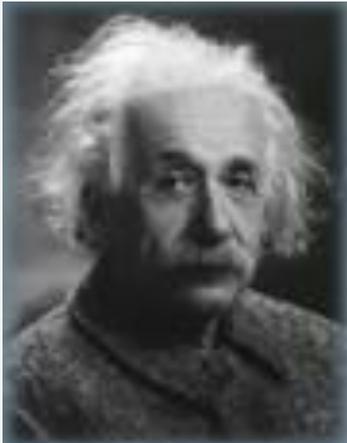
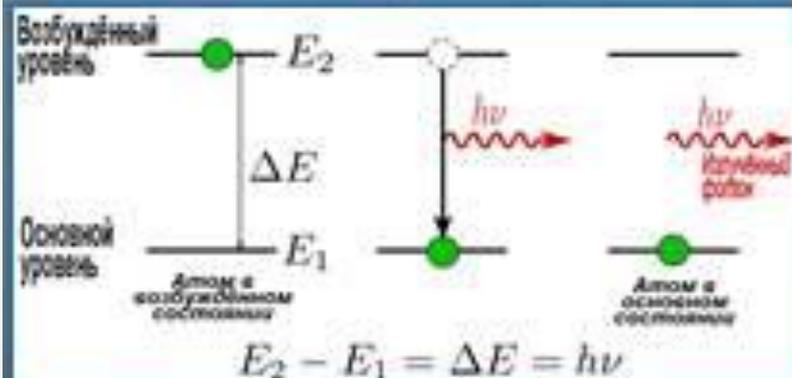


Вынужденное излучение света

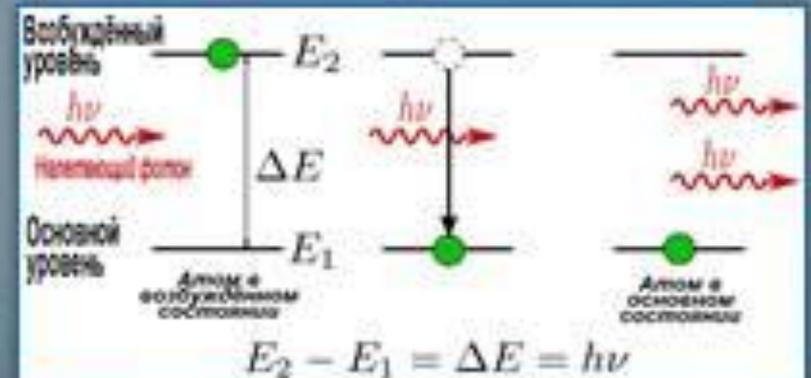


1917 г. А. Эйнштейн:
Механизмы испускания света веществом

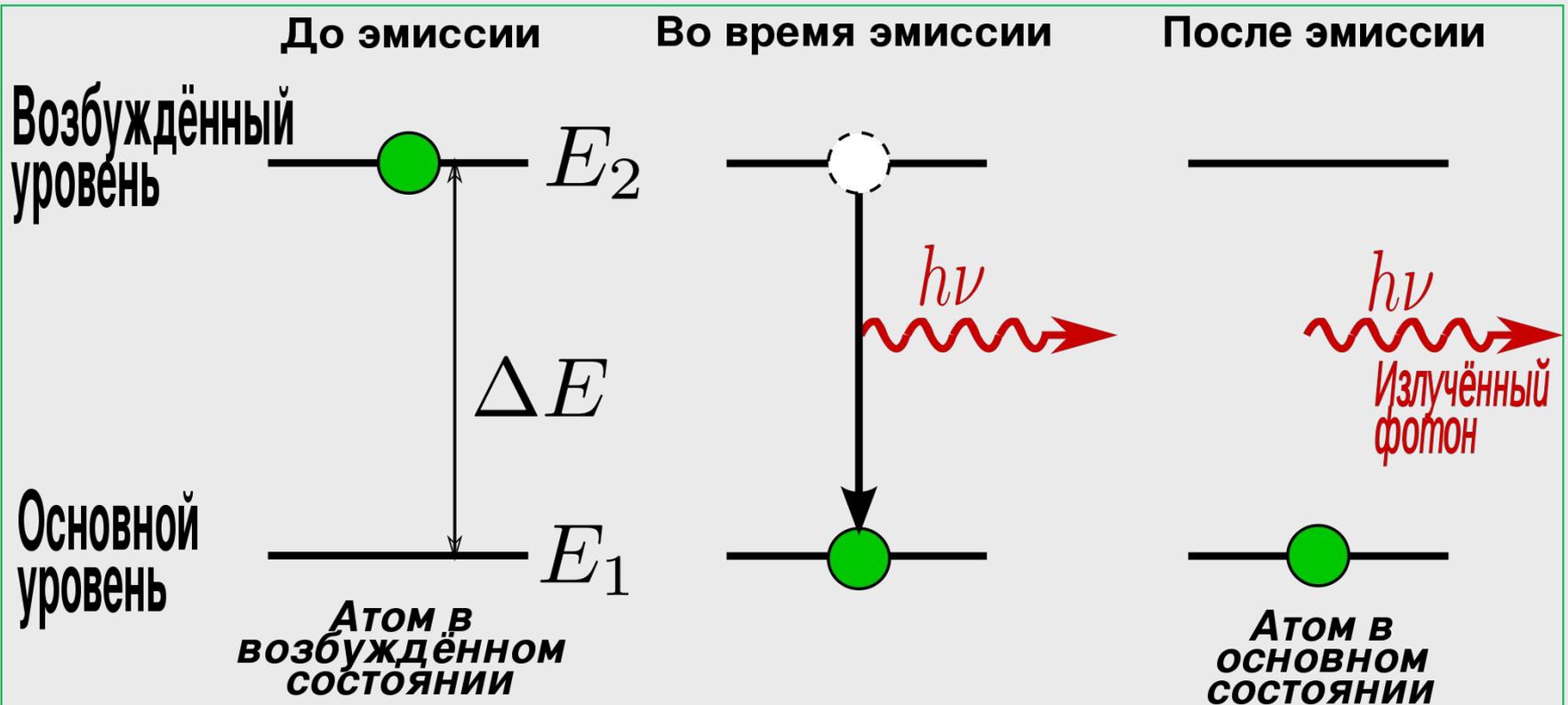
Спонтанное (некогерентное)



Вынужденное (когерентное)



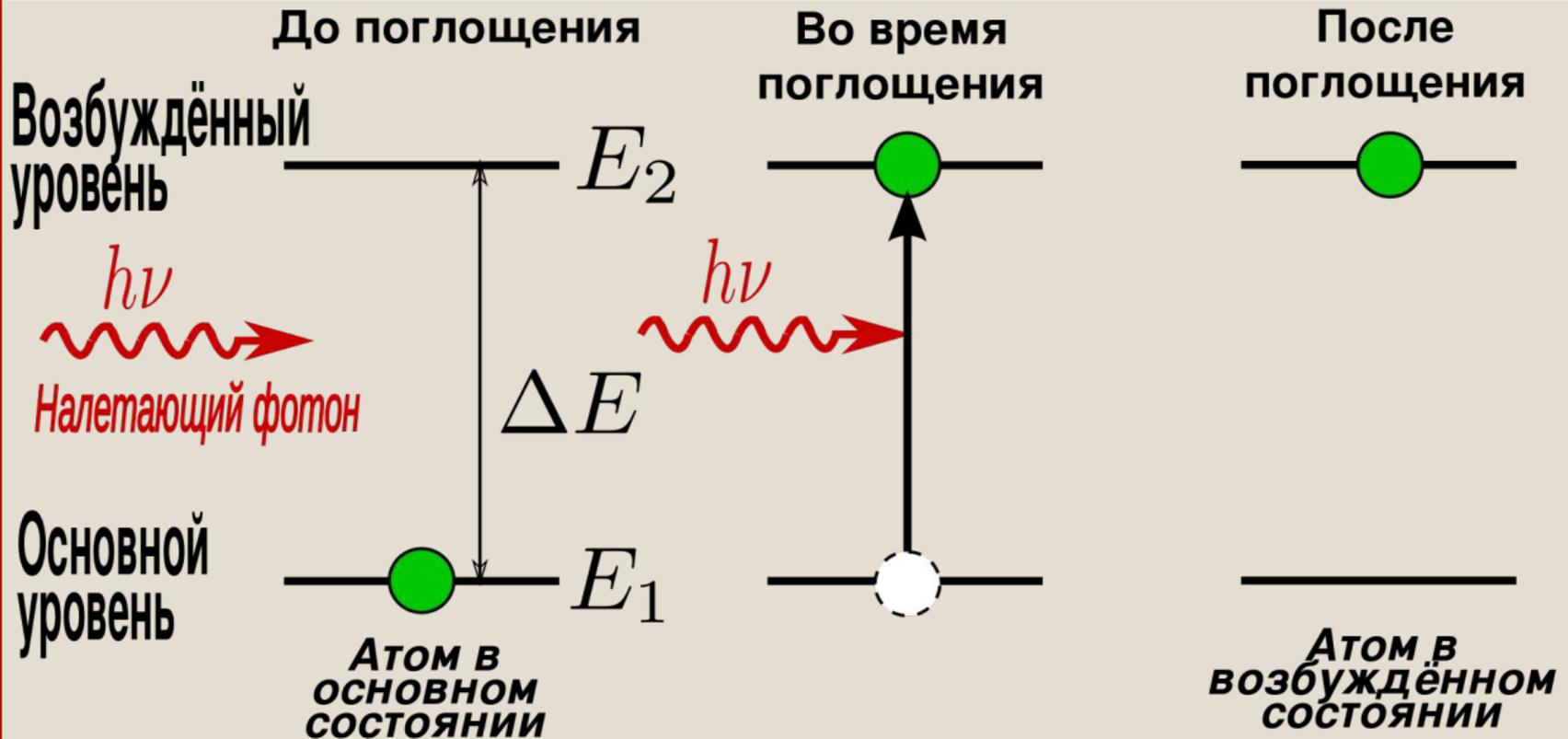
Излучение света (спонтанные переходы)



$$E_2 - E_1 = \Delta E = h\nu$$

Поглощение света

(вынужденные переходы)



$$E_2 - E_1 = \Delta E = h\nu$$

Вынужденное излучение света

Равновесие между веществом и излучением достигается, когда число атомов, совершающих переход в одном направлении (с уровня на n уровень m), равно числу атомов, совершающих переход в другом направлении (с уровня m на уровень n):

$$N_{nm} = N_{mn}$$

Пусть $E_n > E_m$, и переходы $m \rightarrow n$ только вынужденные, а $n \rightarrow m$ – только спонтанные. \Rightarrow

$$E_n - E_m = \hbar \omega$$

$$N_{mn}^{\text{вын}} = N_{nm}^{\text{спон}}$$

Вероятность вынужденных переходов пропорциональна плотности энергии $u(\omega, T)$, вынуждающего излучения, приходящегося на соответствующую переходу частоту.

Вынужденное излучение света

Вероятность спонтанных переходов от плотности энергии $u(\omega, T)$, не зависит.

Если $N_{nm}^{спон} = A_{nm} N_n$ и $N_{mn}^{вын} = B_{mn} u(\omega, T) N_m$

то $B_{mn} u(\omega, T) N_m = A_{nm} N_n$

Из этого уравнения получается:

$$u(\omega, T) = \frac{A_{nm} N_n}{B_{mn} N_m}$$

Коэффициенты B_{nm} и A_{mn} –

зависят от ω , а количества атомов на уровнях n и m относятся согласно распределению Больцмана:

$$\frac{N_n}{N_m} = e^{-\frac{E_n - E_m}{kT}} = e^{-\frac{\hbar \omega}{kT}}$$

Вынужденное излучение света

С учетом этого получается:

$$u(\omega, T) = \frac{A_{nm}}{B_{mn}} \frac{1}{e^{\frac{\hbar\omega}{kT}}}$$

Если положить:

$$\frac{A_{nm}}{B_{mn}} = \frac{\hbar\omega^3}{\pi^2 c^3} \quad \text{то} \quad u(\omega, T) = \frac{\hbar\omega^3}{\pi^2 c^3} \frac{1}{e^{\frac{\hbar\omega}{kT}}}$$

Но спектральная плотность энергии равновесного излучения должна соответствовать формуле Планка

$$u(\omega, T) = \frac{\hbar\omega^3}{\pi^2 c^3} \frac{1}{e^{\frac{\hbar\omega}{kT}} - 1} = \frac{A_{nm}}{B_{mn}} \frac{1}{e^{\frac{\hbar\omega}{kT}} - 1} = \frac{A_{nm} N_n}{B_{mn} (N_m - N_n)}$$

Вынужденное излучение света

Тогда уравнение равновесия должно иметь вид:

$$B_{mn} u(\omega, T) N_m = \underline{B_{nm} u(\omega, T) N_n} + A_{nm} N_n$$

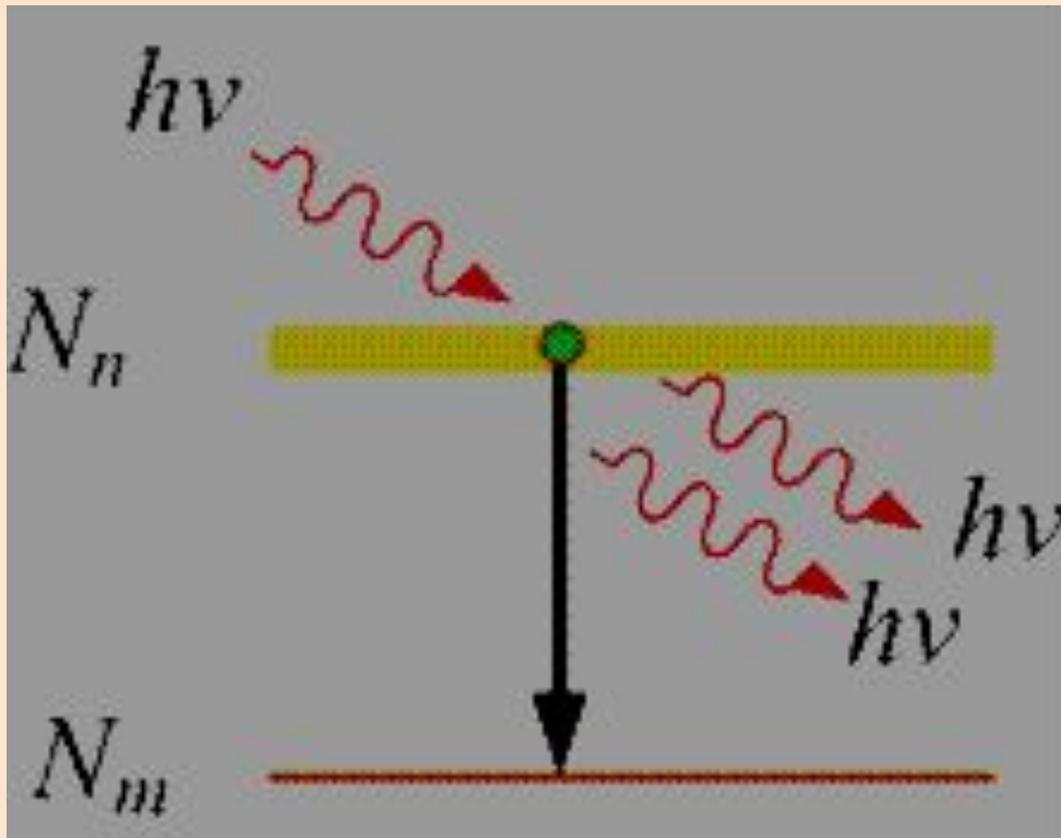
А. Эйнштейн в 1916 году показал, что наряду с процессом спонтанного излучения и резонансного поглощения существует еще один процесс – вынужденное или индуцированное излучение, когда свет резонансной частоты, вызывает высвечивание атомов, находящихся на соответствующем верхнем уровне.

вероятность переходов с излучением должна быть равна вероятности переходов с поглощением.

$$P_{nm} = P_{mn}$$

B_{nm} и B_{mn} – коэффициенты Эйнштейна, $B_{nm} = B_{mn}$

Вынужденное излучение света

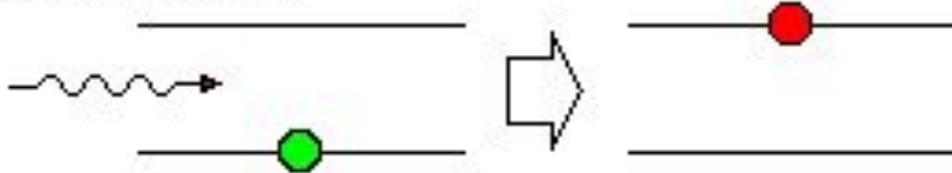


Испускаемый свет при этом неотличим от вынуждающего света, совпадает с ним по частоте, фазе, поляризации и направлению распространения. Т.е. вынужденное излучение добавляет в световой пучок такие же кванты (удваивает).

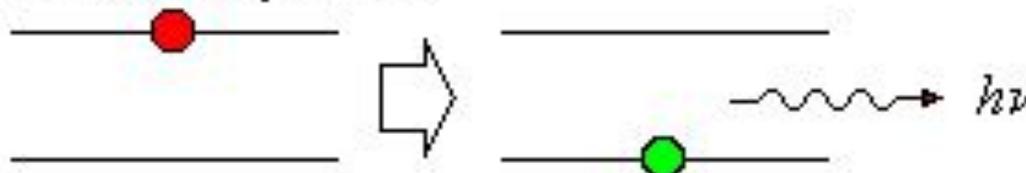
Резонансное поглощение наоборот, эти кванты убирает. На опыте проявляется только разность поглощенного и вынужденного излучения.

Вынужденное излучение света

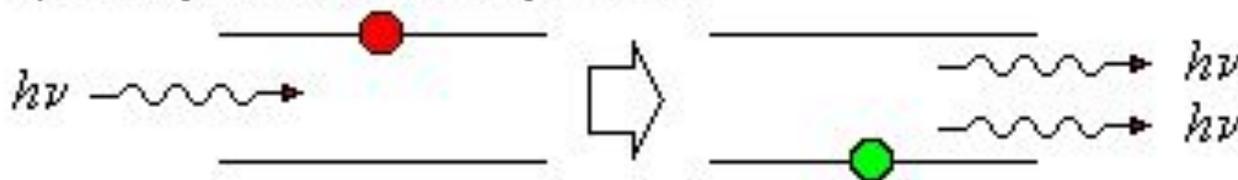
а) Поглощение



б) Спонтанное излучение



в) Вынужденное излучение

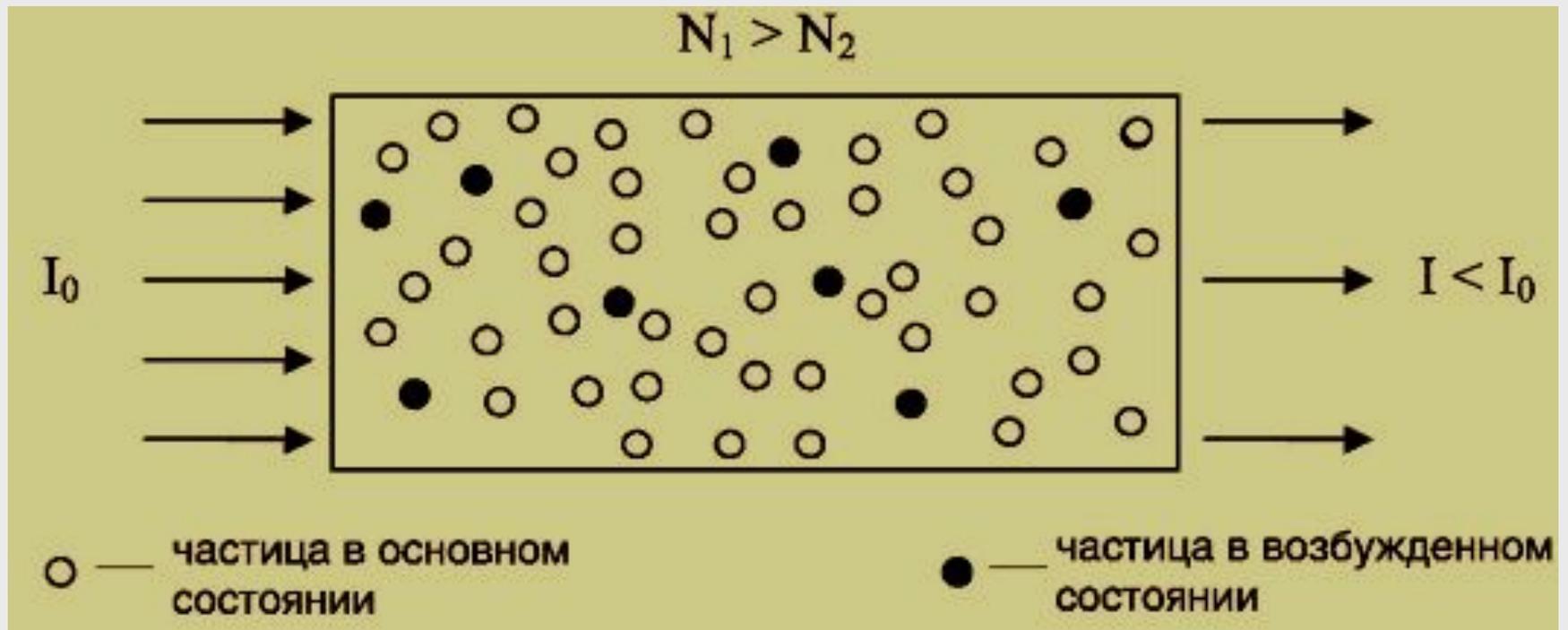


-  — невозбужденный атом с энергией E_i
-  — возбужденный атом с энергией E_j

Вынужденные переходы с равной вероятностью идут во всех направлениях.

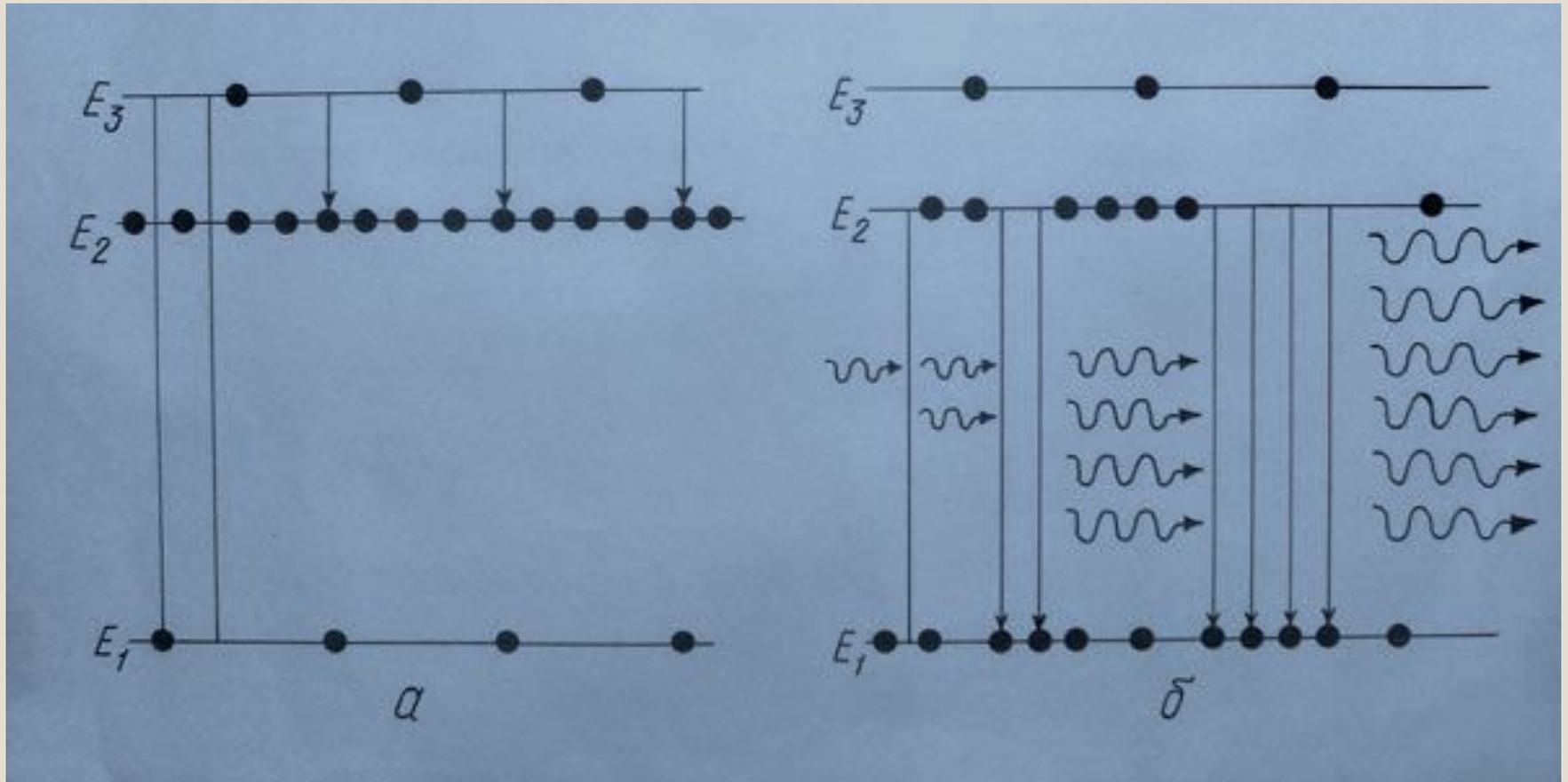
Вынужденное излучение света

Поглощающие атомы находятся на нижнем из двух уровней, излучающие на верхнем. Обычно среда содержит больше атомов на нижнем уровне (распределение Гиббса). \Rightarrow поглощение преобладает и пучок ослабляется средой (закон Бугера).



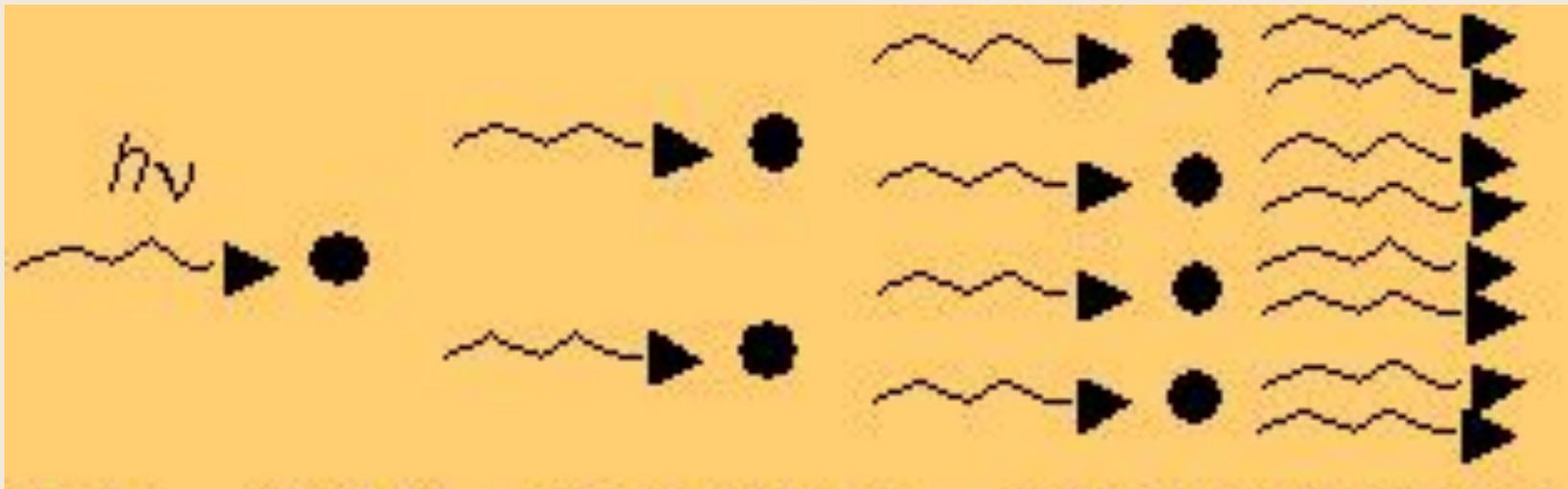
Вынужденное излучение света

Для усиления света необходимо преобладание атомов на верхнем энергетическом уровне: инверсная заселенность.



Вынужденное излучение света

Усиление интенсивности вынужденного излучения

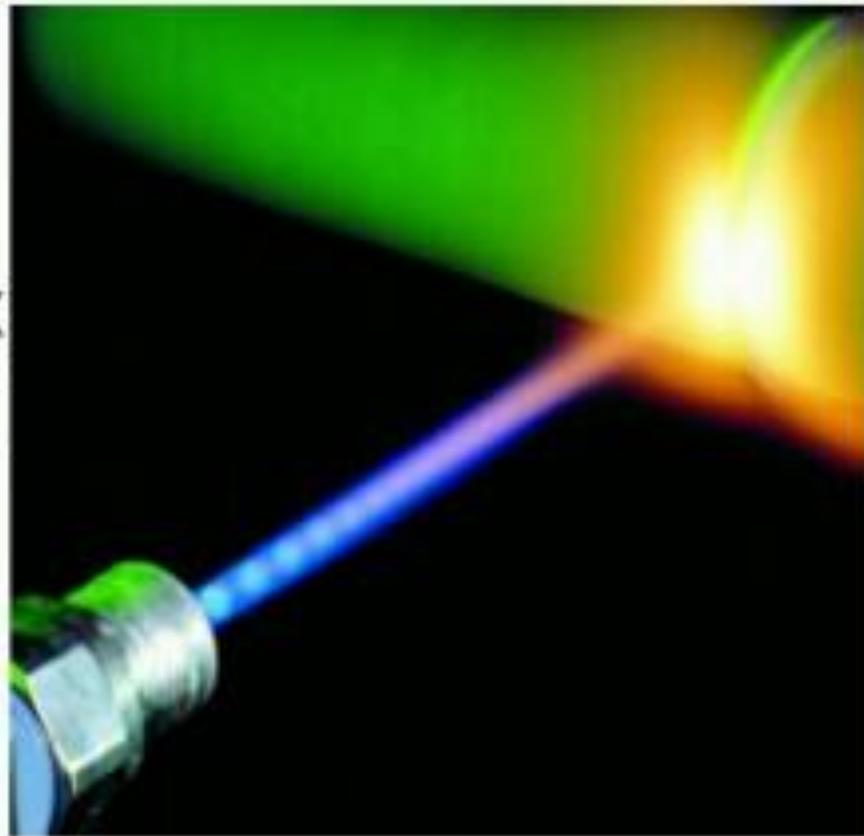


Применение:

Квантовые усилители света (**LASER**). Активная среда заполняет пространство между зеркалами. Среда усиливает свет, проходящий через нее. Начало дает спонтанное излучение одного из атомов. Большое усиление достигается когда угол с осью лазера очень мал и свет испытывает много отражений и все лучи накладываются, усиливая друг друга.

Квантовые генераторы

Оптические квантовые генераторы, излучение которых лежит в видимой и инфракрасной области спектра, называются лазерами.



Вынужденное излучение света

Лазер

*light **a**mplification by **s**timulated **e**mission of **r**adiation*

«усиление света посредством вынужденного излучения»,

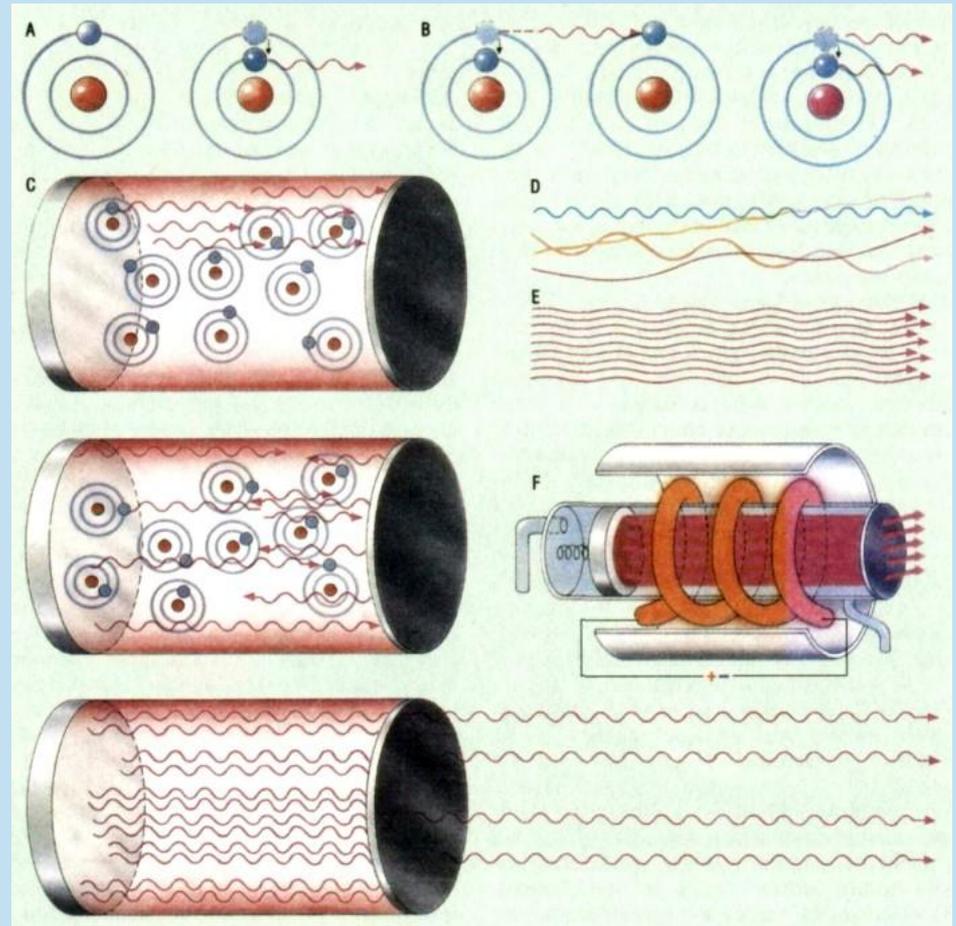
или **оптический квантовый генератор** — это устройство, преобразующее энергию накачки (световую, электрическую, тепловую, химическую и др.) в энергию когерентного, монохроматического, поляризованного и узконаправленного потока излучения.

Вынужденное излучение света

В пространстве между зеркалами образуется стоячая волна \Rightarrow одна фаза выходящего света.

Диапазоны лазеров: от коротких радиоволн до ультрафиолета.

При излучении атомы переходят на нижний уровень, поэтому необходимо восполнять убыль атомов на верхнем уровне. Это сложное дело и поэтому было реализовано только через 40 лет после открытия Эйнштейна.



1950 год: А. Кастлер (Нобелевская премия по физике 1966 года) предлагает метод оптической накачки среды для создания в ней инверсной населённости. Реализован на практике в 1952 году Бросселем, Кастлером и Винтером. До создания квантового генератора оставался один шаг: ввести в среду положительную обратную связь, то есть поместить эту среду в резонатор.

1954 год: первый микроволновый генератор — мазер на аммиаке (**Ч. Таунс, Басов Н. Г. и Прохоров А. М.** — Нобелевская премия по физике 1964 года). Роль обратной связи играл объёмный резонатор, размеры которого были порядка 12,6 мм (длина волны, излучаемой при переходе аммиака с возбуждённого колебательного уровня на основной). Для усиления электромагнитного излучения оптического диапазона необходимо было создать объёмный резонатор, размеры которого были бы порядка микрона.

Из-за технологических трудностей многие учёные в 50-е годы считали, что создать генератор видимого излучения невозможно.

1960 год: Т. Мейман продемонстрировал работу первого оптического квантового генератора — лазера. В качестве активной среды использовался кристалл искусственного **рубина** (оксид алюминия Al_2O_3 с небольшой примесью хрома Cr), а вместо объёмного резонатора служил резонатор Фабри — Перо, образованный серебряными зеркальными покрытиями, нанесёнными на торцы кристалла. Этот лазер работал в импульсном режиме на длине волны 694,3 нм. В декабре того же года был создан **гелий-неоновый лазер**, излучающий в непрерывном режиме (А. Джаван, У. Беннет, Д. Хэрриот). Изначально лазер работал в инфракрасном диапазоне, затем был модифицирован для излучения видимого красного света с **длиной волны 632,8 нм.**

Вынужденное излучение света

Нагревом инверсного состояния добиться нельзя, нужны специальные методы.

Рубин: ион хрома Cr^{3+} . Схема уровней (1→3→2→1).

На третьем уровне электроны долго не задерживаются, переходят на второй уровень, где и оседают

(более долгоживущий, в тысячи раз), получается инверсная заселенность.

Нормальное возбужденное

3 — *состояние* E_3

Переход без излучения

2 — E_2

Метастабильное возбужденное состояние

$h\nu$

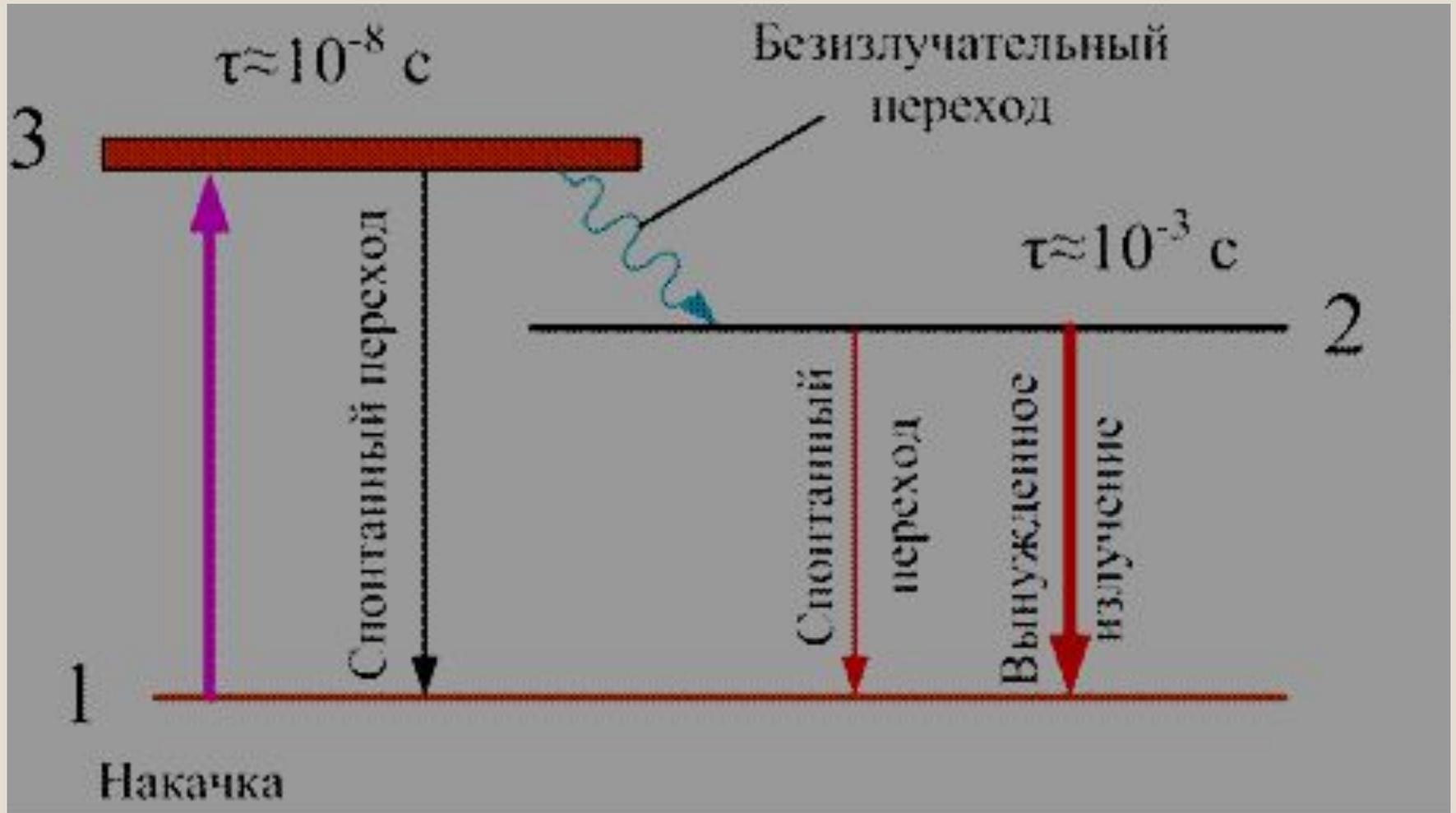
Переходы с излучением

$h\nu$

1 — E_1



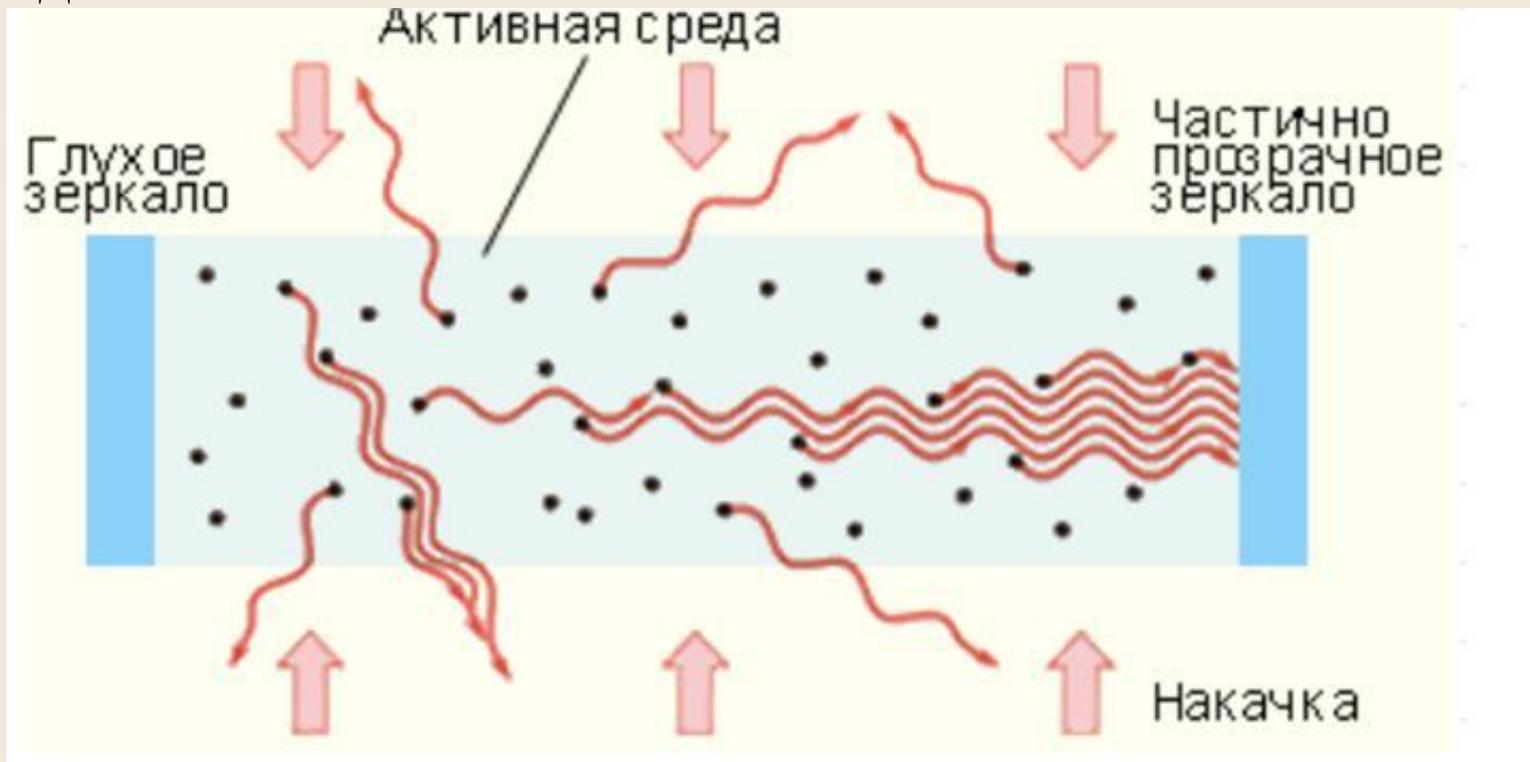
Вынужденное излучение света



Вынужденное излучение света

Накачка: вспышка зеленого(синего) света при разрядке конденсатора через газоразрядную лампу, \Rightarrow инверсная заселенность \Rightarrow красный луч. Импульсный режим.

Непрерывный свет дают газовые лазеры, - иной механизм возбуждения.



УСТРОЙСТВО РУБИНОВОГО ЛАЗЕРА

Лампа накачки

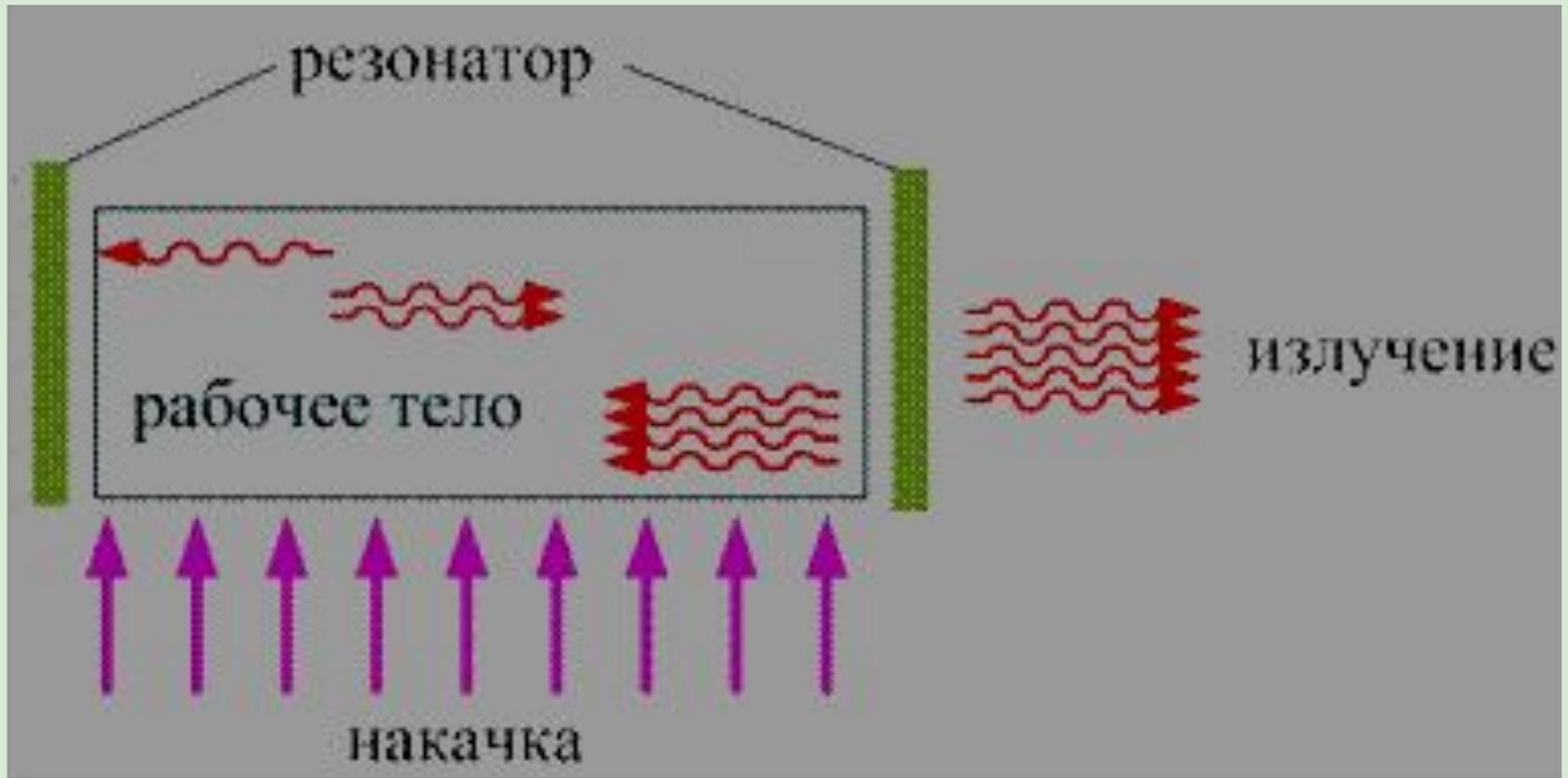
Полупрозрачная
посеребренная грань



Кристалл рубина

Лазерный луч

Вынужденное излучение света



Когерентность излучения. Интерференция пучков от независимых генераторов. Фокусируется на малую площадь ($\sim \lambda^2$) с большой плотностью энергии (резка металла) Связь передача энергии, запись информации.

Физика лазеров интенсивно развивается. С момента изобретения лазера почти каждый год появлялись всё новые его виды, приспособленные для различных целей. В 1961 г. был создан лазер на неодимовом стекле, а в течение следующих пяти лет были разработаны лазерные диоды, лазеры на красителях, лазеры на диоксиде углерода, химические лазеры. В 1963 г. Ж. Алфёров и Г. Кремер (Нобелевская премия по физике 2000 г.) разработали теорию полупроводниковых гетероструктур, на основе которых были созданы многие лазеры.

Лазерное излучение

ДЛИНЫ ВОЛН В *нм.*

660

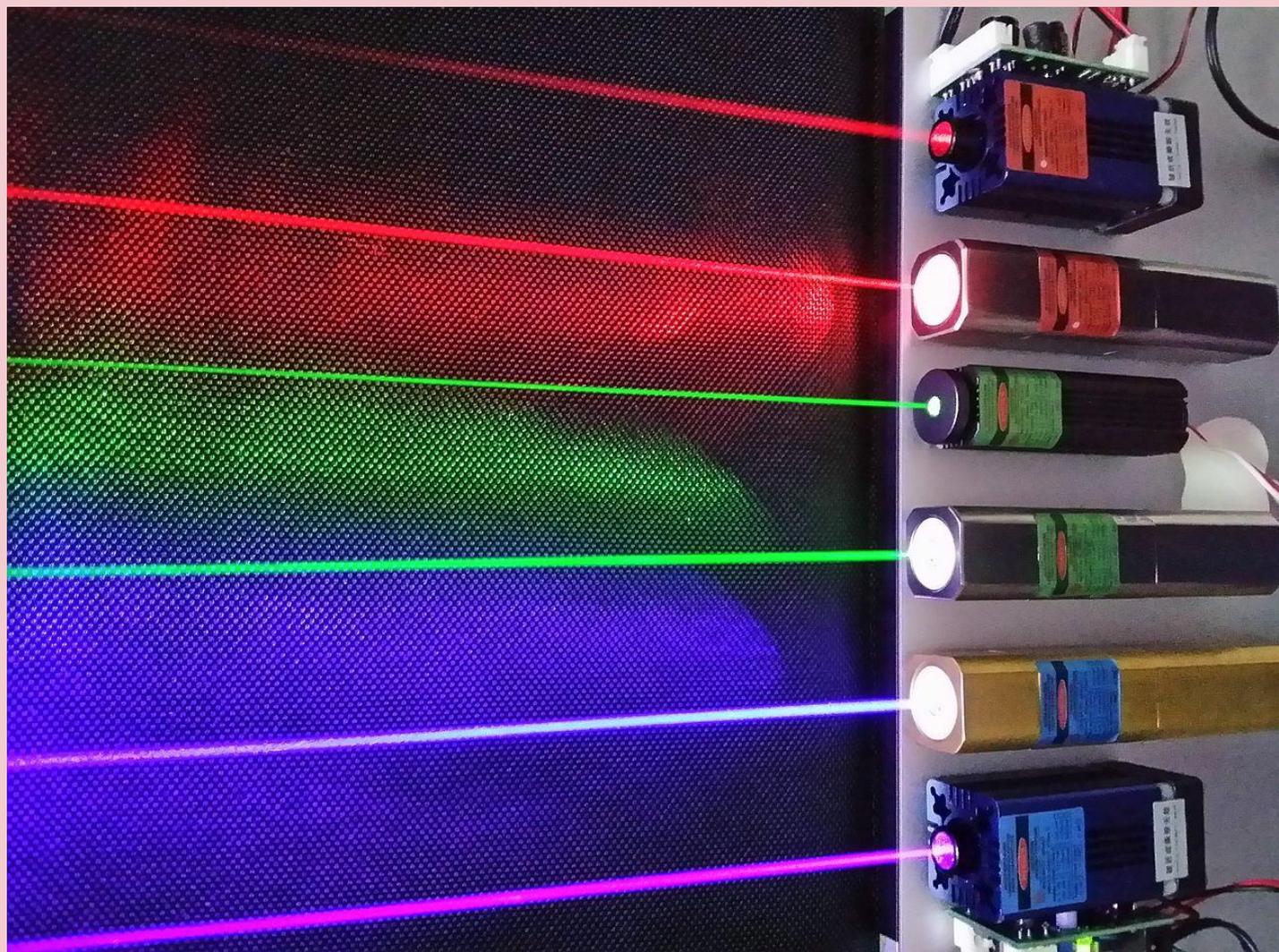
635

532

520

445

405



Квантовая механика

Порции энергии электромагнитного поля получили название световых квантов или фотонов ($\hbar \omega$).

Квантовый характер электромагнитного излучения проявляется в тех опытах, где энергия кванта велика, а их число не очень большое. В других опытах, где энергия кванта мала, а их число очень большое, более отчетливо проявляются волновые свойства.

Опыты Милликена в 1916 году позволили установить линейную зависимость E и ω и измерить \hbar .

Результаты измерений хорошо согласуются с теорией.

Квантовая механика

Особенно тщательной и разносторонней проверке представления о квантах были подвергнуты в опытах с рентгеновским излучением

большая энергия квантов — $\lambda = 0.1 \text{ нм}$,

$$\varepsilon = \hbar \omega = 12.5 \text{ кэВ} \sim 10^{-15} \text{ Дж}$$

значительно больше энергии световых квантов (зеленый свет — $\lambda = 500 \text{ нм}$, $\varepsilon = \hbar \omega = 2.5 \text{ эВ} \sim 4 \cdot 10^{-19} \text{ Дж}$).

Все опыты с рентгеновским излучением показывают, что энергия передается концентрированными порциями, а не накапливается постепенно, как это было бы при передаче энергии в виде электромагнитной волны.

Опыты с непосредственной регистрацией фотонов Ботэ и А.Ф. Йоффе (фотоны распространяются в разные стороны в виде квантов).

x

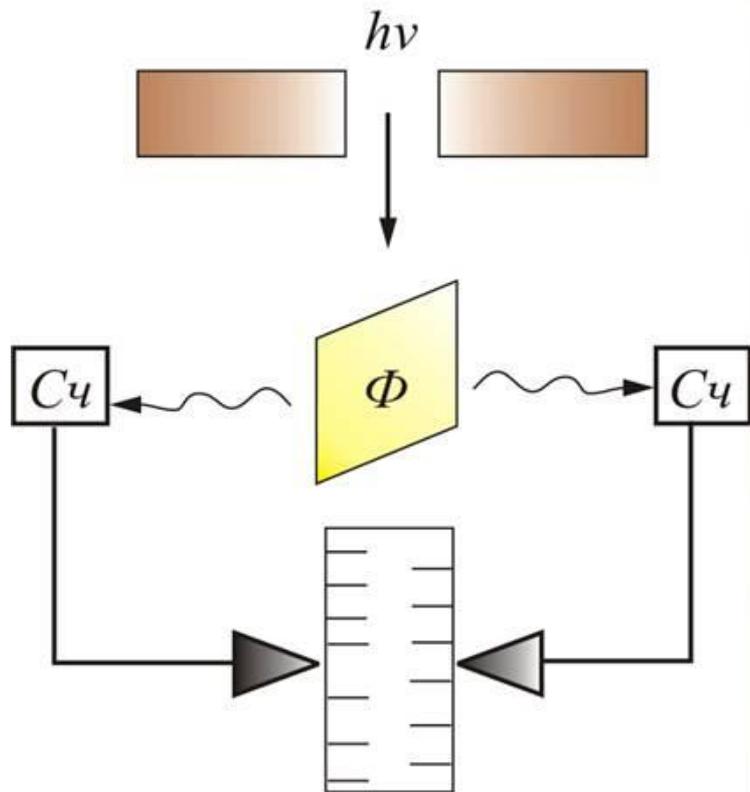
Опыт Боте. подтверждающий гипотезу Эйнштейна

Тонкая металлическая фольга Φ помещена между двумя газоразрядными счетчиками $Cч$.

При облучении рентгеновскими лучами Φ становится источником рентгеновского излучения.

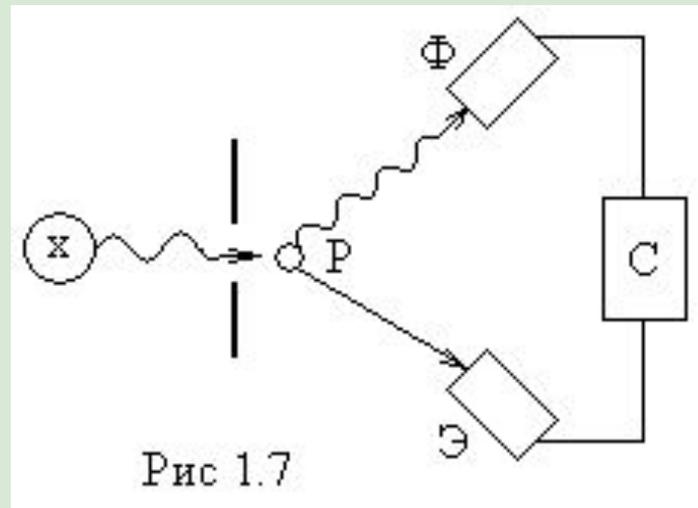
При попадании рентгеновских лучей счетчик срабатывает и с помощью спец. устройства делает метку на движущейся ленте.

Метки располагались на ленте хаотично, что свидетельствует



Квантовая механика

Фотон обладает импульсом:



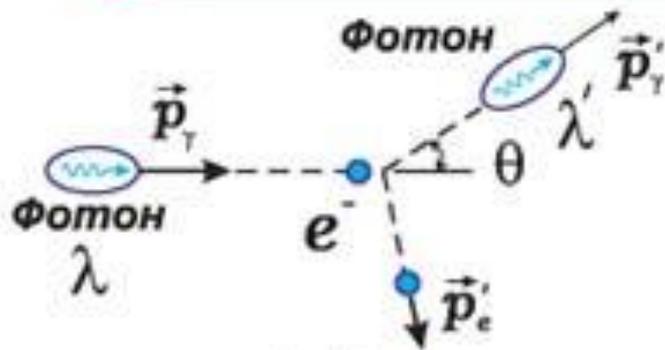
Масса покоя фотона равна нулю, поэтому фотон не существует как покоящаяся частица. Давление света есть результат передачи импульса.

Опыты А. Комптона показывают, что фотоны ведут себя как частицы с энергией $\varepsilon = \hbar \omega$ и импульсом

Квантовая механика

Комптоновское рассеяние фотонов

$$E = h\nu, \quad p_\gamma = \frac{h\nu}{c}, \quad E_\gamma + E_e = E'_\gamma + E'_e,$$
$$E_e = 0, \quad p_e = 0. \quad \vec{p}_\gamma + \vec{p}_e = \vec{p}'_\gamma + \vec{p}'_e.$$



$$\lambda' - \lambda = 2 \frac{h}{m_e c} \sin^2 \frac{\theta}{2}$$

Справедливы законы их сохранения. Векторный характер закона сохранения импульса. Законы релятивистской механики. Электроны отдачи. опыты с другими частицами.

Квантовая механика

Фотоны испытывают действие гравитационного поля.

$$m = \frac{\varepsilon}{c^2} = \frac{\hbar \omega}{c^2};$$

⇒ гравитационное притяжение к Солнцу. Двигаясь в гравитационном поле, фотон изменяет свою энергию вследствие изменения его потенциальной энергии.

$$mgh = \frac{\hbar \omega}{c^2} gh;$$

⇒ – меняется частота. $\Delta\omega = \frac{\omega}{c^2} gh;$

Таким образом, для света (электромагнитной волны) оказываются одинаково существенными оба аспекта природы: волновой и корпускулярный ⇒ **корпускулярно–волновой дуализм.**

Квантовая механика

Дальнейшее развитие физики микромира позволило установить, что \Rightarrow **корпускулярно–волновой дуализм** не является специфической особенностью фотонов, а имеет более общий характер, присущи частицам вещества (электроны, протоны, атомы, молекулы).

Поведение электронов в атоме, как и поведение фотонов, противоречит привычным законам классической физики. В 1923 году **Луи де-Бройль** выдвинул предположение, что не только фотоны, но и **любые частицы обладают волновыми свойствами**, которые играют существенную роль в атомных явлениях.

Луи Де Бройль

В 1924 году французский физик Луи де Бройль высказал гипотезу о том, что установленный ранее для фотонов корпускулярно-волновой дуализм присущ всем частицам — электронам, протонам, атомам и так далее, причём количественные соотношения между волновыми и корпускулярными свойствами частиц те же, что и для фотонов.



Квантовая механика

Между длиной волны и импульсом фотона существует связь:

$$p = \hbar k; \quad \lambda = \frac{2\pi\hbar}{p};$$

Это соотношение должно быть применимо к любым частицам. \Rightarrow формула для длины волны де-Бройля, т.е. длины волны, приписываемой частице с импульсом p , которая описывает ее волновые свойства. Если скорость частицы мала: $v \ll c \Rightarrow$

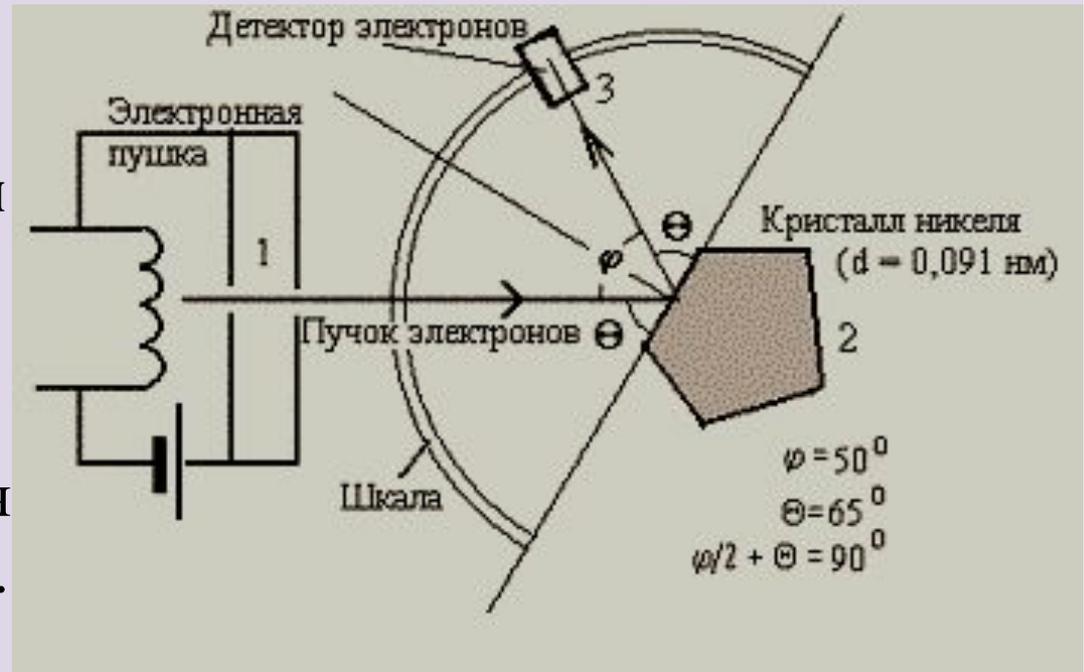
$$\lambda = \frac{2\pi\hbar}{mv};$$

Квантовая механика

В 1912 – 14 годах проводились опыты по рассеиванию рентгеновского излучения на кристаллах для доказательства их волновой природы (Лауэ, Брэгги, Вульф). Была обнаружена интерференция вторичных волн.

Дебройлевская длина волны электронов с энергией 100 эВ равна длине волны рентгеновского излучения.

⇒ Для проверки гипотезы де-Бройля были проведены **опыты по рассеиванию электронов на кристаллах**.
Получается аналогичная картина интерференции.



Квантовая механика

Первые опыты: Дэвиссон и Джеммер в 1927 году \Rightarrow проверка формулы Брэгга – Вульфа:

$$2d\sin(\phi) = n\lambda.$$

Томсон и Тартаковский в 1927 году получили дифракционную картину в виде колец при прохождении электронного пучка через фольгу.



Дифракция рентгеновского излучения

К.Р.
алюминий



Дифракция пучка электронов

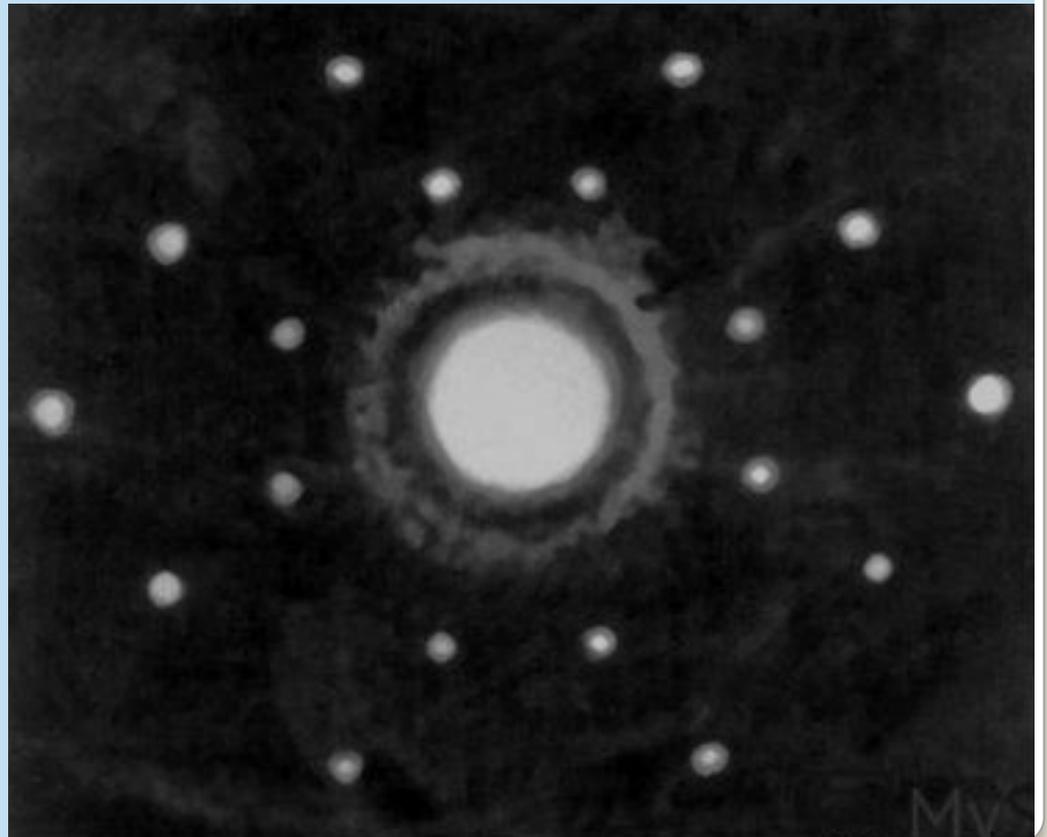
Квантовая механика

Штерн пропускал через фольгу атомные и молекулярные пучки.

Везде подтверждалось соответствие с формулой

$$\lambda = \frac{2\pi\hbar}{p};$$

Дифракция
нейтронов



Квантовая механика

Постоянная Планка \hbar очень мала. \Rightarrow Длина волны для частиц заметной массы совершенно ничтожна. Пылинка 1 мкг движется со скоростью 1 см/с \Rightarrow длина ее волны: $\lambda = 6.6 \cdot 10^{-23} \text{ м}$ – меньше атомного ядра. При взаимодействии частиц макроскопических параметров длина волны де-Бройля в миллиарды раз меньше их размеров \Rightarrow учет волновых свойств будет излишним.

Для электронов с энергией 13.5 эВ $\rightarrow \lambda = 3.3 \cdot 10^{-10} \text{ м}$.

Как и в оптике, волновые свойства частиц имеют значение только тогда, когда длина волны де-Бройля не мала по сравнению с размерами объектов, с которыми происходит взаимодействие. **В процессах взаимодействия атомов и электронов волновые свойства частиц играют определяющую роль.** (Поведение электронов в атомах).

Квантовая механика

Совокупность законов движения частиц, учитывая их волновые свойства, получила название **квантовой механики**. Квантовая механика решила ряд вопросов, связанных с поведением частиц атомного мира (поведение электронов в атомах, взаимодействие атомов, излучение и поглощение света и тд), предсказала ряд новых явлений, которые оправдались. Это является доказательством правильности отражения объективных закономерностей природы.

Квантовая механика не противоречит классической механике. Все выводы классической механики заключены в квантовой механике и могут быть получены как приближенные решения для случаев, когда волновые свойства не играют роли

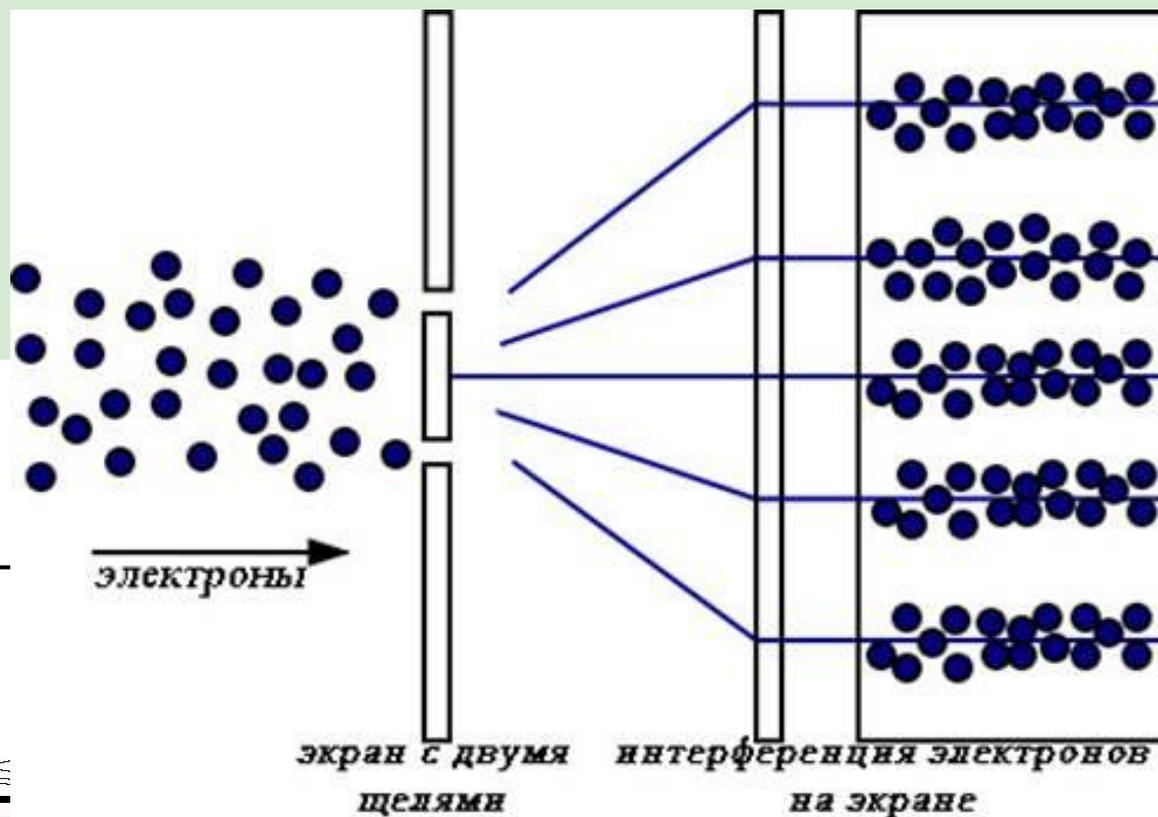
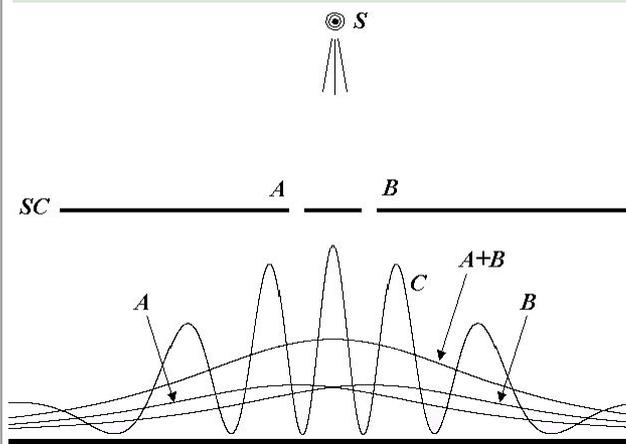


Квантовая механика

Все объекты теперь условно разделяются на два класса: макротела (волновые свойства не проявляются), и **микрочастицы** (электроны, протоны, ядра, атомы, молекулы). Всякий микрообъект представляет собой образование особого рода, сочетающее **свойства волны и частицы**. Микрообъект не способен воздействовать на наши органы чувств. В воспринимаемом нами мире нет ничего подобного микрообъекту. \Rightarrow невозможно составить наглядный образ объекта или процесса. \Rightarrow придется отказаться от попыток строить наглядные модели поведения квантовых объектов. Сочетая свойства волны и частицы, **микрообъекты не ведут себя ни как волны, ни как частицы**. В отличие от волны, они ведут себя всегда как единое целое, в отличие от частицы, они не обладают одновременно определяемыми значениями координаты и импульса.

Квантовая механика

Пример: Интерференция: прохождение электронов через две щели. Распределение не равно сумме распределений. Однако это не означает, что к электрону нельзя вообще применять понятие траектории движения.



Квантовая механика

Электрическое поле ядра удерживает электрон в некоторой области пространства вблизи ядра атома. Рассмотрим движение электрона в атоме водорода по орбите радиуса r . Энергия электрона складывается из кинетической энергии движения и потенциальной энергии кулоновского взаимодействия с ядром.

Силу притяжения электрона к ядру уравновешивает центробежная сила:

$$E = \frac{mv^2}{2} - \frac{ke^2}{r};$$

$$\frac{mv^2}{r} = \frac{ke^2}{r^2} \Rightarrow \frac{mv^2}{2} = \frac{ke^2}{2r} \Rightarrow E = -\frac{ke^2}{2r} = -\frac{mv^2}{2};$$

Момент импульса электрона:

$$L = mvr = mv^2 \left(\frac{r}{v} \right) = -\frac{2E}{\omega}$$

ω – угловая скорость электрона:

Квантовая механика

В атоме водорода энергия должна соответствовать бальмеровским термам.

$$E = -\frac{\hbar R}{n^2} \Rightarrow En^2 = \text{const}$$

После дифференцирования:

$$\frac{dE}{dn} = -\frac{E}{n}$$

Двигаясь по орбите в угловой скоростью ω , электрон излучает волну с частотой ω :

Допустим $\Delta n = 1$, $\Delta E = \hbar\omega$, тогда: $n\hbar\omega = -2E = L\omega$

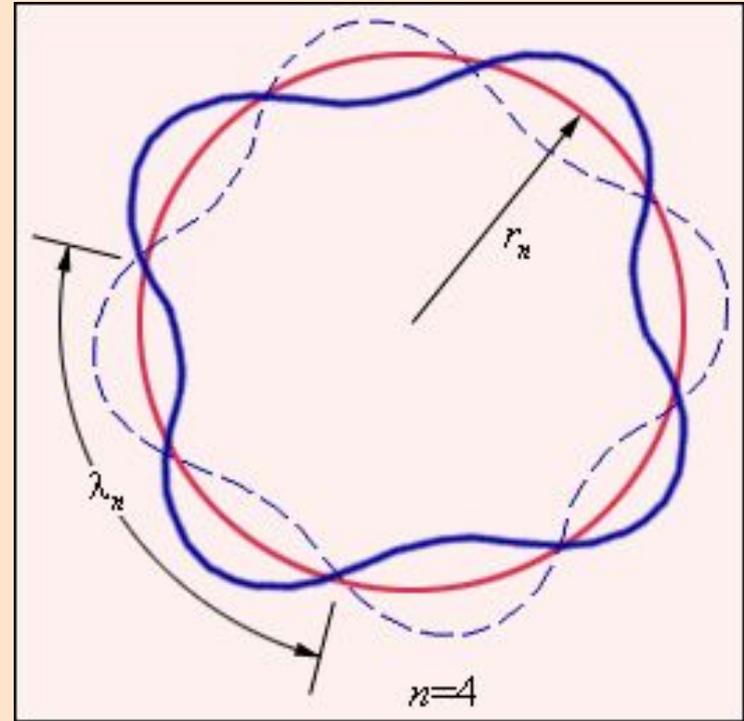
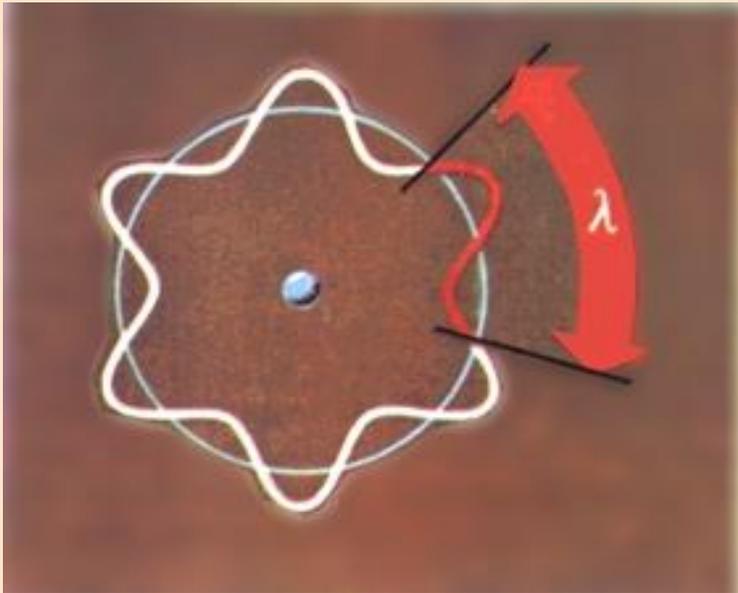
откуда: $L = n\hbar$ но: $L = pr$ откуда:

$$2\pi r_n = \frac{2\pi L_n}{p_n} = \frac{2\pi \hbar}{p_n} n = \lambda_n n$$

Квантовая механика

Разрешены только такие орбиты, на которых укладывается целое число волн де-Бройля:

$2\pi r_n = \lambda n$ – условие квантования.



Электрическое поле ядра удерживает электрон в некоторой области пространства вблизи ядра атома. Под размером атома будем понимать размер основной области сосредоточения волны электрона.

Квантовая механика

Значения боровских орбит атома водорода найдем из уравнения:

$$L^2 = m(mv^2)r^2 = m\left(\frac{ke^2}{r}\right)r^2 = mke^2r$$

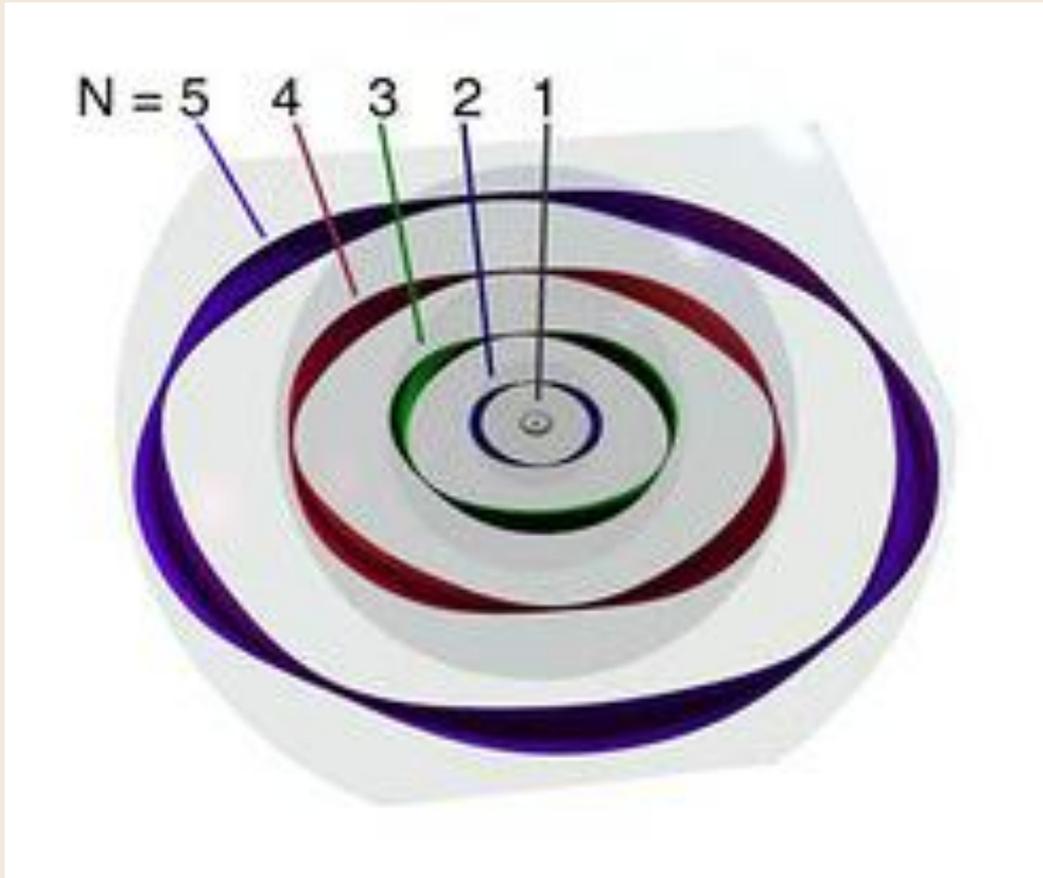
откуда:

$$r_n = \frac{L_n^2}{mke^2} = \frac{\hbar^2}{mke^2}n^2;$$

Энергия устойчивых состояний:
$$E_n = -k^2 \frac{me^4}{2\hbar^2 n^2};$$

Волновое движение электронов в ограниченном пространстве сводится, как и в других волновых явлениях, к образованию **«стоячих волн»**, которые удовлетворяют **граничным условиям**, которые связывают кинетическую энергию электрона с размерами атома.

Квантовая механика



$$E_n = -k^2 \frac{me^4}{2\hbar^2 n^2};$$

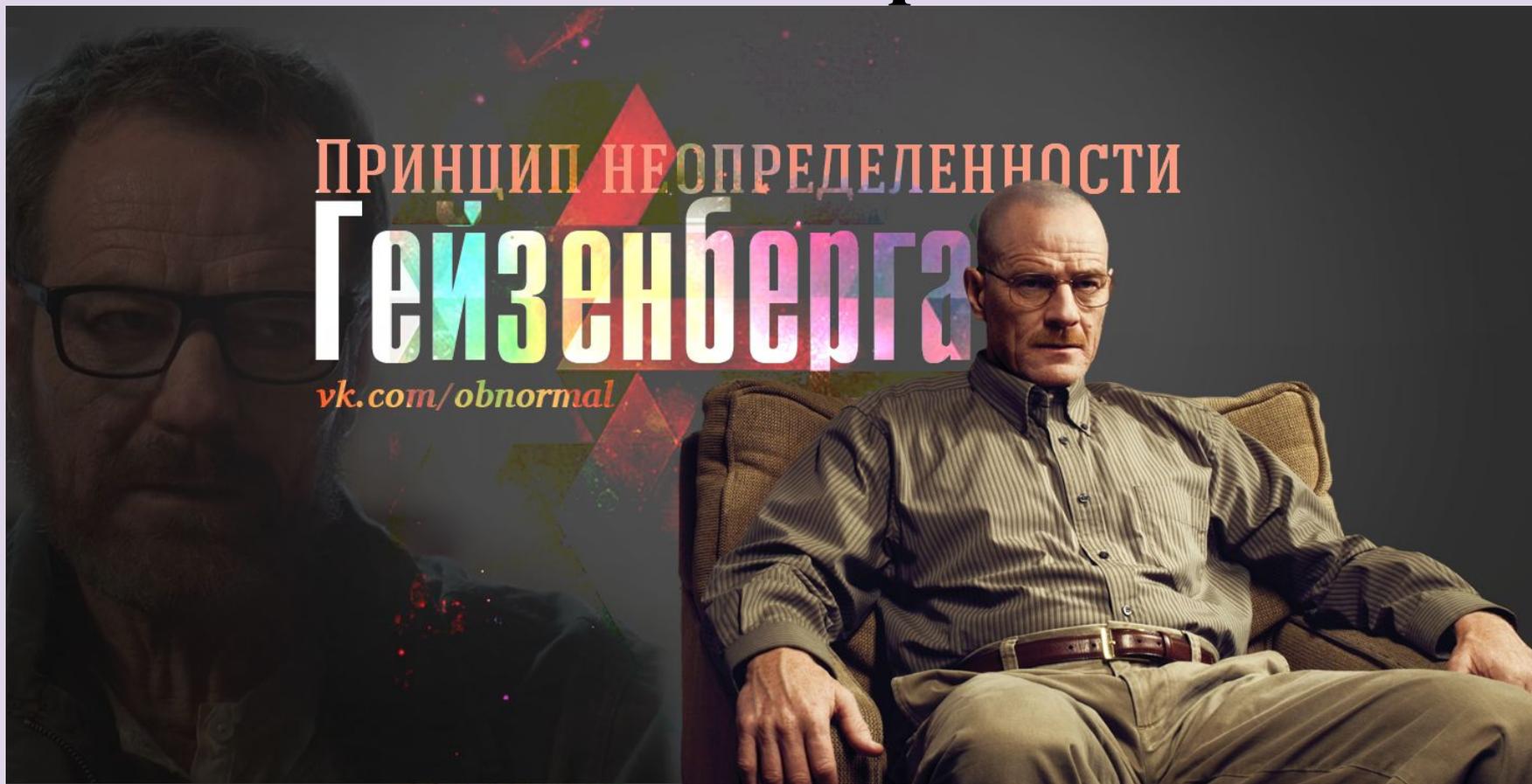
n – главное
квантовое число.

Падению электрона на ядро препятствует быстрое возрастание кинетической энергии электрона, сопровождающее уменьшение его длины волны.

Квантовая механика

При уменьшении размера атома, его энергия уменьшается, проходит через минимум, а затем возрастает. Атом будет находиться в устойчивом состоянии, когда размер будет соответствовать минимуму энергии.

Принцип неопределенности Гейзенберг 1927



Соотношение неопределенностей – одно из фундаментальных положений квантовой механики.

Принцип неопределенности Гейзенберга

Принципом неопределенности Гейзенберга называется утверждение о том, что произведение неопределенностей значений двух сопряженных переменных не может быть по порядку величины меньше постоянной планка \square .

Динамическими переменными называются величины, заданием значений которых в классической механике определяется состояние материальной точки (координаты, импульс, энергия и т.д.).

Микрочастицам приписываются измеренные значения динамических переменных, которые получаются при взаимодействии частиц с приборами.

Квантовая механика

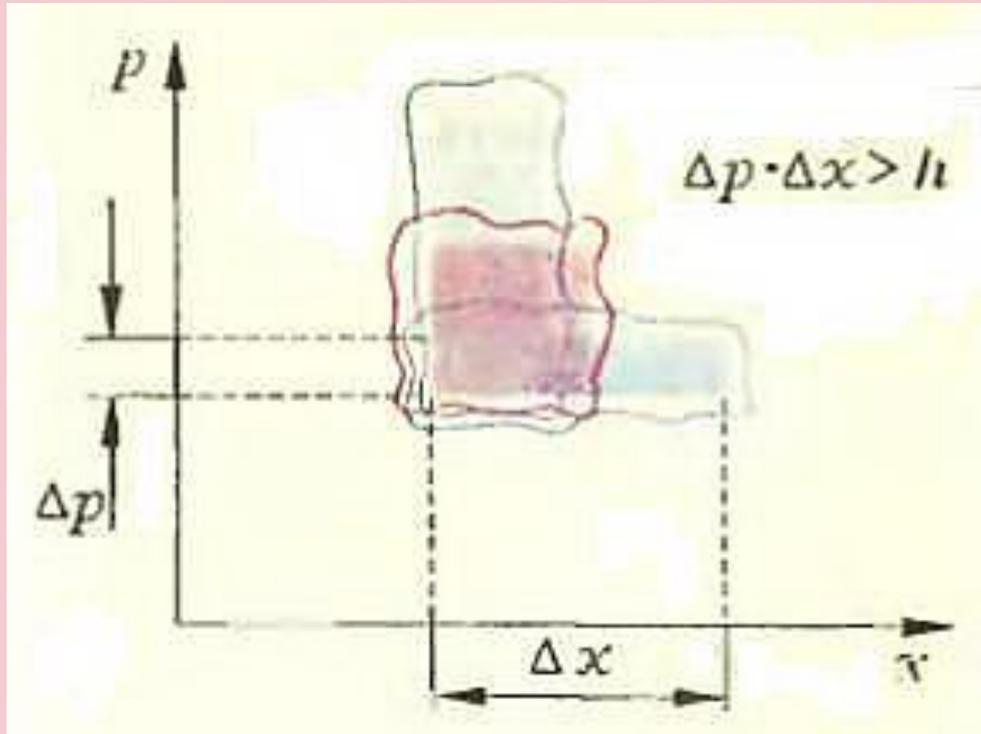
Своеобразие свойств микрочастиц проявляется в том, что не для всех переменных получаются при измерении определенные значения. Микрочастица не может одновременно иметь точные значения координаты x и компоненты импульса p_x . Неопределенности их значений удовлетворяют соотношению:

$$\Delta x \cdot \Delta p_x \geq \hbar;$$

Принцип неопределенности
Гейзенберга

$$\Delta x \cdot \Delta p_x \geq \frac{h}{2\pi} \quad \Delta y \cdot \Delta p_y \geq \frac{h}{2\pi}$$
$$\Delta y \cdot \Delta p_y \geq \frac{h}{2\pi}$$

Квантовая механика



$$\Delta x \cdot \Delta p_x \geq \hbar;$$

Чем меньше неопределенность одной из переменных, тем больше неопределенность другой. Если одна определена точно, то другая неопределенна совсем.

Аналогично для: y и p_y ; z и p_z

Такие величины называются канонически сопряженными.

Квантовая механика

Если A и B – две канонически сопряженные величины, то

$$\Delta A \cdot \Delta B \geq \frac{\hbar}{2};$$

– соотношение неопределенностей для A и B .

Канонически сопряженными являются энергия и время

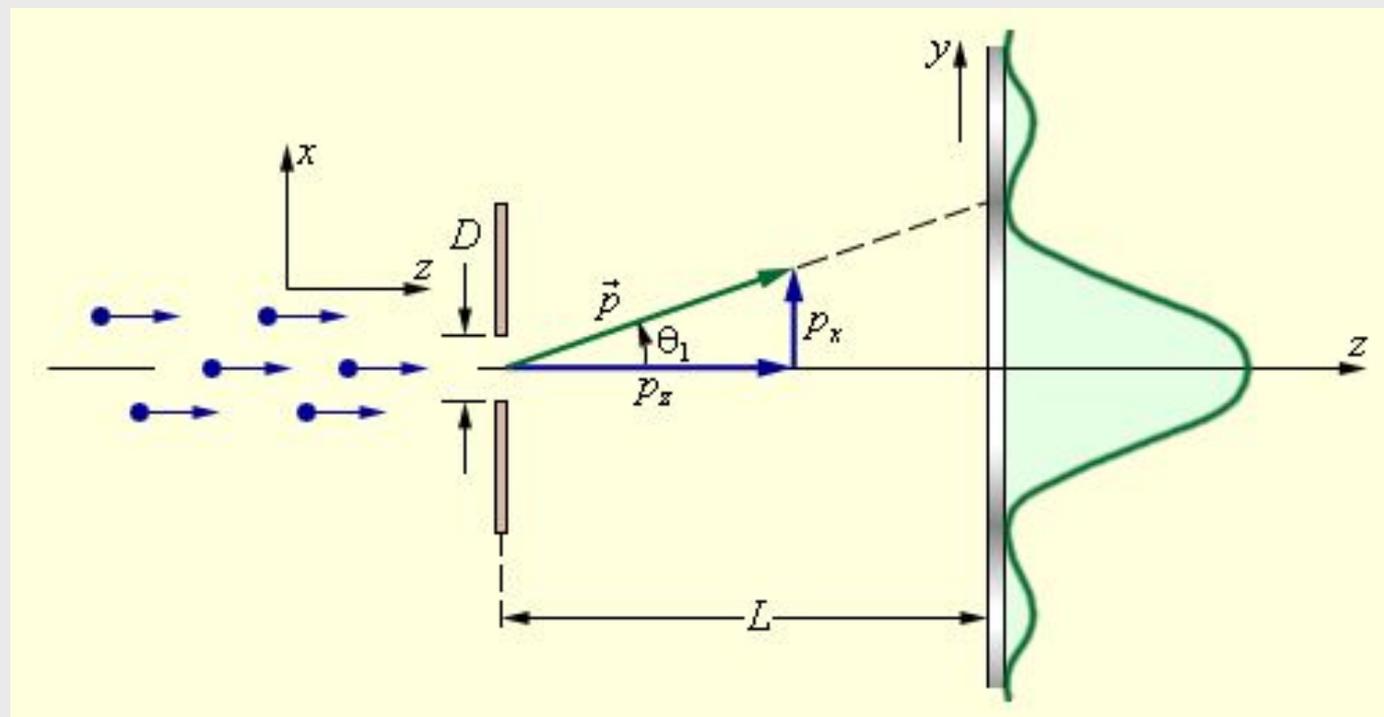
$$\Delta E \cdot \Delta t \geq \frac{\hbar}{2};$$

– это означает, что определение энергии с точностью ΔE должно занять время не менее $\Delta t \sim \frac{\hbar}{\Delta E}$.

Другие пары канонически сопряженных величин: – компоненты момента импульса и угол поворота относительно соответствующей оси: ΔL_z и $\Delta \phi$.

Квантовая механика

Соотношение неопределенностей устанавливается в следующем примере. Свободно летящая частица, на ее пути щель, шириной Δx , расположена перпендикулярно к направлению движения. До прохождения щели $p_x = 0$ и $\Delta p_x = 0$, но координата x совершенно неопределенна.



Квантовая механика

В момент прохождения через щель появляется неопределенность координаты Δx , но утрачивается определенность импульса p_x . Вследствие дифракции частица будет двигаться в пределах угла 2θ (угол первого дифракционного максимума) \Rightarrow

$$\Delta p_x = p \sin \theta = p \frac{\lambda}{\Delta x};$$

$$\Delta x \cdot \Delta p_x \approx p\lambda = 2\pi\hbar;$$

Принцип неопределенности Гейзенберга

$$\Delta x \cdot \Delta v_x \geq \frac{\hbar}{2m};$$

Движение по траектории характеризуется определенными значениями координат и скорости в каждый момент времени.
 \Rightarrow чем больше масса частицы, тем меньше неопределенность координаты и скорости. \Rightarrow тем точнее траектория. Для частиц **1 мкм** – неопределенность за пределами точности измерения.

При определенных условиях и движение микрочастиц происходит по траекториям. Например: электронно-лучевая трубка. На экране получается след – пятно $r \sim 10^{-5}$ м, $l \sim 10^{-1}$ м, \Rightarrow Движение практически по траектории.

Принцип неопределенности Гейзенберга

Пример: электронно-лучевая трубка. На экране получается

след – пятно $r \sim 10^{-5} \text{ м}$, $l \sim 10^{-1} \text{ м}$, \Rightarrow

$$\frac{\Delta p_x}{p} = \frac{r}{l} = 10^{-4}$$

$$p = \sqrt{2meU} \quad \text{при } U \sim 10^4 \text{ В} \quad p \sim 5 \cdot 10^{-18} \text{ Н}\cdot\text{с} \Rightarrow$$

$$\Delta p_x \sim 5 \cdot 10^{-22} \text{ Н}\cdot\text{с} \Rightarrow \Delta x \sim \frac{\hbar}{2\Delta p_x} \sim 10^{-8} \text{ м.}$$

Движение практически по траектории.

Размер атома и минимальная энергия:

Нулевые значения координаты и импульса электрона несовместимы с принципом неопределенности.

Производя оценку положим:

$$(r = 0 \text{ и } p = 0) \Rightarrow \Delta r \approx r \text{ и } \Delta p \approx p, \Rightarrow r \cdot p \sim \hbar,$$

\Rightarrow

$$E = \frac{p^2}{2m} - k \frac{e^2}{r} = \frac{\hbar^2}{2m} \frac{1}{r^2} - k \frac{e^2}{r};$$

Min $E \Rightarrow$ производная по r приравняем к 0; \Rightarrow

$$-\frac{\hbar^2}{2m} \frac{2}{r^3} - k \frac{e^2}{r^2} = 0; \Rightarrow r_0 = \frac{\hbar^2}{kme^2};$$

$$E_{\min} = -k^2 e^4 \frac{m}{2\hbar^2};$$

Совпадают с Боровским радиусом и энергией.

