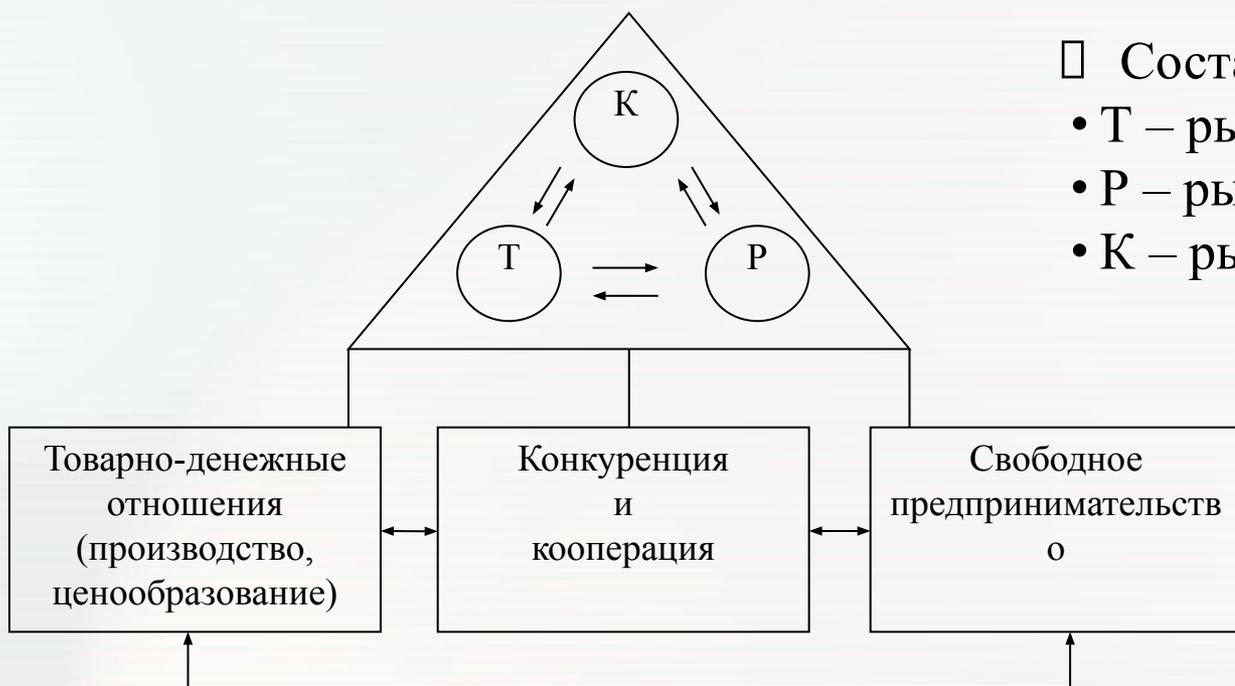


**Лекция 6**  
**Исследование устойчивости**  
**рынка ВРП методами**  
**А.М. Ляпунова**

# 1. Рынок ВРП как самоорганизующаяся система

Экономику региона представим в виде однопродуктовой модели мезоэкономической системы. Основным товар, производимый и реализуемый на рынке – *валовой региональный продукт (ВРП)*.

*Цель экономической системы* – обеспечить спрос на ВРП и определенный уровень капитала, соответствующий ресурсам, технологиям.



- Составные части рынка:
- Т – рынок товара;
  - Р – рынок рабочей силы;
  - К – рынок капитала.

Рис.1 – Саморегулирующийся рынок

## □ Рынок – система самоорганизующаяся:

- открытая;
- нелинейная;
- с кооперативным взаимодействием – обменом между собственниками товара и собственниками денег.

## □ Механизм саморегулирования обусловлен наличием прямых и обратных связей между:

- спросом и предложением в ценообразовании и производстве;
- поставщиками и потребителями при обмене;
- предприятиями, фирмами при конкуренции и кооперации.

## □ Функции рынка: · регулятивная; · информационная; · saniрующая.

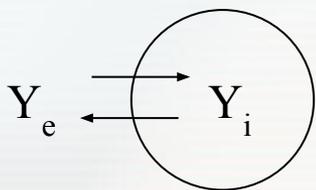
## □ Рыночные отношения:

- товарно-денежные (ценообразование и производство);
- конкуренция и кооперация между предприятиями, фирмами;
- свободное предпринимательство, основанное на знании законов функционирования и развития рынка.

## 2. Теорема А.М. Ляпунова

А.М. Ляпунов ввел в математику функции (функции Ляпунова) и разработал методы расчета устойчивости движения систем.

**Теорема:** *если для рынка ВРП, описываемого уравнениями стационарного движения с перекрестной эластичностью, можно найти знакоопределенную функцию  $S(Y_i, Y_e) \geq 0$ , производная от которой  $\frac{dS}{dt} \leq 0$ , т.е. является знакопостоянной функцией противоположного знака, то движение устойчиво.*



$Y_i, Y_e$  – количество произведенного и реализованного ВРП за время  $t$  соответственно (параметры неравновесности).

Если  $S(Y_i, Y_e) \geq 0$ , то условие устойчивости процесса:

$$\frac{dS}{dt} = \frac{\partial S}{\partial Y_e} \cdot \frac{dY_e}{dt} + \frac{\partial S}{\partial Y_i} \cdot \frac{dY_i}{dt} \leq 0 \quad (1)$$

Введем обозначения:

$$\frac{dS}{dt} = F \quad (2) \quad \frac{\partial S}{\partial Y_e} = -X_e \quad (3) \quad \frac{dY_e}{dt} = I_e \quad (4) \quad \frac{\partial S}{\partial Y_i} = X_i \quad (5) \quad \frac{dY_i}{dt} = I_i \quad (6)$$

где  $X_e$  – цена спроса,  $X_i$  – цена предложения,  $I_e$  – спрос,  $I_i$  – предложение, тогда условие устойчивости процесса взаимодействия спроса и предложения на рынке ВРП :

$$F = -I_e X_e + I_i X_i \leq 0 \quad (7)$$

- метод заключается в прямом исследовании устойчивости неравновесных рыночных ситуаций путем определения функций;
- методы Ляпунова – общепринятые средства анализа в точном естествознании и теоретической экономике;
- экономический смысл условия (7) в том, что при поддержании достаточно высокой покупательной способности населения ( $I_e X_e$ ) удастся уменьшить экономическую энтропию.

# 3. Приращение капитала на неравновесном рынке ВРП

## Характеристика рынка:

- $C$  – стоимость (цена) капитала(долл.) – функция состояния;
- $W$  – объем основных фондов (долл.);
- $S$  – количество денег в обращении (руб.);
- $Y_i$  – внутренняя переменная; количество ВРП, произведенного за время  $t$  (у.е.т.);
- $Y_e$  – внешняя переменная; количество ВРП, реализованного за время  $t$  (у.е.т.).
- $S = S(Y_i, Y_e)$  – функция параметров неравновесности.

Для региона функция состояния:

$$C = C \{ S(Y_e, Y_i), W, t \} \quad (8)$$

*Скорость приращения капитала* как полная производная функции состояния системы имеет вид:

$$\frac{dC}{dt} = \frac{\partial C}{\partial S} \cdot \frac{dS}{dt} + \frac{\partial C}{\partial S} \cdot \frac{\partial S}{\partial Y_e} \cdot \frac{dY_e}{dt} + \frac{\partial C}{\partial S} \cdot \frac{\partial S}{\partial Y_i} \cdot \frac{dY_i}{dt} + \frac{\partial C}{\partial W} \cdot \frac{dW}{dt} + \frac{\partial C}{\partial t} \quad (9)$$

Обозначения и экономический смысл величин:

$$\frac{\partial C}{\partial S} = K \quad (10) \quad - \text{ курс валюты;}$$

$$\frac{\partial S}{\partial Y_e} = X_e \quad (14) \quad - \text{ цена спроса;}$$

$$\frac{\partial C}{\partial W} = A \quad (11) \quad - \text{ величина, равная приращению капитала, приходящегося на единицу приращения объема основных фондов;}$$

$$\frac{\partial S}{\partial Y_i} = -X_i \quad (15) \quad - \text{ цена предложения;}$$

$$\frac{dY_e}{dt} = I_e \quad (12) \quad - \text{ спрос;}$$

$$\frac{\partial C}{\partial t} = -K\sigma \quad (16) \quad - \text{ расходы, не связанные с производством.}$$

$$\frac{dY_i}{dt} = I_i \quad (13) \quad - \text{ предложение;}$$

- спрос  $I_e$  и предложение  $I_i$  взаимодействуют между собой;
- экономический смысл цены спроса  $X_e$  и цены предложения  $X_i$  следует из соотношений:

$$\frac{\partial C}{\partial S} \cdot \frac{\partial S}{\partial Y_e} = \frac{\partial C}{\partial Y_e} = KX_e \Rightarrow X_e = \frac{1}{K} \cdot \frac{\partial C}{\partial Y_e} \quad (17) \quad X_e - \text{градиент капитала по внешней переменной неравновесия.}$$

$X_e$  – *цена спроса* – это приращение капитала, приходящееся на единицу проданного ВРП с точностью до интегрирующего множителя.

$$\frac{\partial C}{\partial S} \cdot \frac{\partial S}{\partial Y_i} = \frac{\partial C}{\partial Y_i} = -KX_i \Rightarrow X_i = -\frac{1}{K} \cdot \frac{\partial C}{\partial Y_i} \quad (18) \quad X_i - \text{градиент капитала по внутренней переменной неравновесия.}$$

$X_i$  – *цена предложения* – величина, равная убыли капитала при производстве единицы ВРП с точностью до интегрирующего множителя.

- система единиц измерения:

$$[Y] = \text{у.е.т.}, \quad [t] = \text{мес.}, \quad [K] = \text{долл./руб.}, \quad [C] = \text{долл.}$$

$$[S] = \text{руб.}, \quad [X] = \text{руб./у.е.т.}, \quad [I] = \text{у.е.т./мес.}, \quad [\sigma] = \text{руб./мес.}$$

С учетом обозначений уравнение (9) имеет вид:

$$\frac{dC}{dt} = K \frac{dS}{dt} + A \frac{dW}{dt} + KX_e I_e - KX_i I_i - K\sigma \quad (19)$$

*Приращение капитала* на рынке ВРП в неравновесном процессе обусловлено изменением количества денег в обращении  $S$ , изменением объема основных фондов  $W$ , а также сложившейся ситуацией на неравновесном рынке – игрой дохода  $KX_e I_e$  и издержек  $KX_i I_i + K\sigma$ .

Уравнение (19) может служить основой для анализа устойчивости рынка.

# 4. Стационарное состояние. Стоимостное уравнение

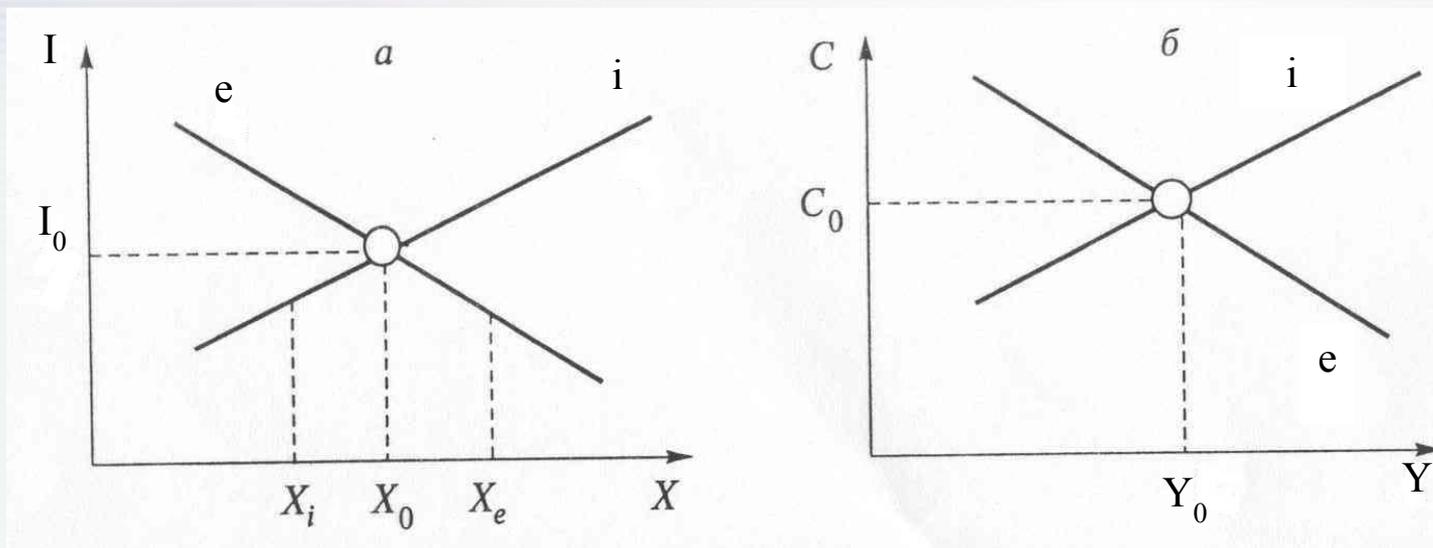


Рис.7 – Спрос и предложение на ВРП в зависимости от цен  $X$  (а) и стоимости капитала  $C$  (б).

Состояние рынка ВРП *стационарное*, если  $X_e = X_i = X_0$ ;  $I_e = I_i = I_0$ .

Капитал стационарного (гипотетического) состояния принимает минимальное значение  $C(t) = C_0(t) = C_0$ .

При стационарном состоянии рынка выполняется условие:

$$KX_e I_e - KX_i I_i - K\sigma = 0 \quad (20)$$

тогда из уравнения

$$\frac{dC}{dt} = K \frac{dS}{dt} + A \frac{dW}{dt} + KX_e I_e - KX_i I_i - K\sigma \quad (19)$$

следует уравнение:

$$\frac{dC_0}{dt} = K \frac{dS}{dt} + A \frac{dW}{dt} \Big|_{St} \quad (21), \quad \text{где } St \text{ означает стационарность.}$$

В стационарном  $St$  состоянии:

- прирост капитала минимален и его можно принять качестве исходного положения;
- равновесие никогда не наступает, т.к. функции доходов ( $X_e I_e$ ) и издержек ( $X_i I_i + \sigma$ ) меняются во времени.

Приращение капитала на неравновесном рынке ВРП характеризует *стоимостное уравнение*, полученное из (19) и (21):

$$\frac{d(C - C_0)}{dt} = -K(-X_e I_e + X_i I_i + \sigma) \quad (22)$$

Изменение капитала:

$$\Lambda = C - C_0 > 0$$

по отношению к стационарному значению всегда положительно в силу принятого условия минимальности капитала в стационарном состоянии. Тогда стоимостное уравнение (скорость изменения капитала) имеет вид:

$$\frac{d\Lambda}{dt} = -K(-X_e I_e + X_i I_i + \sigma) \quad (23),$$

где  $\frac{d\Lambda}{dt}$  – прирост капитала в единицу времени (*прибыль*).

Уравнения (19)-(23) используются в анализе эволюции рынка.

# 5. Прибыль и устойчивость рынка ВРП

**Теорема.** Если для рынка ВРП, описываемого уравнениями с перекрестной эластичностью

$$\begin{aligned} I_i &= L_{ii}X_i + L_{ie}X_e \\ I_e &= L_{ee}X_e + L_{ei}X_i \end{aligned} \quad (24)$$

можно найти знакоопределенную функцию

$$\Lambda = C - C_0 \geq 0 \quad (25)$$

производная от которой

$$\frac{d\Lambda}{dt} = -K(-X_e I_e + X_i I_i + \sigma), \quad (26)$$

является знакопостоянной функцией противоположного знака с или тождественно равна нулю, то прирост капитала (получение прибыли)

$$\frac{d\Lambda}{dt} > 0$$

будет неустойчивым по Ляпунову процессом.

Доказательство.

В соответствии с теоремой Ляпунова для устойчивых процессов:

если  $\Lambda = C(t) - C_0 \geq 0$ , а стационарное состояние  $(-I_e X_e + I_i X_i + \sigma) = 0$  устойчиво (рис.3).

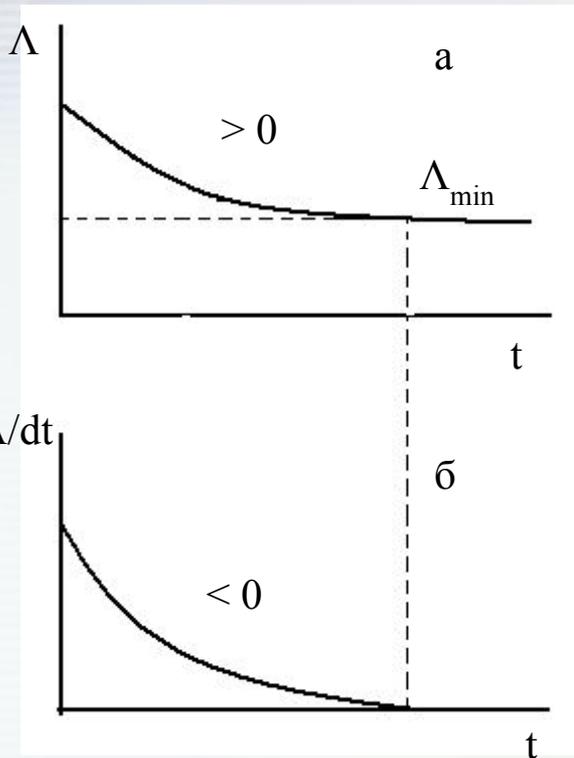


Рис. 3 – Изменение капитала (а) и прибыли (б) со временем в устойчивом процессе.

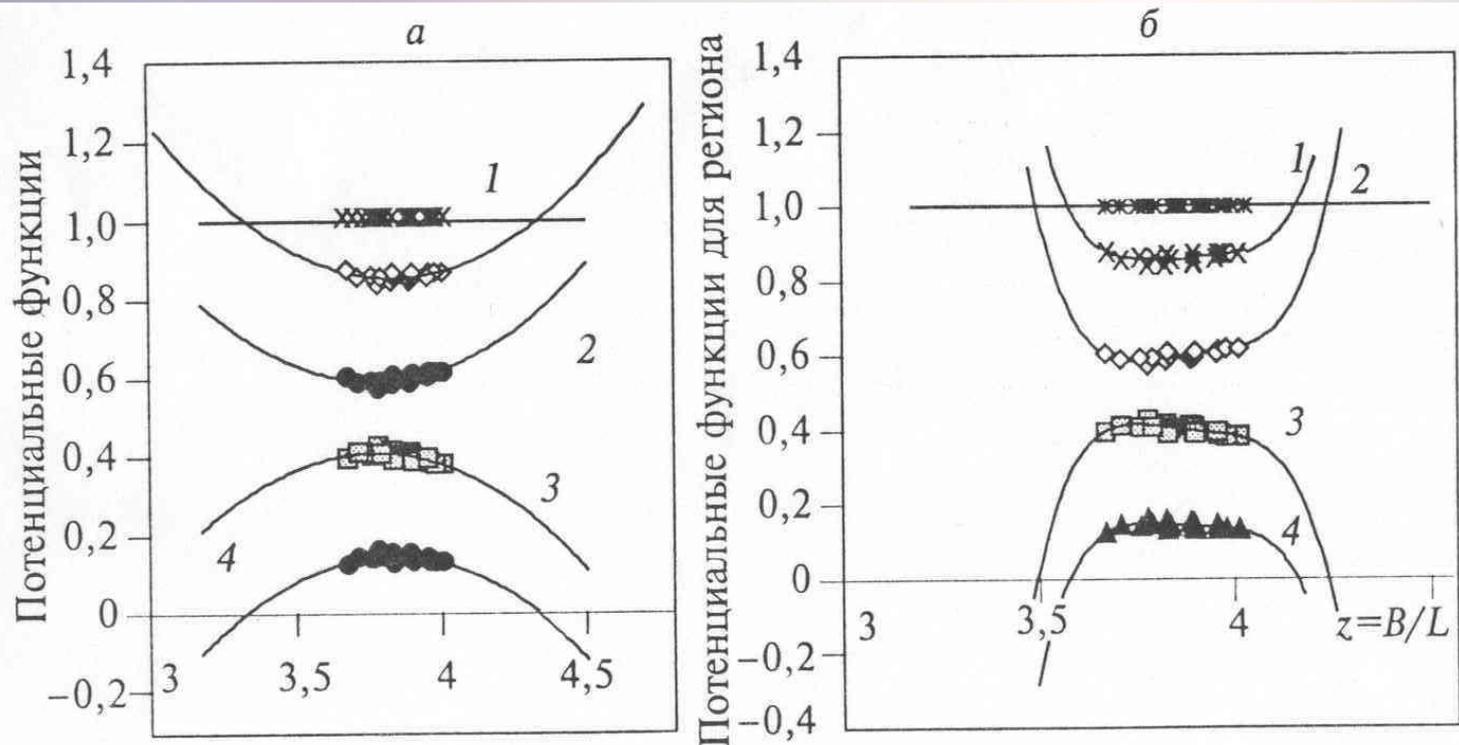
Тогда для устойчивых по Ляпунову экономических систем скорость прироста капитала и функция издержек:

$$\frac{d\Lambda}{dt} \leq 0; \quad \frac{dS}{dt} = -X_e I_e + X_i I_i + \sigma \geq 0, \quad (27), \quad \text{т.к.}$$

$$\frac{d\Lambda}{dt} = -K(-X_e I_e + X_i I_i + \sigma) = -K \frac{dS}{dt} \quad (28)$$

Как при наличии спроса  $I_e X_e \neq 0$ , так и его отсутствии  $I_e X_e = 0$  издержки положительны  $I_i X_i + \sigma \geq 0$  (29).  $\Rightarrow$

Тогда прирост капитала (получение прибыли)  $\frac{d\Lambda}{dt} > 0$ ;  $I_e X_e > I_i X_i + \sigma$  является неустойчивым процессом.



Потенциальные функции для промышленности Уральского региона в 1970–1986 гг. в приведенном виде (а); нелинейные приведенные функции (б), обработанные полиномом четвертой степени (катастрофа сборки). Видно возникновение новой точки равновесия, которая сформировалась в последующие годы.

1 — полные издержки ( $R/B$ ,  $R = J_i X_i + \sigma$ ); 2 — материальные затраты ( $M/B$ ); 3 — чистый доход ( $H/B$ ,  $H = \Pi + L$ ); 4 — прибыль ( $\Pi/B$ );  $B = J_e X_e$  — выручка;  $L$  — фонд оплаты труда;  $\Pi = d\Lambda / dt$  — прибыль (положительные ее значения соответствуют неустойчивому по Ляпунову процессу, отрицательные — устойчивому);  $z = B / L$  — выручка, отнесенная к фонду оплаты труда. Точками представлены ежегодные статистические данные, аппроксимирующая их функция — полином второй степени.

## 6. Устойчивость линейных экономических систем в стационарном неравновесном состоянии

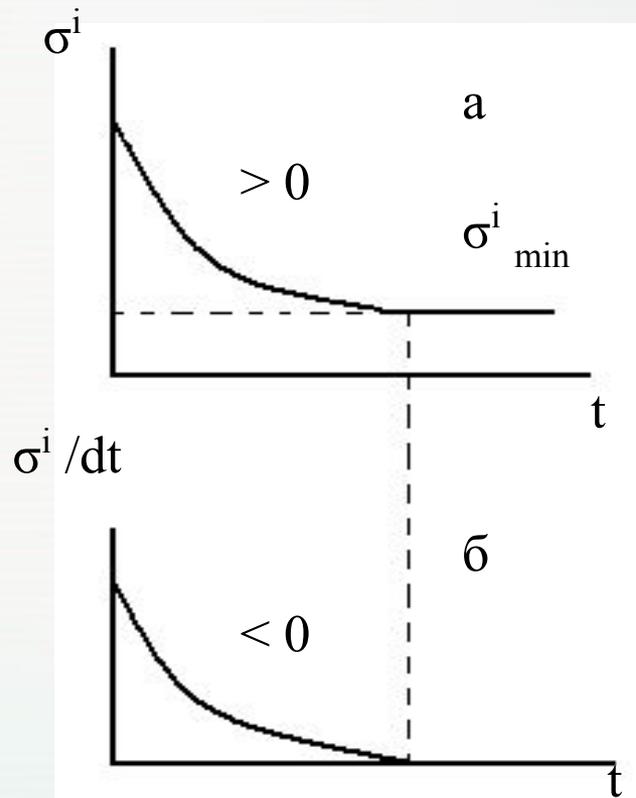
**Теорема И.Р. Пригожина.** Временная эволюция в мезоэкономической системе при заданных постоянных граничных условиях (постоянной величине спроса) происходит так, что полные издержки в системе стремятся убывать и достигают минимального (положительного) значения в стационарном состоянии, т.е.

$$\frac{d\sigma^i}{dt} \leq 0,$$

здесь

$$\sigma^i \equiv \frac{d_i S}{dt} = I_i X_i + \sigma \quad (30)$$

Рис. 5 – Изменение издержек со временем



*Доказательство.* Для доказательства методом Ляпунова используем стоимостное уравнение

$$\frac{d\Lambda}{dt} = -K(-X_e I_e + X_i I_i + \sigma) = -K(-\sigma^e + \sigma^i) \quad (31)$$

Здесь  $\Lambda = C(t) - C_0 > 0$  функция капитала;

$\sigma^e$  - функция спроса,  $\sigma^e > 0$ ,  $\sigma^e < 0$  ;

$\sigma^i$  - функция предложения,  $\sigma^i > 0$  .

Дифференцируя (31) получаем:

$$-\frac{1}{K} \cdot \frac{d^2 \Lambda}{dt^2} = -\frac{d\sigma^e}{dt} + \frac{d\sigma^i}{dt} \quad (32)$$

где  $\frac{d\sigma^e}{dt} = 0$ , т.к.  $\sigma^e = \text{Const}$ .

$$\frac{d\sigma^i}{dt} = -\frac{1}{K} \cdot \frac{d^2 \Lambda}{dt^2} \quad (33)$$

Анализ по Ляпунову:

$\Lambda(t) \geq 0$  – функция Ляпунова;

$\frac{d\Lambda}{dt} \leq 0$  – условие устойчивости процесса по Ляпунову;

$\frac{d^2\Lambda}{dt^2} \geq 0$  – стремление к равновесию (вогнутая кривая на рис. 3).

Тогда из (33) получили (30) условие теоремы.

• *Теорема И.Р. Пригожина:*

□ выполняется и для  $\sigma^e \neq \text{Const}$ , при малых скоростях изменения спроса

$$\frac{d\sigma^e}{dt} < 0 \quad \text{и} \quad \frac{d\sigma^e}{dt} > 0;$$

□ соответствует экономическому принципу минимизации издержек;

□ не выполняется для нелинейного рынка, имеющего несколько стационарных состояний.

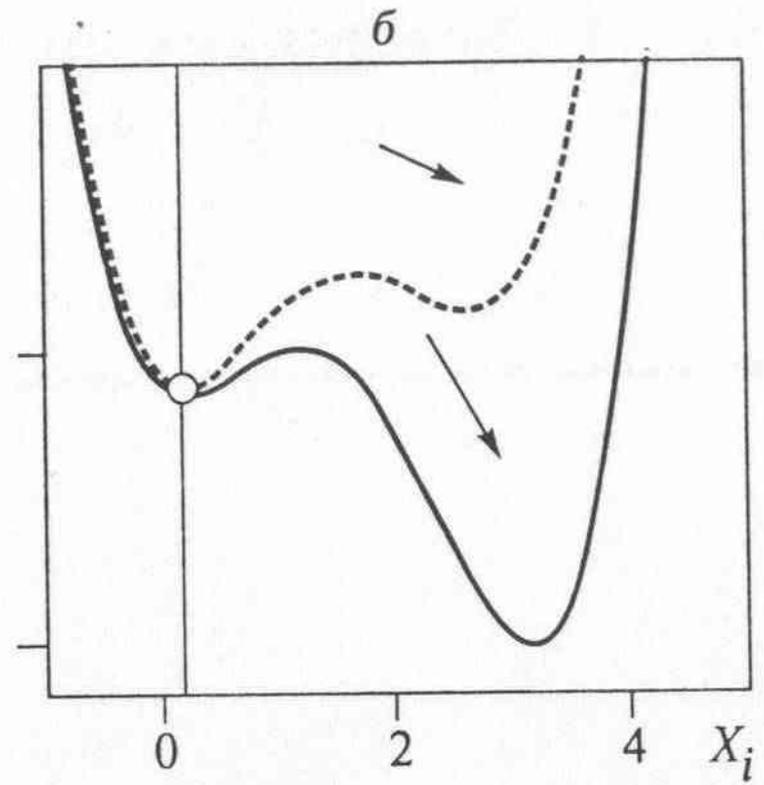
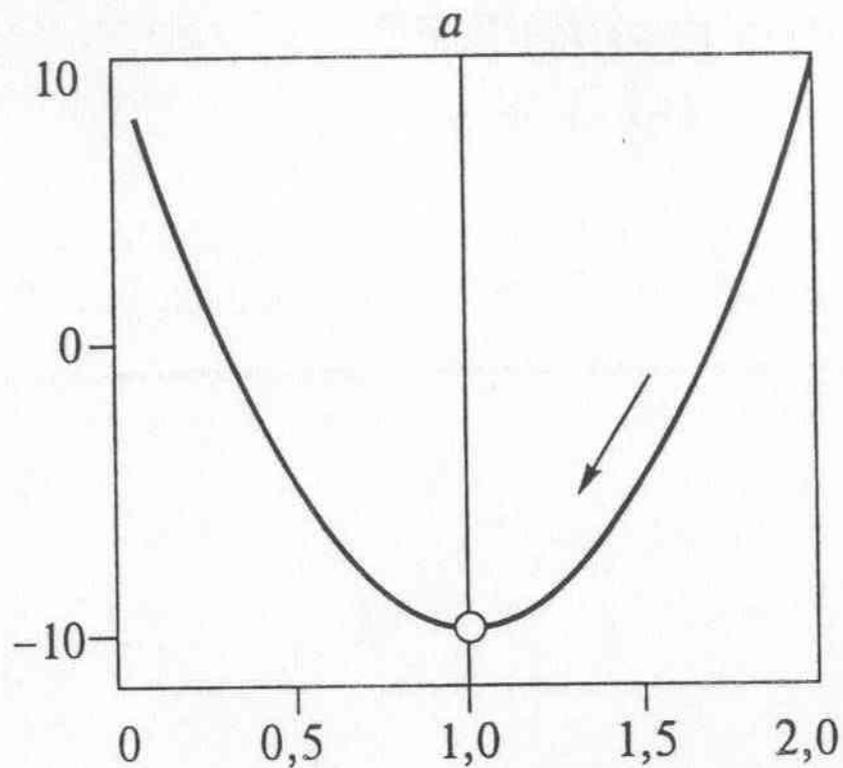


Рис. 6 Выполнимость теоремы Пригожина для линейных систем (а) и ее нарушение для нелинейных систем (б). Для нелинейной системы новые состояния равновесия могут наблюдаться как с большими, так и с меньшими значениями издержек.

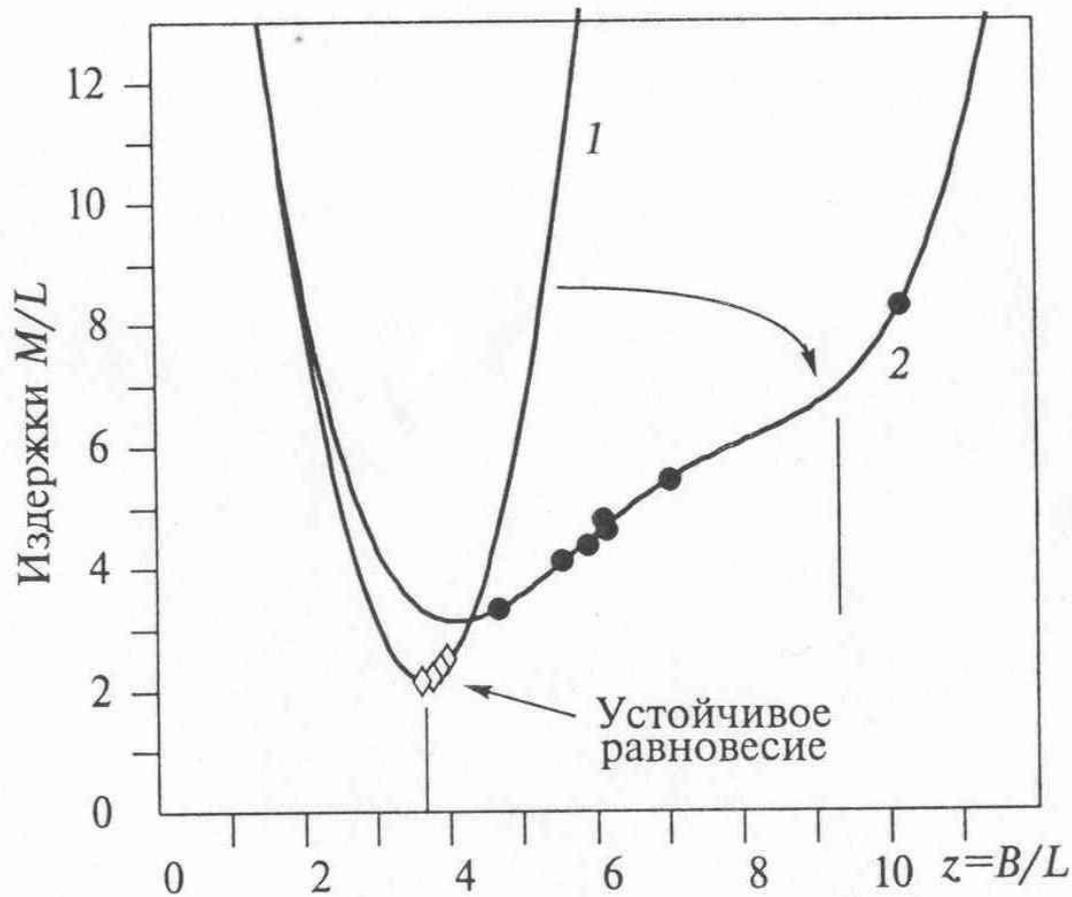


Рис. 7

Функция материальных издержек ( $M/L$ ) для промышленного потенциала Уральского региона в 1970–1986 гг. (1) и всей промышленности Свердловской области в I квартале 1996 – III квартале 1997 гг. (2). Наблюдается процесс деформации потенциальной функции и формирования новой точки равновесия при малом ФОТ, т.е. большей величине,  $z = B / L = J_e X_e / L$ ,  $B$  – выручка,  $L$  – фонд оплаты труда.

## 7. Общие условия устойчивости цен в стационарном состоянии

В стационарном состоянии спрос, предложение и цены связаны уравнениями:

$$I_i - L_{ii}X_i - L_{ie}X_e = 0 \quad (34)$$

$$I_e - L_{ee}X_e - L_{ei}X_i = 0 \quad (35)$$

Решение уравнений (34) и (35) позволяет определить совместную точку  $(X_e^*, X_i^*)$ :

$$X_i^* = \frac{L_{ee}I_i - L_{ie}I_e}{L_{ii}L_{ee} - L_{ei}L_{ie}} \quad (36)$$

$$X_e^* = \frac{L_{ii}I_e - L_{ei}I_i}{L_{ee}L_{ii} - L_{ie}L_{ei}} \quad (37)$$

Если числители положительны:

$$L_{ee}I_i - L_{ie}I_e > 0 \quad (38)$$

$$L_{ii}I_e - L_{ei}I_i > 0 \quad (39)$$

то точка  $(X_e^*, X_i^*)$  устойчива, т.е. все находящиеся в ее окрестности точки стремятся к ней.

В стационарном состоянии ( $I_e = I_i$ ;  $X_e = X_i$ ) условие устойчивости определяется:

$$L_{ee} - L_{ie} > 0$$

$$L_{ii} - L_{ei} > 0$$

$$L_{ee} - L_{ie} = L_{ii} - L_{ei} \quad (40)$$

Устойчивая цена соответствует положительной левой и правой частям уравнения (40).

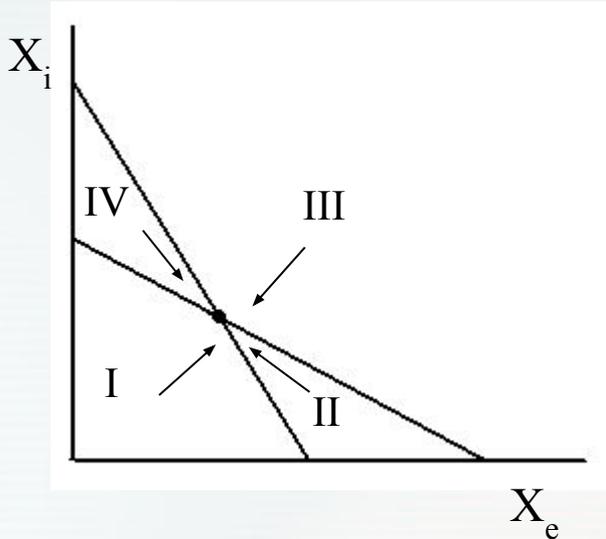


Рис. 8 – Условие устойчивости для внешних  $X_e$  и внутренних  $X_i$  рыночных сил.

На плоскости четыре области:

- I –  $X_i \uparrow, X_e \uparrow,$
- II –  $X_i \uparrow, X_e \downarrow,$
- III –  $X_i \downarrow, X_e \downarrow,$
- IV –  $X_i \downarrow, X_e \uparrow.$

- В лекции рассмотрена устойчивость линейных процессов на рынке ВРП, когда минимальные издержки соответствуют максимально возможной прибыли.
- Однако реально развитие осуществляется тогда, когда издержки (на новые технологии, технологические решения) растут.

В лекции рассмотрена устойчивость линейных процессов на рынке ВРП, когда минимальные издержки соответствуют максимально возможной прибыли. Однако реальное развитие осуществляется тогда, когда издержки (на новые технологии) растут.

Благодарю за внимание!

