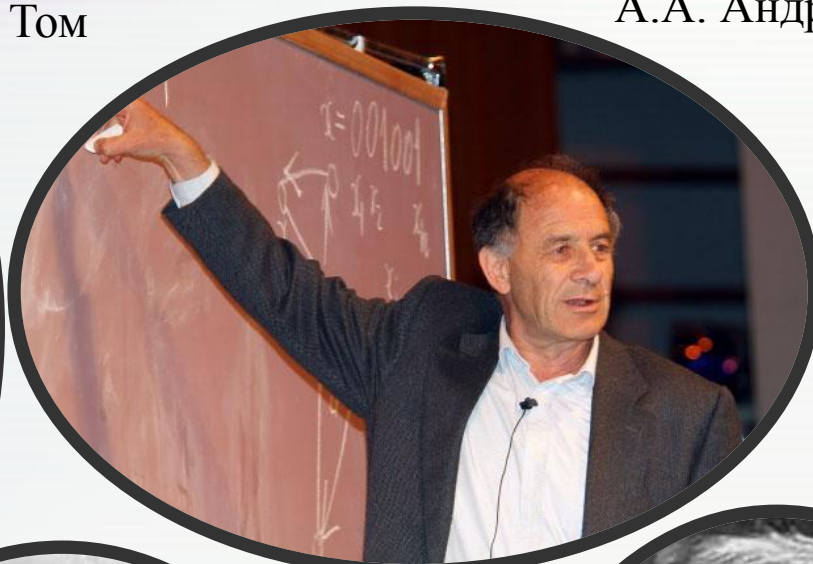
Катастрофа «Ласточкин хвост»



Сальвадор Дали



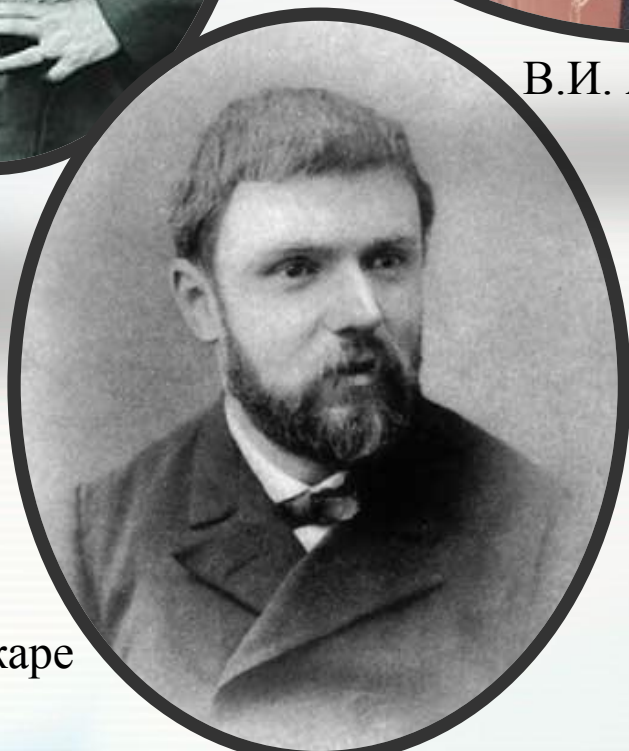
Рене Том



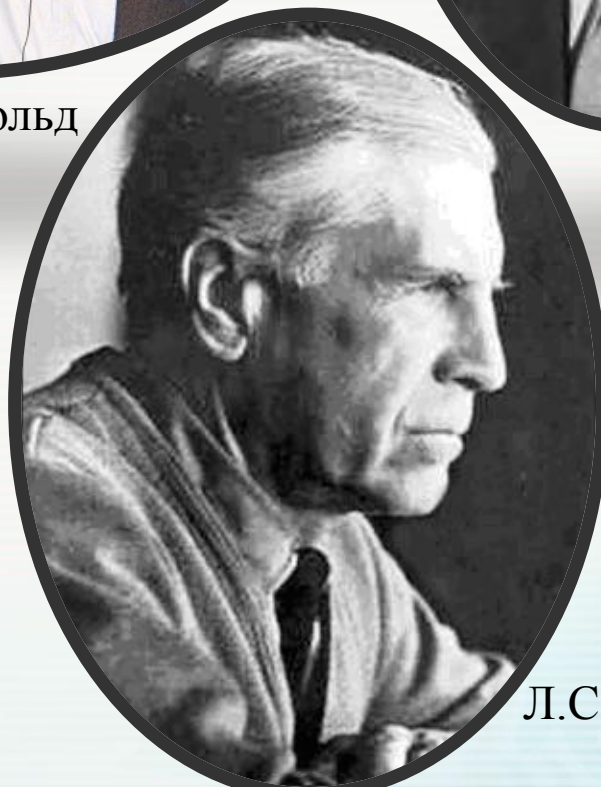
А.А. Андронов



В.И. Арнольд



Ж.А. Пуанкаре



Л.С. Понтрягин

3. Катастрофа сборки

В уравнении катастрофы сборки есть два управляющих параметра a и b .

$$\frac{dx}{dt} = -\frac{\partial F(x, a, b)}{\partial x} \quad (8)$$

где $F(x, a, b) = \frac{1}{4}x^4 + \frac{1}{2}ax^2 + bx \quad (9)$

тогда $\frac{dx}{dt} = -(x^3 + ax + b) \quad (10)$

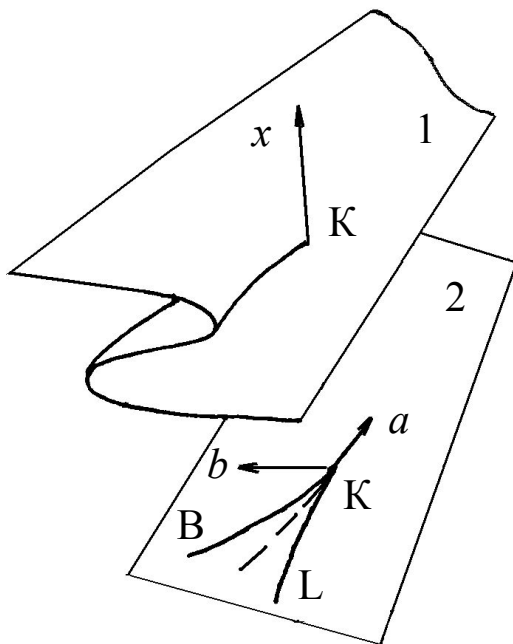


Рис.3. Катастрофа сборки.

1 – лист состояний x ; каждая точка соответствует стационарным решениям.

2 – лист управляющих параметров; каждая точка соответствует заданным значениям a и b .

Особые точки:

1. $\frac{dF}{dx} = 0, \quad x^3 + ax + b = 0$ - вырожденные точки, соответствуют листу состояний 1, т.е. ext F.

2. $\frac{d^2F}{dx^2} = 0, \quad 3x^2 + a = 0$ - дважды вырожденные точки, линии ВК, ЛК.

3. $\frac{d^3F}{dx^3} = 0, \quad 6x = 0$ - трижды вырожденная точка К ($x = 0, a = 0, b = 0$)

4. $\left(\frac{a}{3}\right)^3 + \left(\frac{b}{2}\right)^2 = 0$ - уравнение сепаратрисы {ЛК, ВК}. Сепаратриса является предельной для метастабильных состояний.

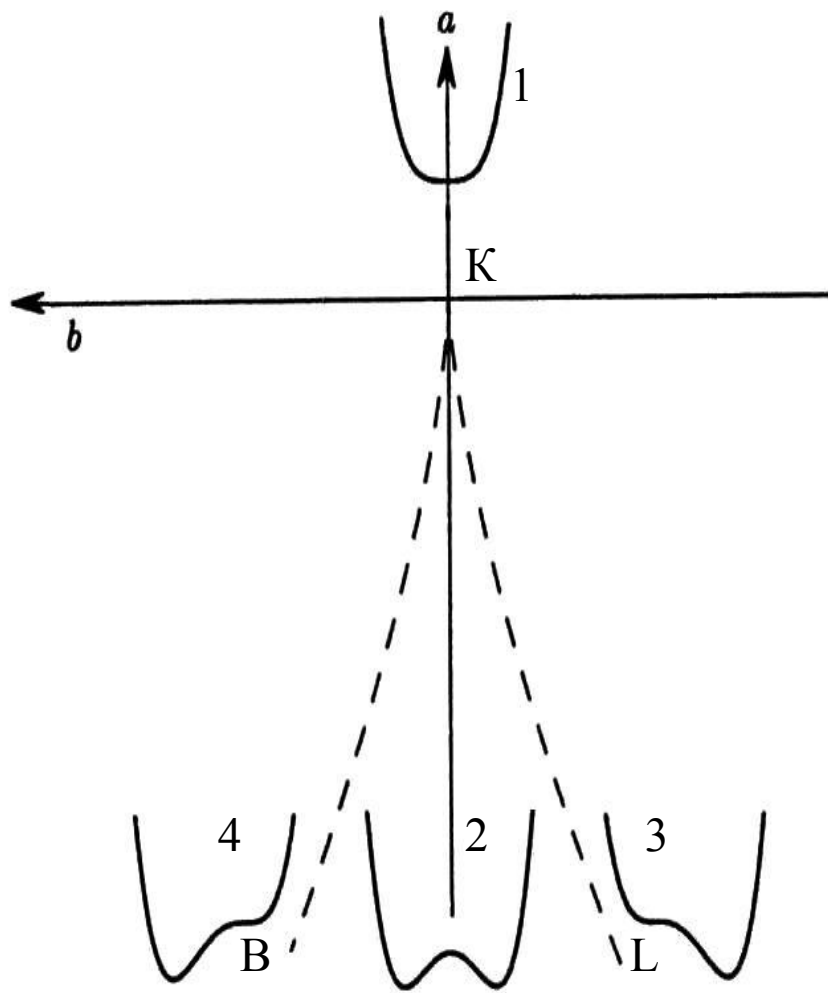


Рис.4. Вид потенциальной функции F , характеризующий устойчивость состояний системы:

1 – при $a > 0$ всегда устойчива, но система не может развиваться;

2 – при $a < 0$ двухфазное состояние с одинаковой устойчивостью обеих фаз при $b = 0$;

3 – глобальная устойчивость первой фазы при $b < 0$;

4 – глобальная устойчивость второй фазы при $b > 0$.

Рис. 5. Деформация потенциальной функции F за счет управляющего параметра b при $a < 0$. Изменение состояния системы в направлении, показанном стрелкой.

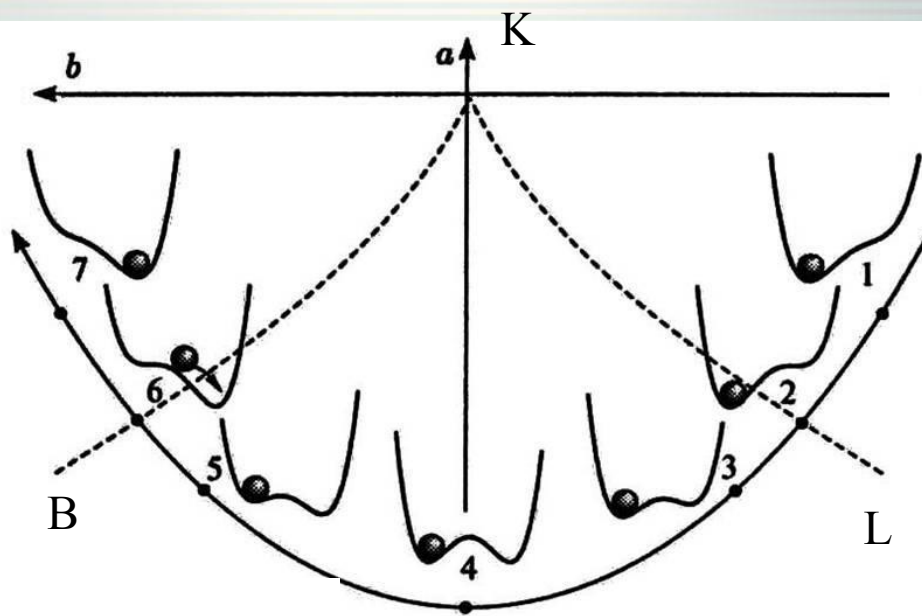
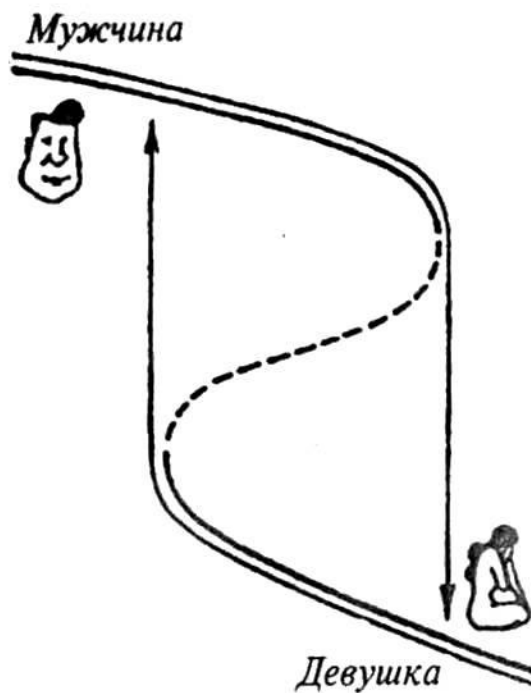
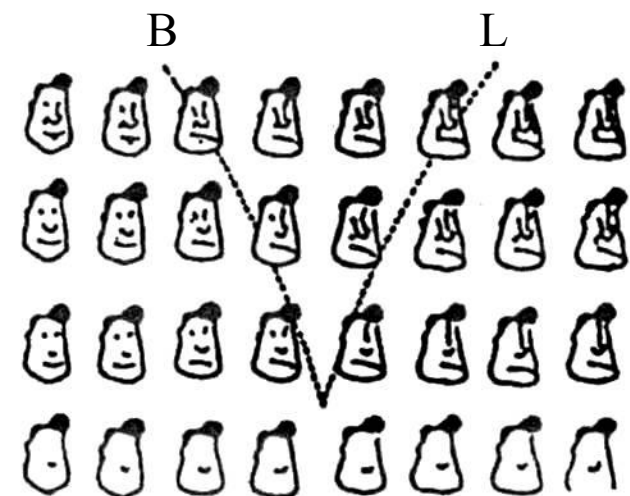


Рис. 6. Оптическая иллюзия, демонстрирующая бистабильность восприятия. В области катастрофы LKB воспринимаются с равной вероятностью как мужское лицо и как фигура девушки.



- Система, динамика которой моделируется катастрофой сборки, способна к развитию. Она является *самоорганизующейся*.

- **Модель катастрофы сборки:**

- объясняет переход рынка ВРП из одного стационарного состояния в другое через экономический кризис;
- выясняет различные механизмы развития нелинейных экономических систем;
- решает ряд задач прогноза экономических кризисов.

4. Нелинейный рынок ВРП

Нелинейная ситуация на рынке ВРП может быть обусловлена ростом

издержек, если $L_{ii} = L_{ii}(X_i)$ при $X_e \approx \text{Const}$, $\frac{dX_i}{dt} \gg \frac{dX_e}{dt}$.

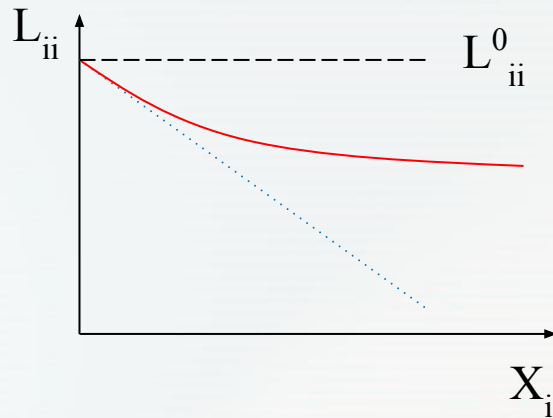


Рис.7. Нелинейное уменьшение коэффициента издержек L_{ii} .

$$L_{ii} = k_1 - k_2 X_i + k_3 X_i^2 \quad (11)$$

где $k_i > 0$;
 $k_1 = L_{ii}^0$;
 k_2 — понижающий фактор;
 k_3 — повышающий фактор;

В потенциальной функции $G(t)$

$$G = \frac{dS}{dt} = -I_e X_e + I_i X_i + \sigma$$

учтем величину потерь регионального уровня введением показателя потерь χ :

$$\sigma = (\chi - 1)I_i X_i \quad (12)$$

где $\chi \geq 1$ при $\chi = 1$, $\sigma = 0$.

Тогда

$$G = -I_e X_e + \chi \cdot I_i X_i \quad (13)$$

где

$$I_e = L_{ee} X_e + L_{ei} X_i,$$
$$I_i = L_{ii} X_i + L_{ie} X_e$$

После преобразования функция издержек выглядит так:

$$G = \chi \cdot L_{ii} X_i^2 + (\chi \cdot L_{ie} - L_{ei}) X_i X_e - L_{ee} X_e^2 \quad (14)$$

Производная функции издержек:

$$\frac{\partial G}{\partial X_i} = 2\chi \cdot L_{ii} X_i + (\chi \cdot L_{ie} - L_{ei}) X_e \quad (15)$$

Она связана со скоростью изменения цены X_i уравнением катастрофы:

$$-\frac{dX_i}{dt} = \frac{\partial G}{\partial X_i} \quad (16)$$

Подставив (11) \rightarrow (15) \rightarrow (16), получаем:

$$-\frac{dX_i}{dt} = 2\chi \cdot (k_3 X_i^3 - k_2 X_i^2 + k_1 X_i) + (\chi \cdot L_{ie} - L_{ei}) X_e \quad (17)$$

Если (11) \rightarrow (14), то функция издержек $G = G(X_i^4)$ (18)

$$G = 2\chi \cdot k_3 X_i^4 - \chi \cdot k_2 X_i^3 + \chi \cdot k_1 X_i^2 + (\chi \cdot L_{ie} - L_{ei}) X_i X_e - L_{ee} X_e^2 \quad (18)$$

- Кривые X_i и X_e имеют три точки пересечения;
- потенциальная функция $G(X_i^4)$ имеет два минимума;
- цена предложения X_i – внутренняя *быстрая* переменная, а цена спроса X_e – внешняя *медленная* переменная;
- цена X_e – *управляющий параметр*, он определяет рыночную ситуацию.

ВРП, у. е. т.

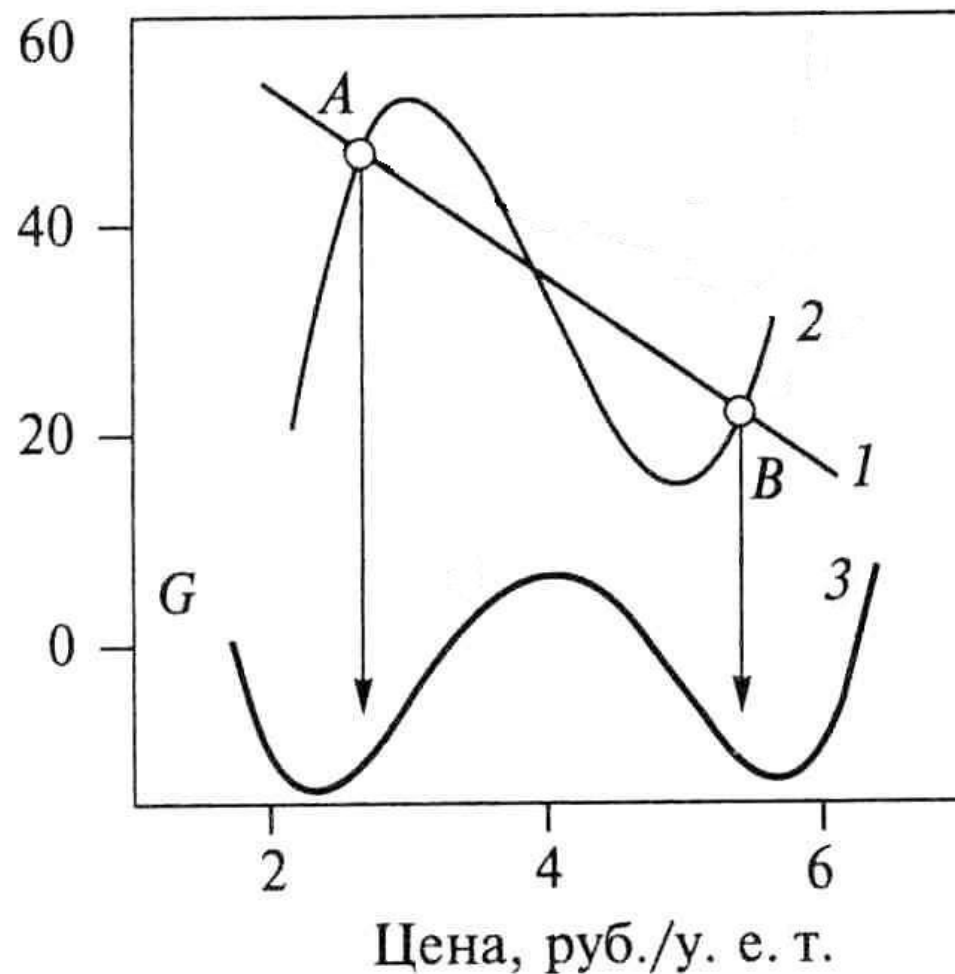


Рис.8. Эволюция нелинейной системы. Устойчивость состояний до кризиса А и после кризиса В.

1 – спрос;

2 – предложение;

3 – потенциальная функция G .

После кризиса цены возрастают, а спрос и предложение уменьшаются.

Переход к новой переменной x и управляющим параметрам (a, b) дает более простые уравнения:

$$-\frac{dx}{dt} = x^3 + ax + b \quad (19)$$

$$-\frac{dx}{dt} = \frac{\partial G}{\partial x} \quad (20)$$

$$G(x, a, b) = \frac{1}{4}x^4 + \frac{1}{2}ax^2 + bx \quad (21)$$

где $G(x, a, b) \begin{matrix} < \\ > \end{matrix} 0$.

$$x = \frac{X_i}{X_K} - \frac{X_0}{X_K} \quad (22)$$

где x – определена по отклонению X_i от среднего значения $X_0 = \frac{X_A + X_B}{2}$;
 X_K – цена в точке К.

$$a = -3 \left[\left(\frac{X_0}{X_K} \right)^2 - 1 \right] \quad (23)$$

$$b = -\frac{X_e}{X_K} + 3 \frac{X_0}{X_K} - 2 \left(\frac{X_0}{X_K} \right)^3 \quad (24)$$

Уравнения (19 - 21) соответствуют катастрофе сборки, здесь x – параметр порядка, a, b – управляющие параметры и уравнение (17) переходит в уравнение (19).

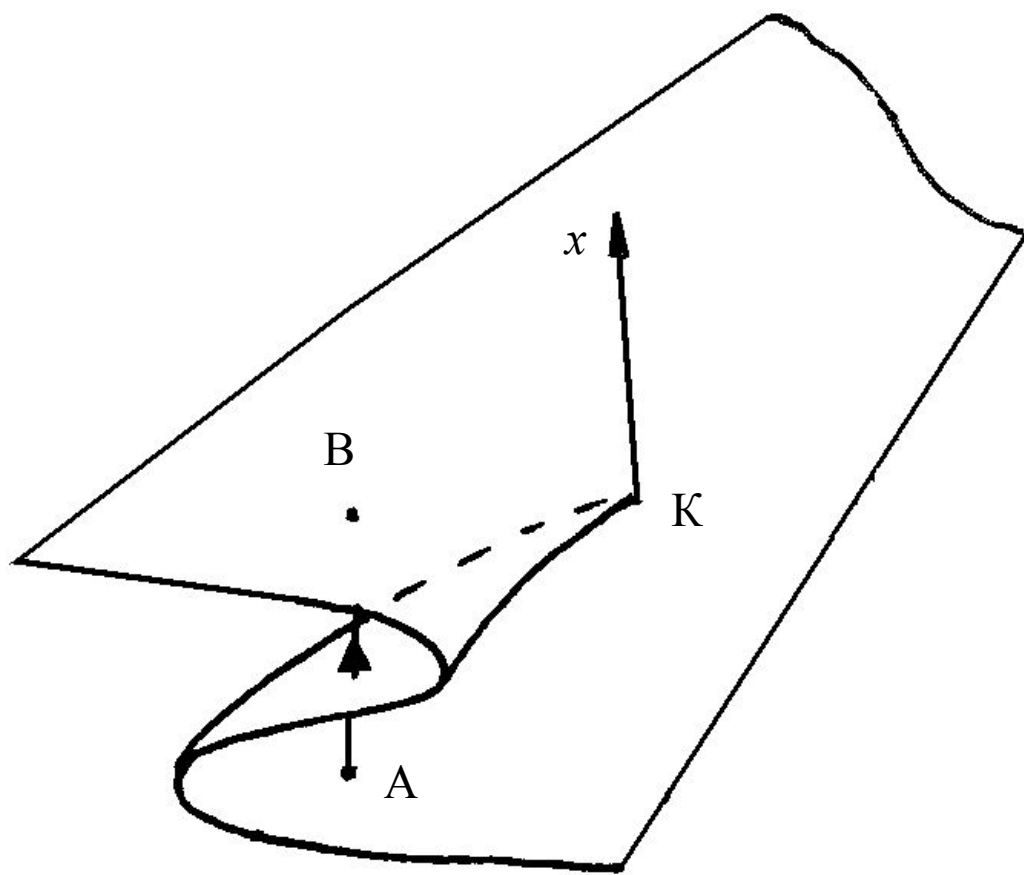
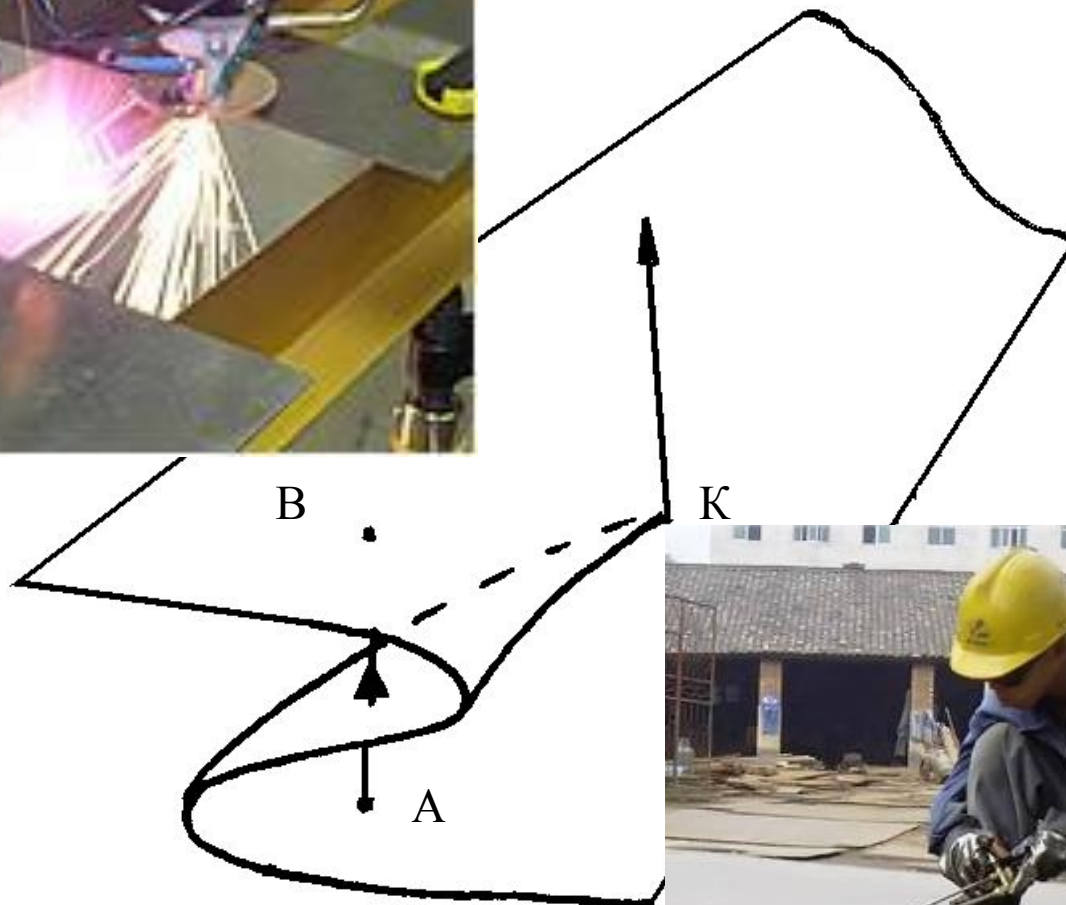


Рис.9. Катастрофа сборки и анализ структурных изменений в системе при кризисе.
А – до кризиса – старые технологии;
В – после кризиса – новые технологии;
К – критическая точка ($x = 0, a = 0, b = 0$).



Лазерная резка металла



Газовая резка металла

- Управляющий параметр b характеризует влияние цены спроса X_e (**внешнее рыночное поле**) на развитие рыночной ситуации.

Величина в *рамке*

$$b = -\frac{X_e}{X_K} + \boxed{3\frac{X_0}{X_K} - 2\left(\frac{X_0}{X_K}\right)^3} \quad (24)$$

составляет **внутреннее самосогласованное рыночное поле**.

- $G < 0$ – условие процессов самоорганизации, имеет место прибыль: доходы $>$ расходов;
- $G > 0$ – условие деградации, здесь убытки: издержки $>$ доходов.
- Таким образом, нелинейные процессы на рынке ВРП, вызванные нелинейным ростом издержек, описывается моделью (законом) – катастрофа сборки.

5. Устойчивость нелинейных экономических систем

Теорема. При постоянных граничных условиях (постоянном спросе $\sigma^e = \text{Const}$) издержки в нелинейных системах стремятся убывать и достигают минимального (положительного) значения в ближайшем стационарном состоянии, локальная или глобальная устойчивость которого определяется теоремой Тома теории катастроф.

Доказательство. Уравнения катастрофы сборки:

$$-\frac{dx}{dt} = x^3 + ax + b \quad (19)$$

$$\frac{dx}{dt} = -\frac{dG}{dx} \quad (20)$$

$$G(x, a, b) = \frac{1}{4}x^4 + \frac{1}{2}ax^2 + bx \quad (21)$$

где $G \geq 0$ – функция издержек, равная относительной скорости изменения убытков системы;

x – характеризует отклонение цены от среднего уровня цен;

b – параметр, связанный с ценой спроса X_e .

На устойчивость рынка ВРП влияют различные состояния мезоэкономической системы: $a < 0$ и $a > 0$ (рис. 10).

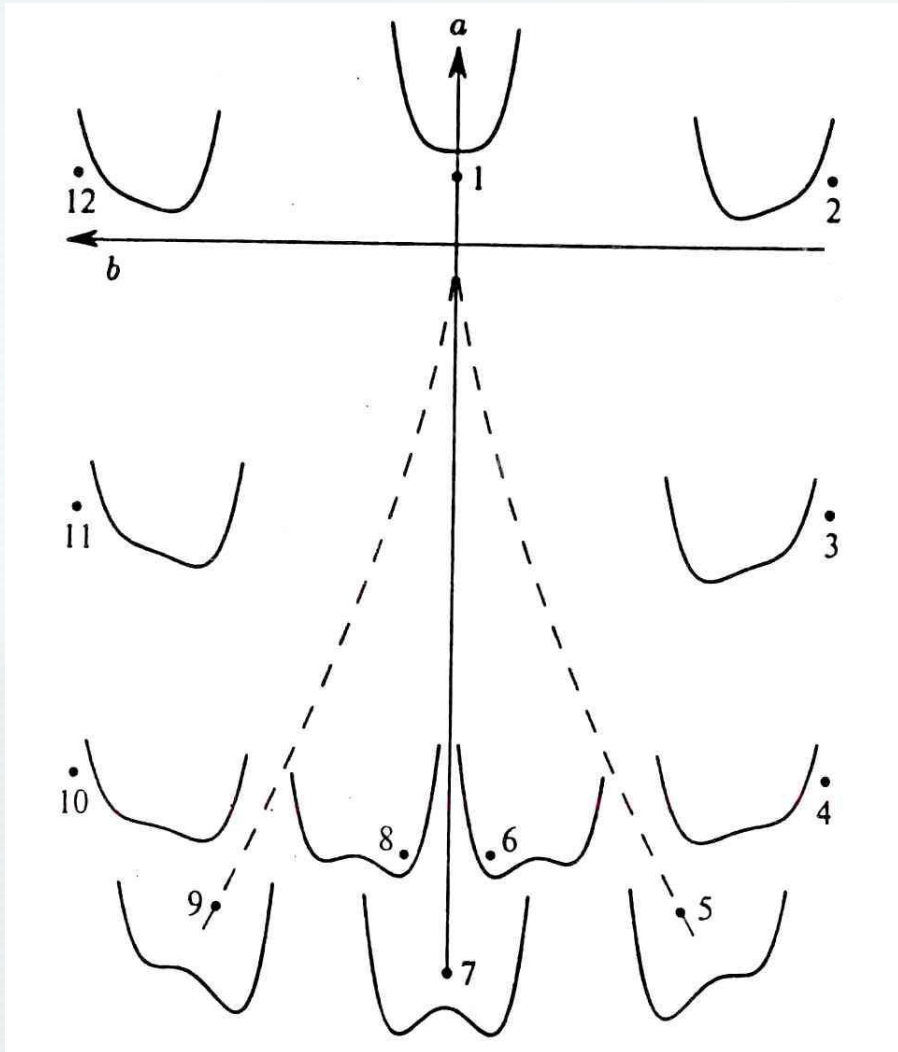


Рис. 10. Функция издержек G может иметь два минимума при $a < 0$, и лишь один – при $a > 0$. Изменение цены спроса X_e вызывает деформацию потенциала G .

1. Устойчивость при $a < 0$.

$G < 0$ – *условие самоорганизации*. Система может иметь два стационарных состояния (глобальный и локальный \min при $b \neq 0$), определяемых по значениям параметров уравнения (19).

Относительно заданных параметров x и b (рис. 11):

- динамика системы нелинейна;
- медленным изменением приведенной цены спроса систему можно перевести из одного стационарного в другое стационарное состояние.

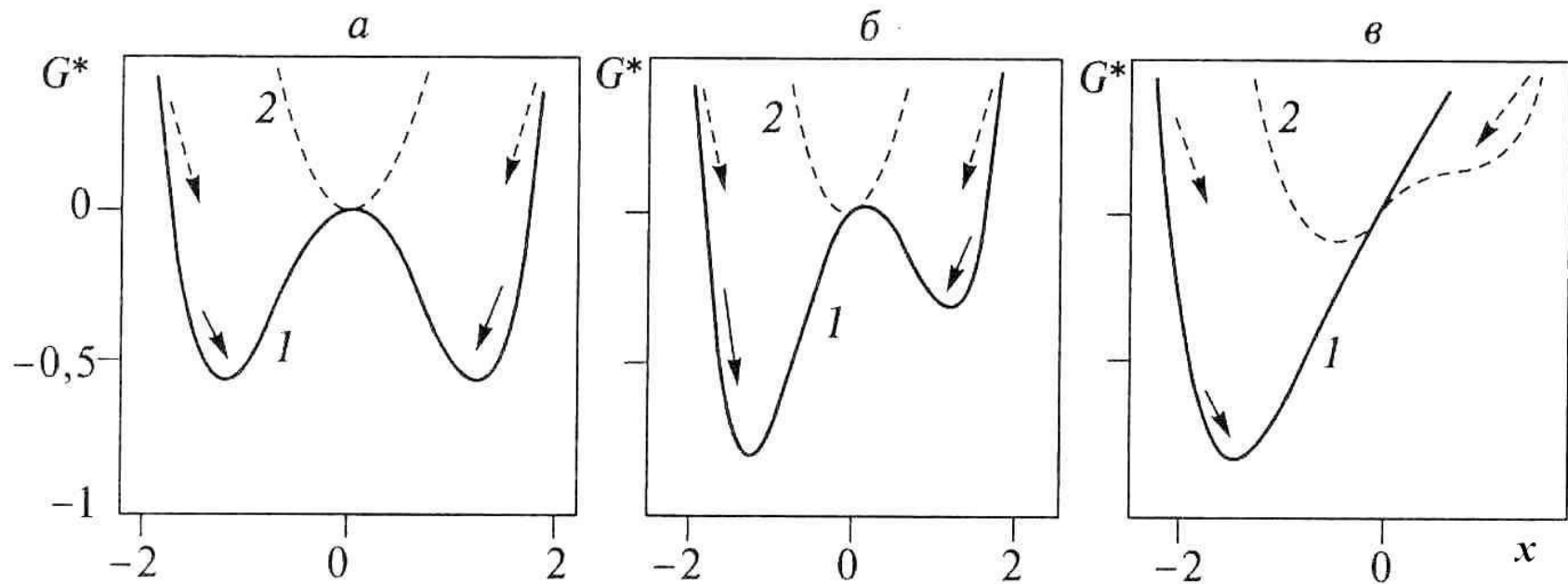


Рис. 11. Эволюция открытой мезоэкономической системы на уровне региона к ближайшему локальному минимуму скорости изменения убытков G . Система описывается уравнением (19) при $b = 0$ (а); $b = 0,2$ (б); $b = 0,6$ (в). Линии: 1. $a = -1,5$; 2. $a = 1,5$. Штриховые – *области устойчивых по Ляпунову неравновесных процессов*, непрерывные – *области самоорганизации (структурной устойчивости)*.

2. Устойчивость при $a > 0$.

$G > 0$ – является функцией Ляпунова при $b = 0$).

$$G = \frac{1}{4}x^4 + \frac{1}{2}ax^2 > 0 \quad (25)$$

$$\frac{dG}{dt} = \frac{dG}{dx} \cdot \frac{dx}{dt} \quad \Rightarrow \quad \frac{dG}{dt} = -(x^3 + ax)^2 \leq 0 \quad (26)$$

G имеет \min при $x = 0$ (кривая 2 рис. 11 (а)).

На рынке ВРП ($a > 0$, $b = 0$) нелинейные процессы устойчивы по Ляпунову.

3. Модель однопродуктового рынка описывает:

- наличие двух стационарных состояний;
- возможность перехода из одного стационарного состояния в другое;
- изменение спроса, предложения и цен (экономический кризис).

Итак, аналитические методы теории катастроф позволяют:

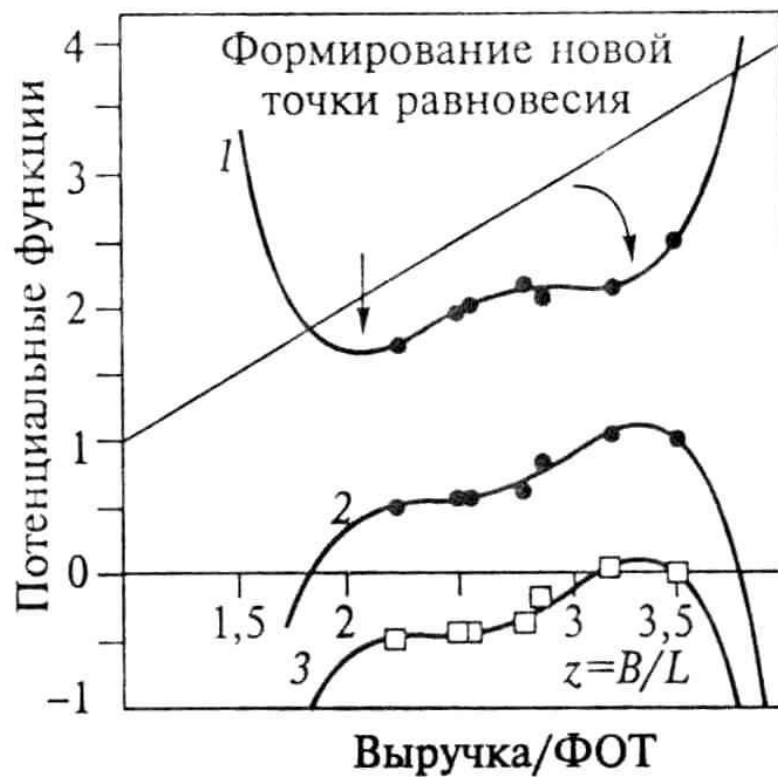
- исследовать временную деформацию потенциальных функций, а значит, и формализовать на мезоуровне задачи устойчивого развития объектов и управления ими;
- после обработки финансовых отчетов предприятий, статистических данных по отраслям, по ВРП в целом дать оценку состояния экономического объекта с точки зрения устойчивости.

6. О реальной выполнимости принципа минимальности издержек

Рассмотренные аналитические методы дополняет экономический принцип *minimax* – минимизации издержек и максимизации прибыли.

Пример 1. Результаты исследования легкой промышленности Свердловской области.

Рис. 12. Зависимости функций издержек (кривая 1), чистого дохода (кривая 2), прибыли (кривая 3) от выручки B , отнесенной к ФОТ (L) для легкой промышленности Свердловской области (1996-1997 гг.)



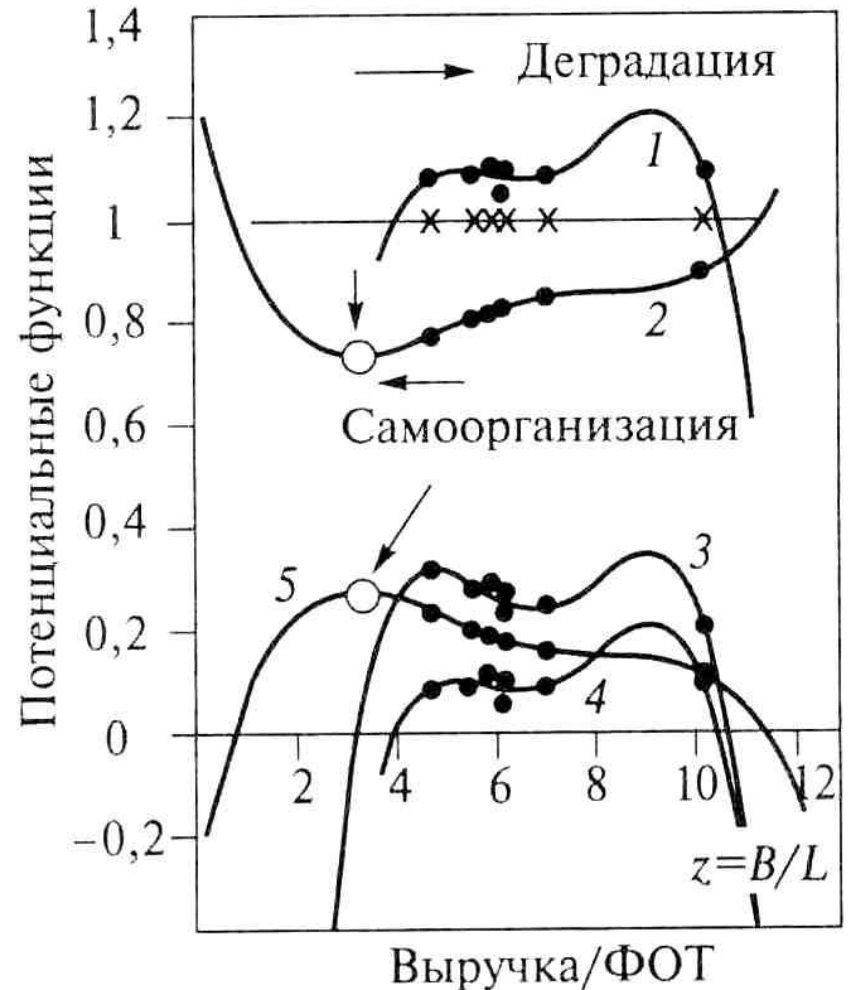
- В издержках есть глобальный ($z = 2,2$) и локальный ($z = 3,3$) минимумы;
- состояние при $z = 3,3$ неустойчиво;
- сдвиг стационарной точки за 1,5 года от $z = 3,3$ к $z = 2,2$ вызван завышенным размером ФОТ по сравнению с другими отраслями;
- область прибыли неустойчива по Ляпунову (кривая 3).

Пример 2. Анализ экономических показателей в целом для промышленности Свердловской области (рис. 13)

Рис. 13. Зависимость приведенных показателей промышленности Свердловской области :

1. выручка (кривая 1),
2. материальные затраты (кривая 2),
3. чистый доход (кривая 3),
4. нормы прибыли (кривая 4),
5. ФОТ (кривая 5).

- Условие самоорганизации (при $z = 3$) – это движение экономической системы к стационарному состоянию с G_{\min} , ФОТ_{\max} , – является условием устойчивого развития.



Итак, результаты подтверждают возможность оценки устойчивости при нелинейном развитии экономики региона.

Благодарю за внимание!

