

# ЭЛЕМЕНТЫ КОМБИНАТОРИКИ.



## ПЕРЕСТАНОВКИ

# Определение

Простейшими комбинациями, которые можно составить из элементов конечного множества, являются *перестановки*.

## Пример.

Пусть имеются три книги. Обозначим их буквами  $a$ ,  $b$  и  $c$ . Эти книги можно расставить на полке по-разному.

Если первой поставить книгу  $a$ , то возможны такие расположения книг:  $abc$ ,  $acb$ .

Если первой поставить книгу  $b$ , то возможными являются такие расположения:  $bac$ ,  $bca$ .

И наконец, если первой поставить книгу  $c$ , то получим такие расположения:  $cab$ ,  $cba$ .

Каждое из этих расположений называют *перестановкой* из трёх элементов.



# Определение

Перестановкой из  $n$  элементов называется каждое расположение этих элементов в определённом порядке.

Число перестановок из  $n$  элементов обозначают символом

$$P_n$$

(читается «Р из n»).

Пусть мы имеем  $n$  элементов.



- На первое место можно поставить любой из них.
- Для каждого выбора первого элемента на второе место можно поставить один из оставшихся  $n-1$  элементов.
- Для каждого выбора первых двух элементов на третье место можно поставить один из оставшихся  $n-2$  элементов и т.д.
- В результате получим, что

$$P_n = n (n - 1) (n - 2) \dots 3 \cdot 2 \cdot 1 = n!$$

(читается « $n$  факториал»).

Например,  $2! = 2 \cdot 1 = 2$ ;  $5! = 5 \cdot 4 \cdot 3 \cdot 2 \cdot 1 = 120$ .

По определению считают, что  $1! = 1$ .



Таким образом, число всевозможных  
перестановок из  
n элементов вычисляется по формуле:

$$P_n = n! = 1 \cdot 2 \cdot 3 \cdot \dots \cdot (n-2)(n-1)n$$

## Пример 1.



Сколькими способами могут быть расставлены 8 участников финального забега на восьми беговых дорожках?

## Решение.



- Число способов равно числу перестановок из 8 элементов.
- По формуле числа перестановок находим, что  $P_8 = 8! = 1 \cdot 2 \cdot 3 \cdot 4 \cdot 5 \cdot 6 \cdot 7 \cdot 8 = 40\,320$ .
- Значит, существует 40 320 способов расстановки участников забега на восьми беговых дорожках.



## Пример 2.



Сколько различных  
четырёхзначных чисел,  
в которых цифры не повторяются,  
можно составить из цифр 0, 2, 4, 6?

## Решение.



Из цифр 0, 2, 4, 6 можно получить  $P_4$  перестановок. Из этого числа надо исключить те перестановки, которые начинаются с 0, так как натуральное число не может начинаться с цифры 0. Число таких перестановок равно  $P_3$ . Значит, искомое число четырёхзначных чисел (без повторения цифр), которые можно составить из цифр 0, 2, 4, 6, равно

$$P_4 - P_3 = 4! - 3! = 24 - 6 = 18.$$

## Пример3.



Имеется девять различных книг, четыре из которых – учебники.

Сколькими способами можно расставить эти книги на полке так, чтобы все учебники стояли рядом?

# Решение.



Сначала будем рассматривать учебники как одну книгу. Тогда на полке надо расставить не девять, а шесть книг. Это можно сделать  $P_6$  способами. В каждой из полученных комбинаций можно выполнить  $P_4$  перестановок учебников. Значит, искомое число способов расположения книг на полке равно произведению  $P_6 \cdot P_4$ . Получаем:

$$P_6 \cdot P_4 = 6! \cdot 4! = = 17\,280.$$

# Задачи на закрепление пройденного материала.



- Сколькими способами могут встать в очередь в билетную кассу:
  - 1) 3 человека; 2) 5 человек?
- Сколько существует вариантов рассаживания вокруг стола:
  - 1) 6 гостей на 6 стульях; 2) 7 гостей на 7 стульях?
- Сколькими способами можно с помощью букв К, L, M и N обозначить вершины четырехугольника?
- Сколько различных пятизначных чисел, все цифры которых различны, можно записать с помощью цифр 4, 5, 6, 7 и 8?
- Сколькими способами можно расставить на полке 8 книг, среди которых 2 книги одного автора, которые при любых перестановках должны стоять рядом?
- В расписании на понедельник шесть уроков: алгебра, геометрия, биология, история, физкультура, химия. Сколькими способами можно составить расписание уроков на этот день так, чтобы два урока математики стояли рядом?

Вычислить:



$$\frac{13!}{11!}$$

$$11!$$

$$\frac{6! \cdot 14}{8!}$$

$$8!$$