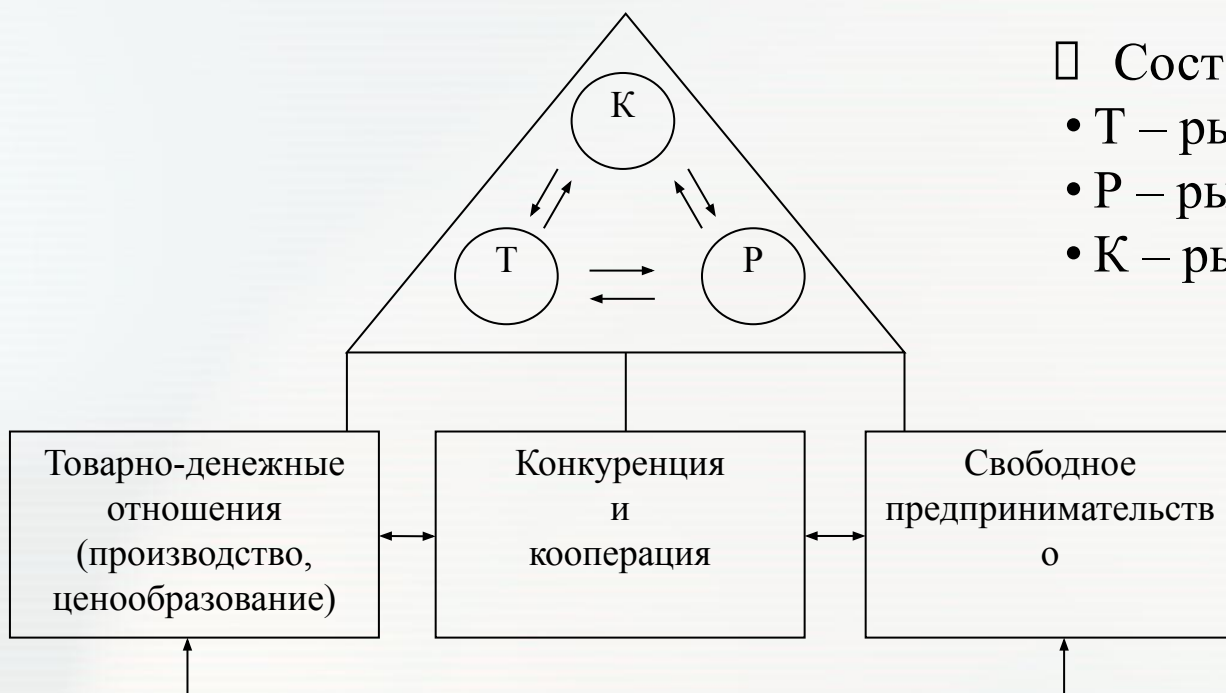


Лекция 6
Исследование устойчивости
рынка ВРП методами
А.М. Ляпунова

1. Рынок ВРП как самоорганизующаяся система

Экономику региона представим в виде однопродуктовой модели мезоэкономической системы. Основной товар, производимый и реализуемый на рынке – *валовой региональный продукт (ВРП)*.

Цель экономической системы – обеспечить спрос на ВРП и определенный уровень капитала, соответствующий ресурсам, технологиям.



- Составные части рынка:
- Т – рынок товара;
 - Р – рынок рабочей силы;
 - К – рынок капитала.

Рис.1 – Саморегулирующийся рынок

□ Рынок – система самоорганизующаяся:

- открытая;
- нелинейная;
- с кооперативным взаимодействием – обменом между собственниками товара и собственниками денег.

□ Механизм саморегулирования обусловлен наличием прямых и обратных связей между:

- спросом и предложением в ценообразовании и производстве;
- поставщиками и потребителями при обмене;
- предприятиями, фирмами при конкуренции и кооперации.

□ Функции рынка: · регулятивная; · информационная; · saniрующая.

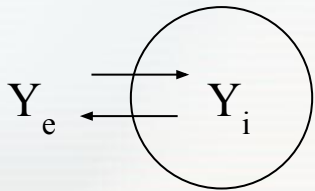
□ Рыночные отношения:

- товарно-денежные (ценообразование и производство);
- конкуренция и кооперация между предприятиями, фирмами;
- свободное предпринимательство, основанное на знании законов функционирования и развития рынка.

2. Теорема А.М. Ляпунова

А.М. Ляпунов ввел в математику функции (функции Ляпунова) и разработал методы расчета устойчивости движения систем.

Теорема: *если для рынка ВРП, описываемого уравнениями стационарного движения с перекрестной эластичностью, можно найти знакоопределенную функцию $S(Y_i, Y_e) \geq 0$, производная от которой $\frac{dS}{dt} \leq 0$, т.е. является знакопостоянной функцией противоположного знака, то движение устойчиво.*



Y_i, Y_e – количество произведенного и реализованного ВРП за время t соответственно (параметры неравновесности).

Если $S(Y_i, Y_e) \geq 0$, то условие устойчивости процесса:

$$\frac{dS}{dt} = \frac{\partial S}{\partial Y_e} \cdot \frac{dY_e}{dt} + \frac{\partial S}{\partial Y_i} \cdot \frac{dY_i}{dt} \leq 0 \quad (1)$$

Введем обозначения:

$$\frac{dS}{dt} = F \quad (2) \quad \frac{\partial S}{\partial Y_e} = -X_e \quad (3) \quad \frac{dY_e}{dt} = I_e \quad (4) \quad \frac{\partial S}{\partial Y_i} = X_i \quad (5) \quad \frac{dY_i}{dt} = I_i \quad (6)$$

где X_e – цена спроса, X_i – цена предложения, I_e – спрос, I_i – предложение, тогда условие устойчивости процесса взаимодействия спроса и предложения на рынке ВРП :

$$F = -I_e X_e + I_i X_i \leq 0 \quad (7)$$

- метод заключается в прямом исследовании устойчивости неравновесных рыночных ситуаций путем определения функций;
- методы Ляпунова – общепринятые средства анализа в точном естествознании и теоретической экономике;
- экономический смысл условия (7) в том, что при поддержании достаточно высокой покупательной способности населения ($I_e X_e$) удастся уменьшить экономическую энтропию.

3. Приращение капитала на неравновесном рынке ВРП

Характеристика рынка:

- C – стоимость (цена) капитала(долл.) – функция состояния;
- W – объем основных фондов (долл.);
- S – количество денег в обращении (руб.);
- Y_i – внутренняя переменная; количество ВРП, произведенного за время t (у.е.т.);
- Y_e – внешняя переменная; количество ВРП, реализованного за время t (у.е.т.).
- $S = S(Y_i, Y_e)$ – функция параметров неравновесности.

Для региона функция состояния:

$$C = C \{ S(Y_e, Y_i), W, t \} \quad (8)$$

Скорость приращения капитала как полная производная функции состояния системы имеет вид:

$$\frac{dC}{dt} = \frac{\partial C}{\partial S} \cdot \frac{dS}{dt} + \frac{\partial C}{\partial S} \cdot \frac{\partial S}{\partial Y_e} \cdot \frac{dY_e}{dt} + \frac{\partial C}{\partial S} \cdot \frac{\partial S}{\partial Y_i} \cdot \frac{dY_i}{dt} + \frac{\partial C}{\partial W} \cdot \frac{dW}{dt} + \frac{\partial C}{\partial t} \quad (9)$$

Обозначения и экономический смысл величин:

$$\frac{\partial C}{\partial S} = K \quad (10) \quad \text{— курс валюты;}$$

$$\frac{\partial S}{\partial Y_e} = X_e \quad (14) \quad \text{— цена спроса;}$$

$$\frac{\partial C}{\partial W} = A \quad (11) \quad \text{— величина, равная приращению капитала, приходящегося на единицу приращения объема основных фондов;}$$

$$\frac{\partial S}{\partial Y_i} = -X_i \quad (15) \quad \text{— цена предложения;}$$

$$\frac{dY_e}{dt} = I_e \quad (12) \quad \text{— спрос;}$$

$$\frac{\partial C}{\partial t} = -K\sigma \quad (16) \quad \text{— расходы, не связанные с производством.}$$

$$\frac{dY_i}{dt} = I_i \quad (13) \quad \text{— предложение;}$$

- спрос I_e и предложение I_i взаимодействуют между собой;
- экономический смысл цены спроса X_e и цены предложения X_i следует из соотношений:

$$\frac{\partial C}{\partial S} \cdot \frac{\partial S}{\partial Y_e} = \frac{\partial C}{\partial Y_e} = KX_e \Rightarrow X_e = \frac{1}{K} \cdot \frac{\partial C}{\partial Y_e} \quad (17) \quad X_e - \text{градиент капитала по внешней переменной неравновесия.}$$

X_e – *цена спроса* – это приращение капитала, приходящееся на единицу проданного ВРП с точностью до интегрирующего множителя.

$$\frac{\partial C}{\partial S} \cdot \frac{\partial S}{\partial Y_i} = \frac{\partial C}{\partial Y_i} = -KX_i \Rightarrow X_i = -\frac{1}{K} \cdot \frac{\partial C}{\partial Y_i} \quad (18) \quad X_i - \text{градиент капитала по внутренней переменной неравновесия.}$$

X_i – *цена предложения* – величина, равная убыли капитала при производстве единицы ВРП с точностью до интегрирующего множителя.

- система единиц измерения:

$$[Y] = \text{у.е.т.}, \quad [t] = \text{мес.}, \quad [K] = \text{долл./руб.}, \quad [C] = \text{долл.}$$

$$[S] = \text{руб.}, \quad [X] = \text{руб./у.е.т.}, \quad [I] = \text{у.е.т./мес.}, \quad [\sigma] = \text{руб./мес.}$$

С учетом обозначений уравнение (9) имеет вид:

$$\frac{dC}{dt} = K \frac{dS}{dt} + A \frac{dW}{dt} + KX_e I_e - KX_i I_i - K\sigma \quad (19)$$

Приращение капитала на рынке ВРП в неравновесном процессе обусловлено изменением количества денег в обращении S , изменением объема основных фондов W , а также сложившейся ситуацией на неравновесном рынке – игрой дохода $KX_e I_e$ и издержек $KX_i I_i + K\sigma$.

Уравнение (19) может служить основой для анализа устойчивости рынка.

4. Стационарное состояние. Стоимостное уравнение

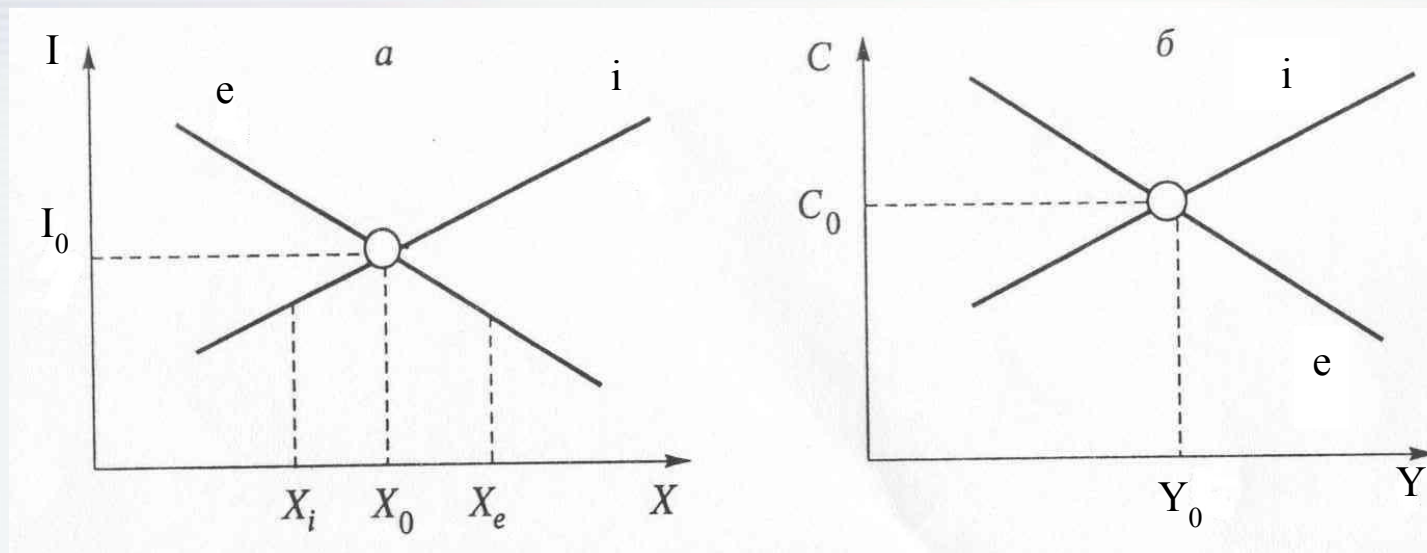


Рис.7 – Спрос и предложение на ВРП в зависимости от цен X (а) и стоимости капитала C (б).

Состояние рынка ВРП *стационарное*, если $X_e = X_i = X_0$; $I_e = I_i = I_0$.

Капитал стационарного (гипотетического) состояния принимает минимальное значение $C(t) = C_0(t) = C_0$.

При стационарном состоянии рынка выполняется условие:

$$KX_e I_e - KX_i I_i - K\sigma = 0 \quad (20)$$

тогда из уравнения

$$\frac{dC}{dt} = K \frac{dS}{dt} + A \frac{dW}{dt} + KX_e I_e - KX_i I_i - K\sigma \quad (19)$$

следует уравнение:

$$\frac{dC_0}{dt} = K \frac{dS}{dt} + A \frac{dW}{dt} \Big|_{St} \quad (21), \quad \text{где } St \text{ означает стационарность.}$$

В стационарном St состоянии:

- прирост капитала минимален и его можно принять качестве исходного положения;
- равновесие никогда не наступает, т.к. функции доходов ($X_e I_e$) и издержек ($X_i I_i + \sigma$) меняются во времени.

Приращение капитала на неравновесном рынке ВРП характеризует *стоимостное уравнение*, полученное из (19) и (21):

$$\frac{d(C - C_0)}{dt} = -K(-X_e I_e + X_i I_i + \sigma) \quad (22)$$

Изменение капитала:

$$\Lambda = C - C_0 > 0$$

по отношению к стационарному значению всегда положительно в силу принятого условия минимальности капитала в стационарном состоянии. Тогда стоимостное уравнение (скорость изменения капитала) имеет вид:

$$\frac{d\Lambda}{dt} = -K(-X_e I_e + X_i I_i + \sigma) \quad (23),$$

где $\frac{d\Lambda}{dt}$ – прирост капитала в единицу времени (*прибыль*).

Уравнения (19)-(23) используются в анализе эволюции рынка.

5. Прибыль и устойчивость рынка ВРП

Теорема. Если для рынка ВРП, описываемого уравнениями с перекрестной эластичностью

$$\begin{aligned} I_i &= L_{ii}X_i + L_{ie}X_e \\ I_e &= L_{ee}X_e + L_{ei}X_i \end{aligned} \quad (24)$$

можно найти знакоопределенную функцию

$$\Lambda = C - C_0 \geq 0 \quad (25)$$

производная от которой

$$\frac{d\Lambda}{dt} = -K(-X_e I_e + X_i I_i + \sigma), \quad (26)$$

является знакопостоянной функцией противоположного знака с или тождественно равна нулю, то прирост капитала (получение прибыли)

$$\frac{d\Lambda}{dt} > 0$$

будет неустойчивым по Ляпунову процессом.

Доказательство.

В соответствии с теоремой Ляпунова для устойчивых процессов:

если $\Lambda = C(t) - C_0 \geq 0$, а стационарное состояние $(-I_e X_e + I_i X_i + \sigma) = 0$ устойчиво (рис.3).

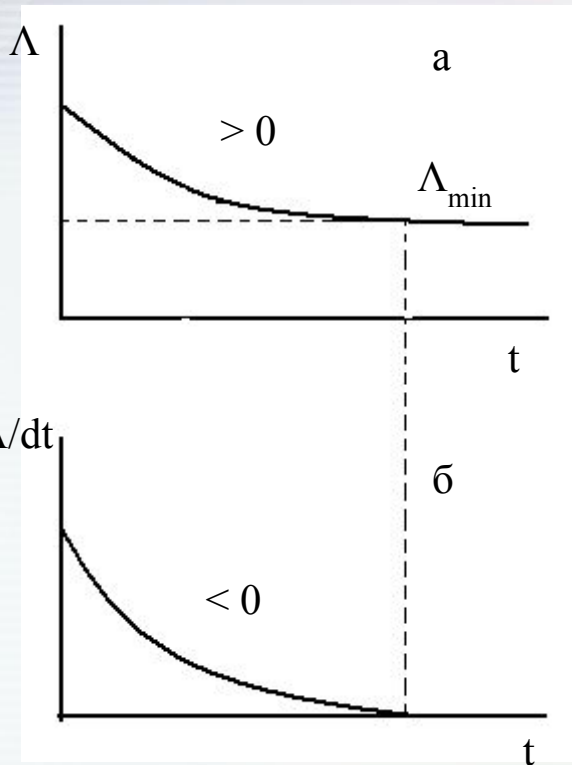


Рис. 3 – Изменение капитала (а) и прибыли (б) со временем в устойчивом процессе.

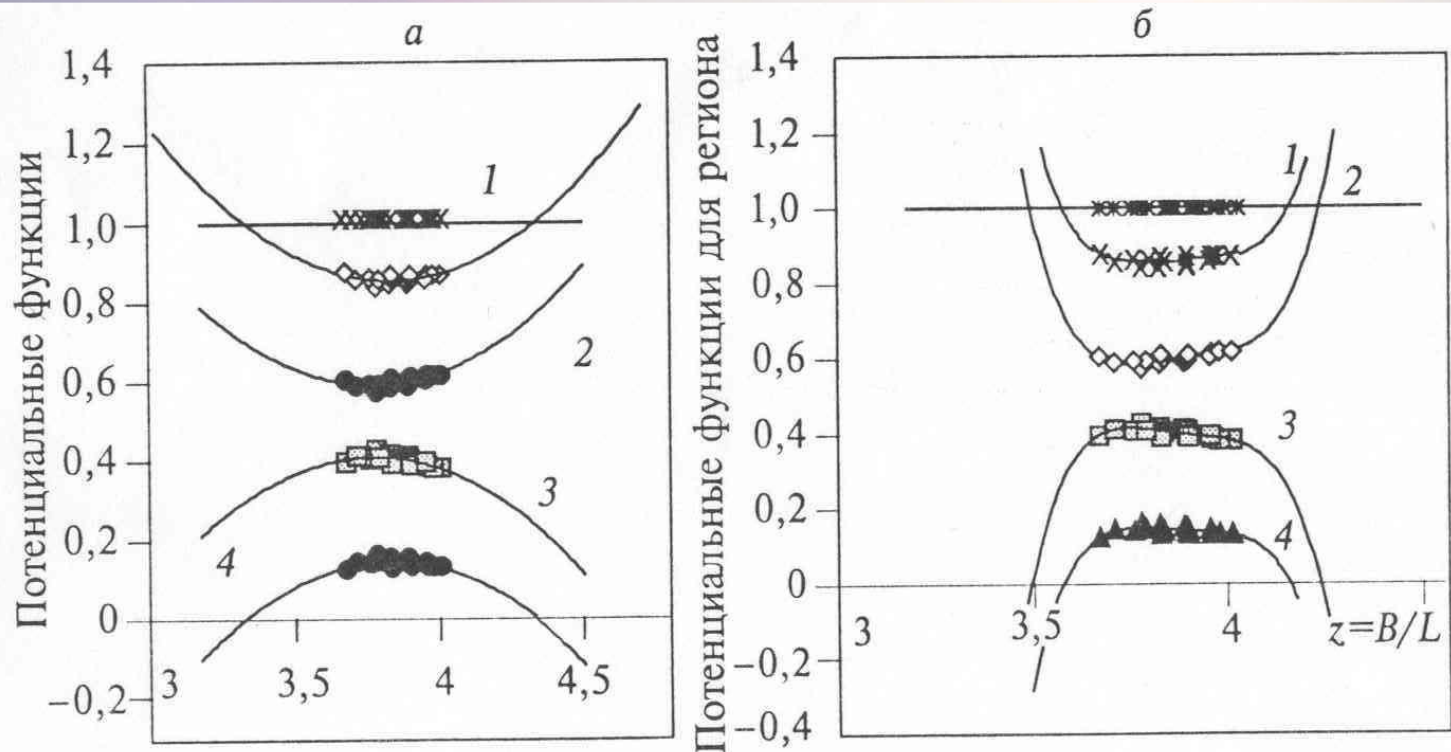
Тогда для устойчивых по Ляпунову экономических систем скорость прироста капитала и функция издержек:

$$\frac{d\Lambda}{dt} \leq 0; \quad \frac{dS}{dt} = -X_e I_e + X_i I_i + \sigma \geq 0, \quad (27), \quad \text{т.к.}$$

$$\frac{d\Lambda}{dt} = -K(-X_e I_e + X_i I_i + \sigma) = -K \frac{dS}{dt} \quad (28)$$

Как при наличии спроса $I_e X_e \neq 0$, так и его отсутствии $I_e X_e = 0$ издержки положительны $I_i X_i + \sigma \geq 0$ (29). \Rightarrow

Тогда прирост капитала (получение прибыли) $\frac{d\Lambda}{dt} > 0$; $I_e X_e > I_i X_i + \sigma$ является неустойчивым процессом.



Потенциальные функции для промышленности Уральского региона в 1970–1986 гг. в приведенном виде (а); нелинейные приведенные функции (б), обработанные полиномом четвертой степени (катастрофа сборки). Видно возникновение новой точки равновесия, которая сформировалась в последующие годы.

1 — полные издержки (R/B , $R = J_i X_i + \sigma$); 2 — материальные затраты (M/B); 3 — чистый доход (H/B , $H = \Pi + L$); 4 — прибыль (Π/B); $B = J_e X_e$ — выручка; L — фонд оплаты труда; $\Pi = d\Lambda / dt$ — прибыль (положительные ее значения соответствуют неустойчивому по Ляпунову процессу, отрицательные — устойчивому); $z = B / L$ — выручка, отнесенная к фонду оплаты труда. Точками представлены ежегодные статистические данные, аппроксимирующая их функция — полином второй степени.

6. Устойчивость линейных экономических систем в стационарном неравновесном состоянии

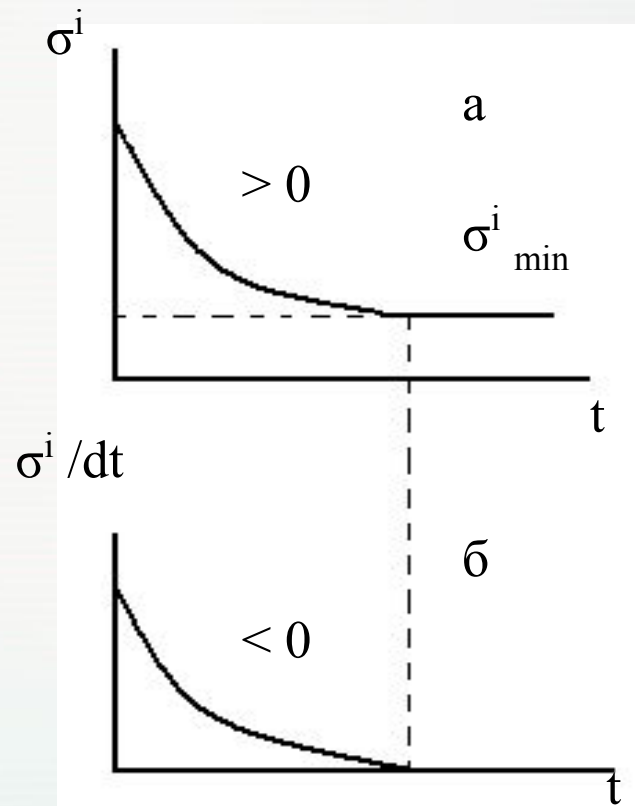
Теорема И.Р. Пригожина. Временная эволюция в мезоэкономической системе при заданных постоянных граничных условиях (постоянной величине спроса) происходит так, что полные издержки в системе стремятся убывать и достигают минимального (положительного) значения в стационарном состоянии, т.е.

$$\frac{d\sigma^i}{dt} \leq 0,$$

здесь

$$\sigma^i \equiv \frac{d_i S}{dt} = I_i X_i + \sigma \quad (30)$$

Рис. 5 – Изменение издержек со временем



Доказательство. Для доказательства методом Ляпунова используем стоимостное уравнение

$$\frac{d\Lambda}{dt} = -K(-X_e I_e + X_i I_i + \sigma) = -K(-\sigma^e + \sigma^i) \quad (31)$$

Здесь $\Lambda = C(t) - C_0 > 0$ функция капитала;

σ^e - функция спроса, $\sigma^e > 0$, $\sigma^e < 0$;

σ^i - функция предложения, $\sigma^i > 0$.

Дифференцируя (31) получаем:

$$-\frac{1}{K} \cdot \frac{d^2 \Lambda}{dt^2} = -\frac{d\sigma^e}{dt} + \frac{d\sigma^i}{dt} \quad (32)$$

где $\frac{d\sigma^e}{dt} = 0$, т.к. $\sigma^e = \text{Const}$.

$$\frac{d\sigma^i}{dt} = -\frac{1}{K} \cdot \frac{d^2 \Lambda}{dt^2} \quad (33)$$

Анализ по Ляпунову:

$\Lambda(t) \geq 0$ – функция Ляпунова;

$\frac{d\Lambda}{dt} \leq 0$ – условие устойчивости процесса по Ляпунову;

$\frac{d^2\Lambda}{dt^2} \geq 0$ – стремление к равновесию (вогнутая кривая на рис. 3).

Тогда из (33) получили (30) условие теоремы.

• *Теорема И.Р. Пригожина:*

□ выполняется и для $\sigma^e \neq \text{Const}$, при малых скоростях изменения спроса

$$\frac{d\sigma^e}{dt} < 0 \quad \text{и} \quad \frac{d\sigma^e}{dt} > 0;$$

□ соответствует экономическому принципу минимизации издержек;

□ не выполняется для нелинейного рынка, имеющего несколько стационарных состояний.

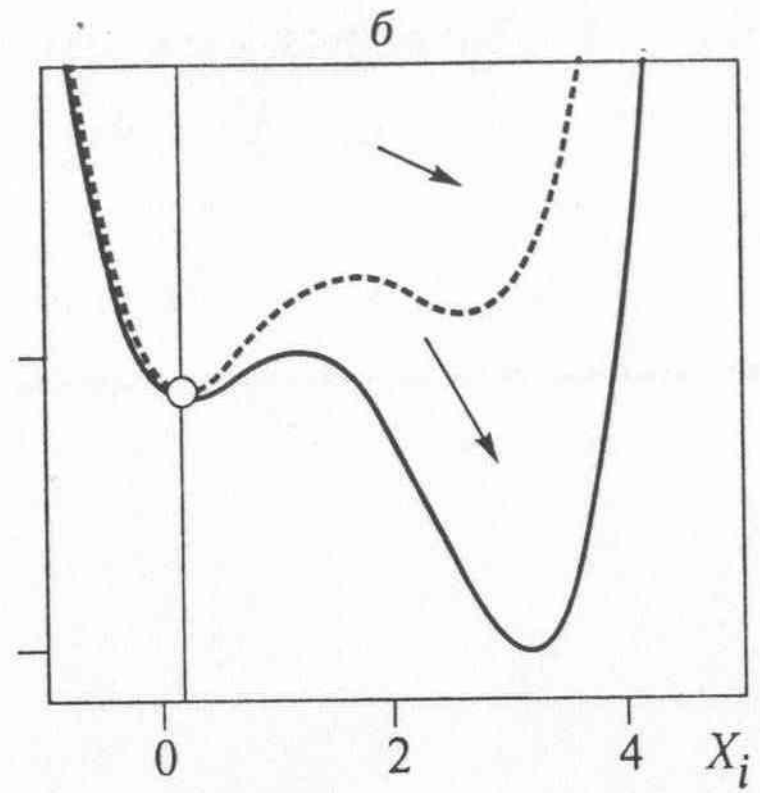
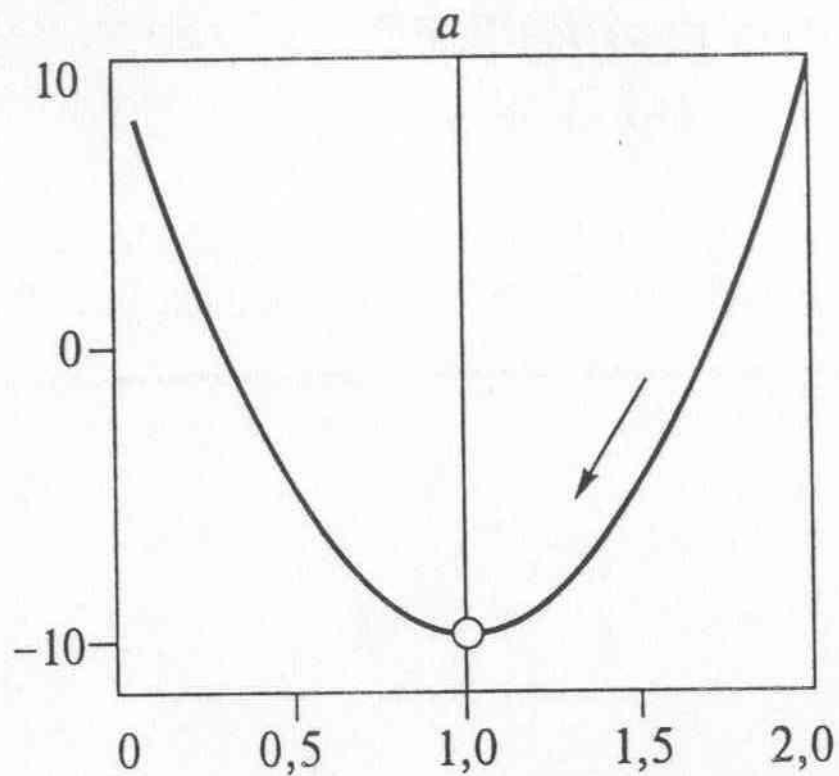


Рис. 6 Выполнимость теоремы Пригожина для линейных систем (а) и ее нарушение для нелинейных систем (б). Для нелинейной системы новые состояния равновесия могут наблюдаться как с большими, так и с меньшими значениями издержек.

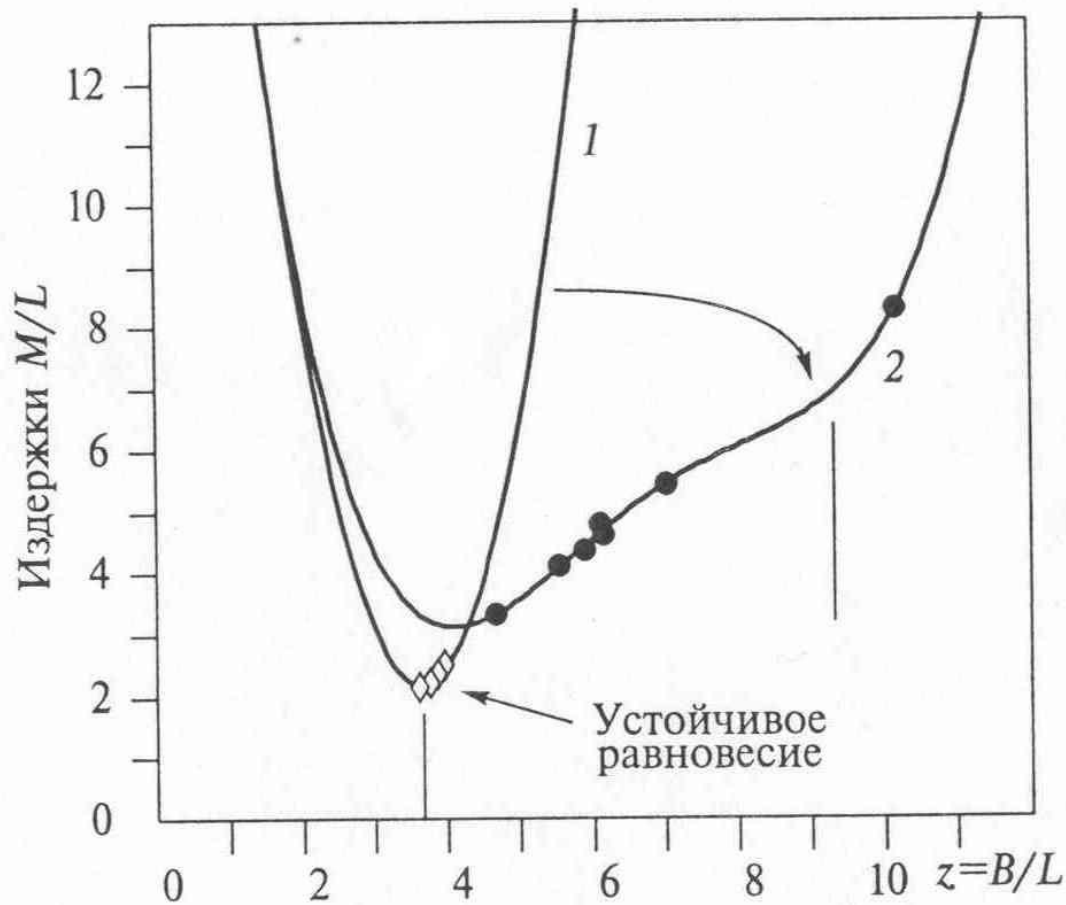


Рис. 7

Функция материальных издержек (M/L) для промышленного потенциала Уральского региона в 1970–1986 гг. (1) и всей промышленности Свердловской области в I квартале 1996 – III квартале 1997 гг. (2). Наблюдается процесс деформации потенциальной функции и формирования новой точки равновесия при малом ФОТ, т.е. большей величине, $z = B / L = J_e X_e / L$, B – выручка, L – фонд оплаты труда.

7. Общие условия устойчивости цен в стационарном состоянии

В стационарном состоянии спрос, предложение и цены связаны уравнениями:

$$I_i - L_{ii}X_i - L_{ie}X_e = 0 \quad (34)$$

$$I_e - L_{ee}X_e - L_{ei}X_i = 0 \quad (35)$$

Решение уравнений (34) и (35) позволяет определить совместную точку (X_e^*, X_i^*) :

$$X_i^* = \frac{L_{ee}I_i - L_{ie}I_e}{L_{ii}L_{ee} - L_{ei}L_{ie}} \quad (36)$$

$$X_e^* = \frac{L_{ii}I_e - L_{ei}I_i}{L_{ee}L_{ii} - L_{ie}L_{ei}} \quad (37)$$

Если числители положительны:

$$L_{ee}I_i - L_{ie}I_e > 0 \quad (38)$$

$$L_{ii}I_e - L_{ei}I_i > 0 \quad (39)$$

то точка (X_e^*, X_i^*) устойчива, т.е. все находящиеся в ее окрестности точки стремятся к ней.

В стационарном состоянии ($I_e = I_i$; $X_e = X_i$) условие устойчивости определяется:

$$L_{ee} - L_{ie} > 0$$

$$L_{ii} - L_{ei} > 0$$

$$L_{ee} - L_{ie} = L_{ii} - L_{ei} \quad (40)$$

Устойчивая цена соответствует положительной левой и правой частям уравнения (40).

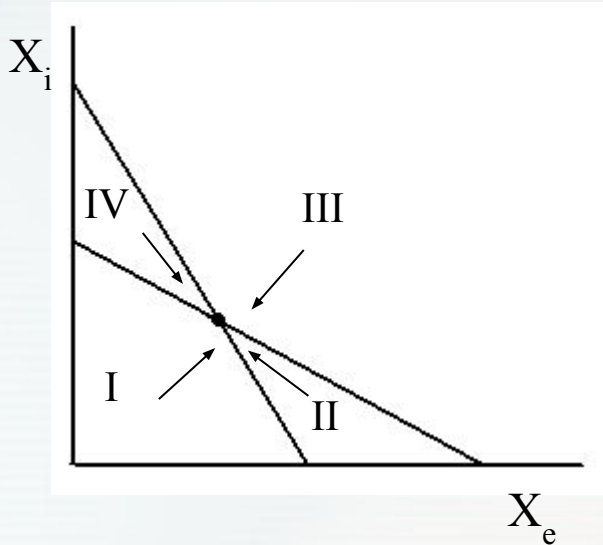


Рис. 8 – Условие устойчивости для внешних X_e и внутренних X_i рыночных сил.

На плоскости четыре области:

- I – $X_i \uparrow, X_e \uparrow,$
- II – $X_i \uparrow, X_e \downarrow,$
- III – $X_i \downarrow, X_e \downarrow,$
- IV – $X_i \downarrow, X_e \uparrow.$

- В лекции рассмотрена устойчивость линейных процессов на рынке ВРП, когда минимальные издержки соответствуют максимально возможной прибыли.
- Однако реально развитие осуществляется тогда, когда издержки (на новые технологии, технологические решения) растут.

В лекции рассмотрена устойчивость линейных процессов на рынке ВРП, когда минимальные издержки соответствуют максимально возможной прибыли. Однако реальное развитие осуществляется тогда, когда издержки (на новые технологии) растут.

Благодарю за внимание!

