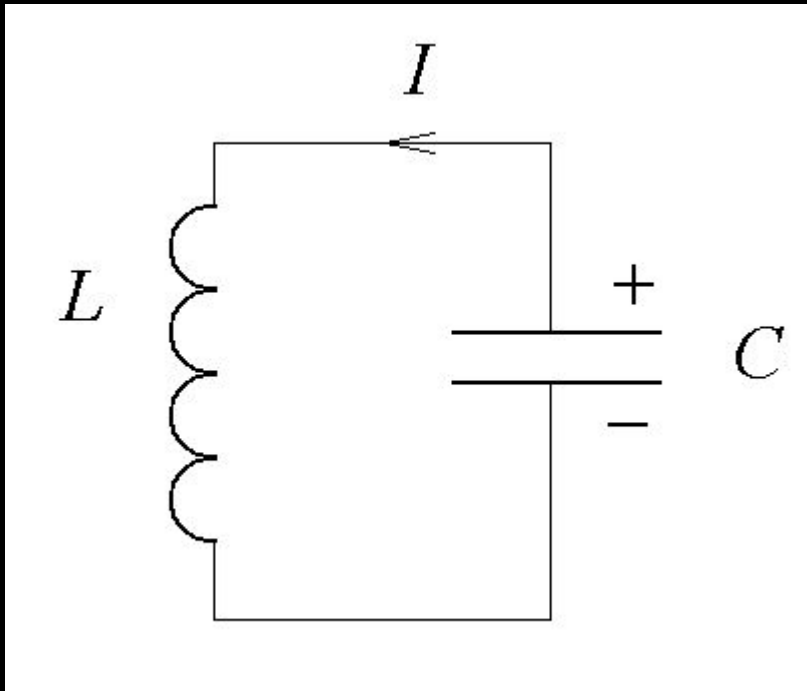


§ 34 Свободные электрические колебания

Глава 3 Электричество и магнетизм

В контуре, содержащем емкость и индуктивность могут возникнуть колебания. Причина – явление самоиндукции.



$$U_C = \varepsilon_s$$

$$\frac{q}{C} = -L \frac{dI}{dt}$$

$$\frac{q}{C} = -Lq''$$

Дифференциальное уравнение гармонических колебаний.

$$q'' + \frac{1}{LC}q = 0$$

Решение уравнения – гармоническая функция.

$$q = q_0 \cos(\omega t + \varphi_0)$$

Циклическая частота и период колебаний определяются емкостью и индуктивностью.

$$\omega = \frac{1}{\sqrt{LC}}$$

$$T = 2\pi\sqrt{LC}$$

Открытый колебательный контур резонирует на электромагнитную волну длиной :

$$\lambda = \frac{c}{\nu} = cT = 2\pi c\sqrt{LC}$$

Максимальные энергии катушки и емкости равны.

$$\frac{LI_0^2}{2} = \frac{CU_0^2}{2}$$

В любой момент времени согласно закону сохранения энергии существует равенство

$$\frac{LI^2}{2} + \frac{CU^2}{2} = \frac{CU_0^2}{2}$$

Время распространения сигнала по цепи

$$\tau = \frac{l}{c}$$

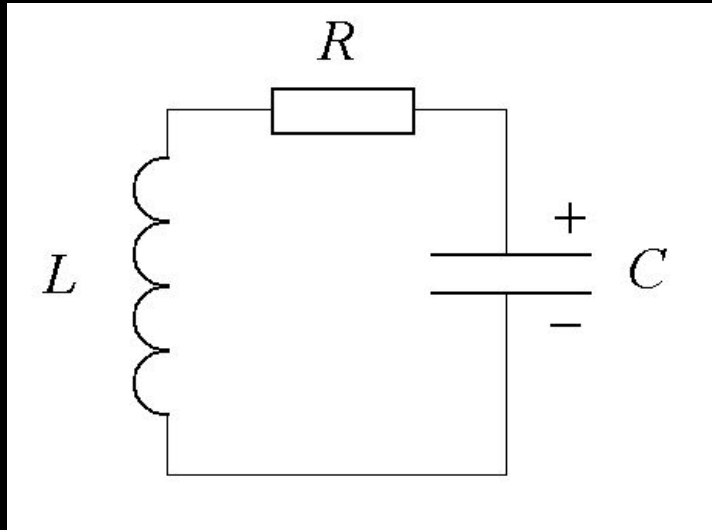
Квазистационарность означает, что сила тока одинакова во всех участках неразветвленной цепи. Следовательно, необходимо выполнение условия

$$\tau \ll T$$

§ 35 Затухающие электрические колебания

Глава 3 Электричество и магнетизм

Рассмотрим цепь, содержащую емкость, индуктивность и сопротивление. При разрядке конденсатора происходят затухающие колебания. Применяя правило Кирхгофа, запишем



$$U_R + U_C = \varepsilon_S$$

$$IR + \frac{q}{C} = -Lq''$$

Преобразуем уравнение

$$q'' + \frac{R}{L}q' + \frac{q}{LC} = 0$$

$$q'' + 2\frac{R}{2L}q' + \frac{1}{LC}q = 0$$

Получили дифференциальное уравнение затухающих колебаний.

$$q'' + 2\beta q' + \omega_0^2 q = 0$$

$$\beta = \frac{R}{2L}$$

Коэффициент затухания

$$\omega_0 = \frac{1}{\sqrt{LC}}$$

Собственная циклическая частота колебаний

Решением является уравнение затухающих колебаний

$$q = q_0 e^{-\beta t} \cos(\omega t + \varphi_0)$$

Циклическая частота колебаний

$$\omega = \sqrt{\omega_0^2 - \beta^2}$$

Амплитуда заряда на конденсаторе убывает по экспоненциальному закону

$$q(t) = q_0 e^{-\beta t}$$

Полная энергия контура

$$W(t) \approx W_0 e^{-2\beta t}$$

Рассмотрим основные величины, характеризующие затухающие колебания.

1. Период колебаний

$$T = \frac{2\pi}{\sqrt{\omega_0^2 - \beta^2}}$$

Апериодические колебания возникнут при условии

$$\omega_0 = \beta$$

$$\frac{1}{\sqrt{LC}} = \frac{R}{2L}$$

$$R = 2\sqrt{\frac{L}{C}}$$

2. Время релаксации – время в течение которого амплитуда заряда уменьшается в e раз.

$$\tau = \frac{1}{\beta}$$

$$\tau = \frac{2L}{R}$$

3. Логарифмический декремент затухания равен логарифму отношения амплитуд колебаний через период

$$\lambda = \ln \frac{A(t)}{A(T+t)} = \beta T = \frac{R\pi}{L\omega}$$

$$\lambda \approx \beta T_0 = \pi R \sqrt{\frac{C}{L}}$$

при малом затухании

4. Добротность колебательного контура

$$Q = 2\pi \frac{W(t)}{W(t) - W(T+t)} = 2\pi \frac{e^{-2\beta t}}{e^{-2\beta t} - e^{-2\beta(T+t)}} \approx$$

$$\approx \frac{2\pi}{1 - (1 - 2\beta T)} = \frac{\pi}{\beta T} = \frac{\pi}{\lambda}$$

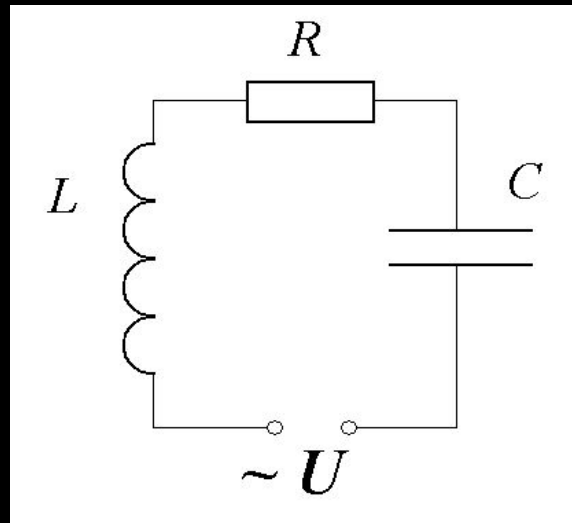
$$Q = \frac{1}{R} \sqrt{\frac{L}{C}}$$

Волновое сопротивление $R_0 = \sqrt{\frac{L}{C}}$

при малом затухании

§ 36 Вынужденные электрические колебания. Законы переменного тока

Для поддержания незатухающих колебаний цепь должна находиться под внешним переменным напряжением



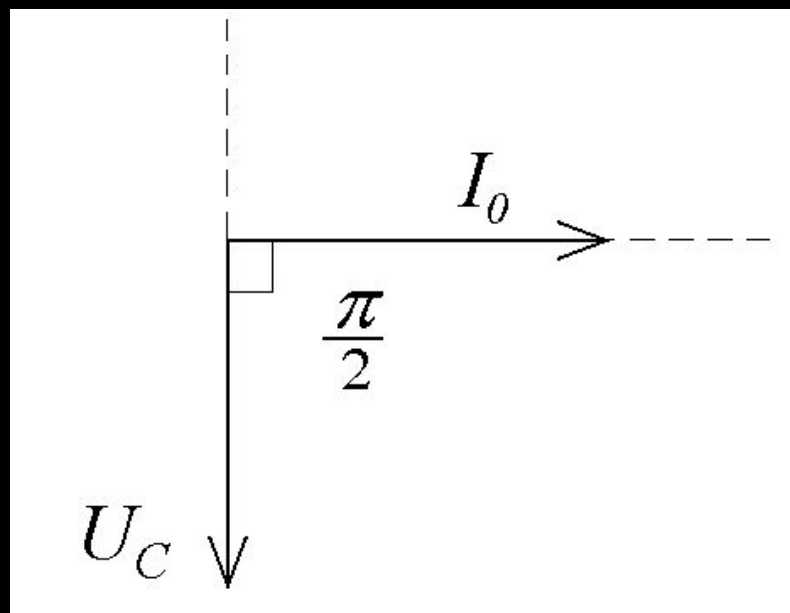
Выясним, как ведет себя каждый элемент под действием внешнего переменного напряжения.

1. Напряжение на емкости. Емкостное сопротивление.

$$U = U_0 \cos \omega t$$

$$q = U_0 C \cos \omega t$$

$$I = q' = -U_0 C \omega \sin \omega t = U_0 C \omega \cos \left(\omega t + \frac{\pi}{2} \right)$$



Ток опережает напряжение на емкости на $\pi/2$.

Амплитуда напряжения на емкости и амплитуда тока связаны:

$$U_0 \omega C = I_0$$

Емкостное сопротивление:

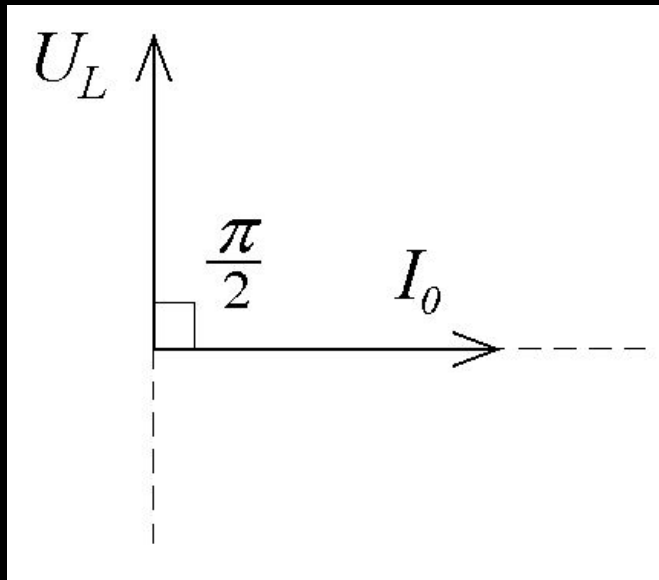
$$x_C = \frac{U_0}{I_0} = \frac{1}{\omega C}$$

2. Напряжение на индуктивности. Индуктивное сопротивление

$$U = -\varepsilon_s = LI'$$

$$I = I_0 \cos \omega t$$

$$U = -L\omega I_0 \sin \omega t = L\omega I \cos \left(\omega t + \frac{\pi}{2} \right)$$

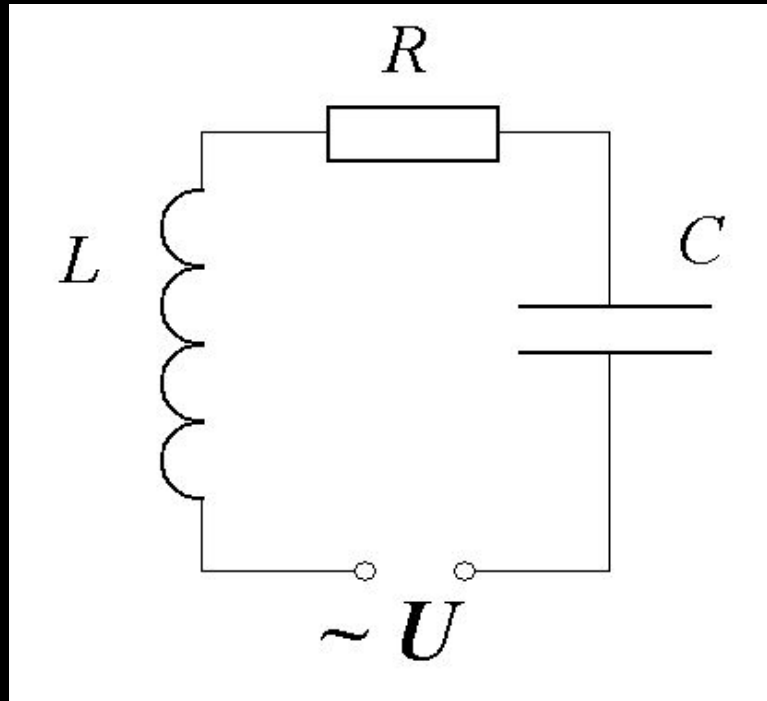


Ток отстает от напряжения на индуктивности на $\pi/2$.

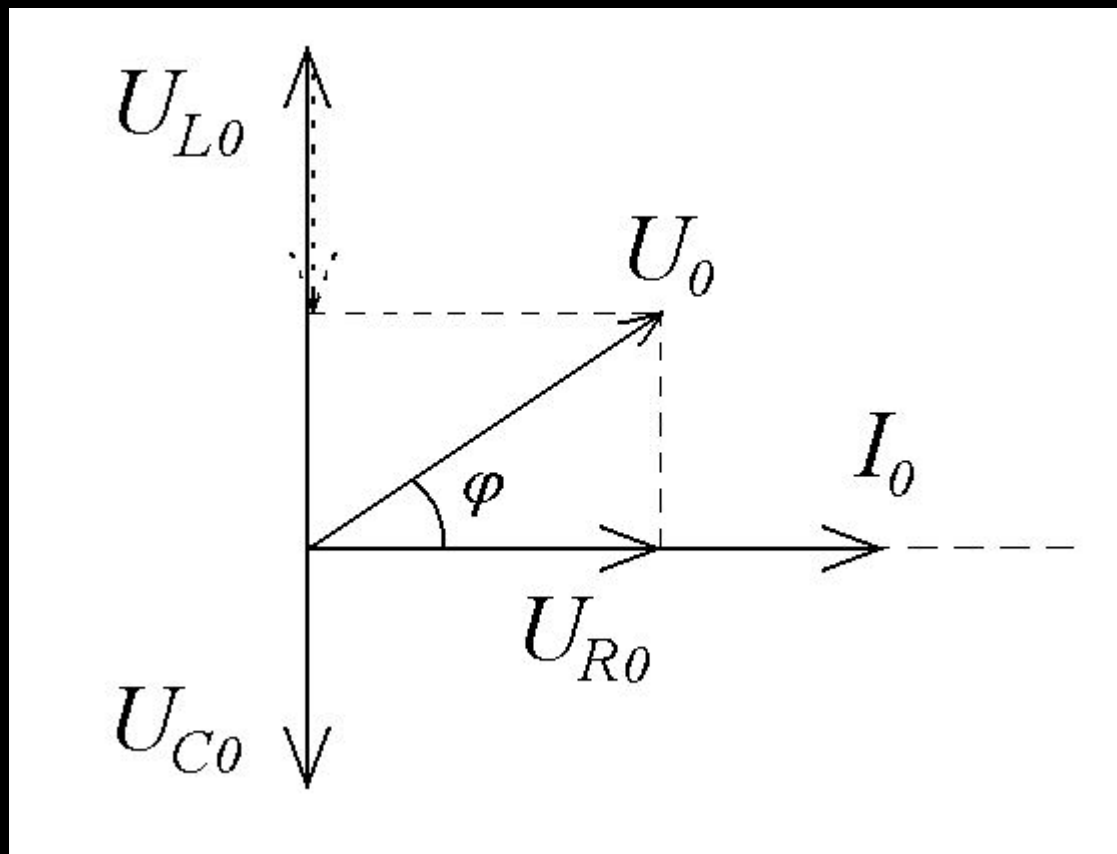
Индуктивное сопротивление:

$$x_L = \frac{U_0}{I_0} = \omega L$$

Рассмотрим последовательное соединение элементов, на которое подано переменное напряжение.



Векторная диаграмма для амплитуд напряжений и токов.



Остается справедливым то, что сумма мгновенных напряжений равна мгновенному внешнему напряжению

$$U = U_L + U_R + U_C$$

Из диаграммы соотношение для амплитуд напряжений и тока:

$$\begin{aligned} U_0 &= \sqrt{U_{R0}^2 + (U_{L0} - U_{C0})^2} = \\ &= \sqrt{(RI_0)^2 + (x_L I_0 - x_C I_0)^2} = \\ &= I_0 \sqrt{R^2 + (x_L - x_C)^2} \end{aligned}$$

Получили выражение – закон Ома для цепи переменного тока.

$$I_0 = \frac{U_0}{\sqrt{R^2 + \left(\omega L - \frac{1}{\omega C}\right)^2}} = \frac{U_0}{Z}$$

Полное сопротивление цепи (импеданс):

$$Z = \sqrt{R^2 + \left(\omega L - \frac{1}{\omega C}\right)^2}$$

Разность (сдвиг) фаз между напряжением и током:

$$\operatorname{tg} \varphi = \frac{U_{L0} - U_{C0}}{U_{R0}} = \frac{\omega L - \frac{1}{\omega C}}{R}$$

Законы Ома и Кирхгофа остаются справедливыми и для переменных токов. В этом случае оперируют комплексными величинами: напряжениями, токами и сопротивлениями.

Мощность, выделяемая в цепи переменного тока

$$\begin{aligned} P(t) &= U(t)I(t) = U_0 \cos \omega t \cdot I_0 \cos(\omega t + \varphi) = \\ &= \frac{U_0 \cdot I_0}{2} (\cos \varphi + \cos(2\omega t + \varphi)) \end{aligned}$$

$$\langle P(t) \rangle = \left\langle \frac{U_0 \cdot I_0}{2} (\cos \varphi + \cos(2\omega t + \varphi)) \right\rangle = \frac{U_0 \cdot I_0}{2} \cos \varphi$$

Коэффициент мощности

$$\cos \varphi = \frac{R}{\sqrt{R^2 + \left(\omega L - \frac{1}{\omega C} \right)^2}} = \frac{R}{Z}$$

На практике стремятся сделать так, чтобы значение коэффициента мощности было наибольшим ($\cos \varphi \rightarrow 1$).

$$P = \frac{U_0 I_0}{2} \cdot \frac{R}{Z} = \frac{I_0^2 R}{2} = I_{\text{Э}}^2 R$$

Эффективные значения тока и напряжения

$$I_{\text{Э}} = \frac{I_0}{\sqrt{2}} \quad U_{\text{Э}} = \frac{U_0}{\sqrt{2}}$$

Эффективным (действующим) значением тока (напряжения) называется такое значение постоянного тока, при котором в цепи выделяется такая же мощность, как и при прохождении переменного тока.

Мощность в цепи переменного тока выражается через эффективные значения тока, напряжения и коэффициент мощности (Вт):

$$P = U_{\text{э}} I_{\text{э}} \cos \varphi$$

Реактивная мощность в цепи переменного тока (ВАр):

$$Q = U_{\dot{Y}} I_{\dot{Y}} \sin \varphi$$

Реактивная мощность в цепи переменного тока, расходуется на поддержание вызываемых переменным током периодических изменений магнитного поля и заряда конденсаторов. Характерным отличием Р. м. является то, что соответствующая ей энергия, не может быть использована для преобразования в приемниках тока в полезную работу.

Полная мощность в цепи переменного тока
(ВА) :

$$S = \sqrt{Q^2 + P^2}$$

§ 37 Резонанс в электрической цепи

1. Амплитуда силы тока может быть выражена через параметры элементов цепи

$$I_0 = \frac{U_0}{\sqrt{\left(\omega L - \frac{1}{\omega C}\right)^2 + R^2}} = \dots = \frac{\omega U_0}{L \sqrt{(\omega_0^2 - \omega^2)^2 + 4\beta^2 \omega^2}}$$

$$(I_0)'_{\omega} = 0$$

$$\left(\frac{\omega U_0}{L \sqrt{(\omega_0^2 - \omega^2)^2 + 4\beta^2 \omega^2}} \right)'_{\omega} = 0$$

2. Амплитуда заряда и напряжения на конденсаторе.

$$q_0 = \frac{I_0}{\omega} = \frac{U_0}{L\sqrt{(\omega_0^2 - \omega^2)^2 + 4\beta^2\omega^2}}$$

$$U_{C0} = \frac{q_0}{C}$$

$$\left(\frac{U_0}{L\sqrt{(\omega_0^2 - \omega^2)^2 + 4\beta^2\omega^2}} \right)'_{\omega} = 0$$

2. Амплитуда напряжения на катушке индуктивности.

$$U_{L0} = L\omega I_0 = \frac{\omega^2 U_0}{\sqrt{(\omega_0^2 - \omega^2)^2 + 4\beta^2 \omega^2}}$$

$$\left(\frac{\omega^2 U_0}{\sqrt{(\omega_0^2 - \omega^2)^2 + 4\beta^2 \omega^2}} \right)'_{\omega} = 0$$

Резонансные частоты:

Для амплитуды
напряжения и заряда на
конденсаторе

$$\omega = \sqrt{\omega_0^2 - 2\beta^2}$$

Для амплитуды тока

$$\omega = \omega_0$$

Для амплитуды
напряжения на катушке
индуктивности

$$\omega = \frac{\omega_0}{\sqrt{1 - 2\left(\frac{\beta}{\omega_0}\right)^2}}$$

—

...

- - -

- . - .

