Презентация на тему:

Методы решения уравнений и неравенств в целых числах

Давтян Римма Артемовна

7.1. Линейные уравнения

- ***Метод прямого перебора***
- ***Использование неравенств***
- ***Использование отношения делимости***
- ***Метод «спуска»***
- ***Использование формул***

7.2. Нелинейные уравнения

- ***Метод разложения на множители***
  - ***Вынесение общих множителей за скобку***
- ***Применение формул сокращенного умножения***
- ***Использование параметра***
- ***Метод решения относительно одной переменной выделение целой части***
- ***Метод «спуска» метод конечного «спуска»***

7.1. Линейные уравнения
Метод прямого перебора

Пример 74.

В клетке сидят кролики и фазаны. Всего у них 18 ног. Узнать сколько в клетке тех и других. Укажите все решения.

Решение.

Пусть x – количество кроликов, y – количество фазанов, тогда имеем уравнение $4x + 2y = 18$ или $2x + y = 9$

Если x=1, то y=7.

Если x=2, то y=5.

Если x = 3, то y = 3.

Если x = 4, то y = 1.

При x = 5 получаем $2 \cdot 5 = 10 > 9$.

Ответ: (1;7), (2;5), (3;3), (4;1).

Использование неравенств

Пример 75.

Решить в натуральных числах уравнение $5x + 8y = 39$

Решение.

Для уменьшения перебора вариантов рассмотрим неравенства

$$\begin{cases} 5x = 39 - 8y \ge 0 \\ 8y = 39 - 5x \ge 0 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} y \le 4 \\ x \le 7 \end{cases}$$

Проведем перебор по неизвестной у.

Если *у = 1, то х = 6,2 не является натуральным числом.*

Если *у = 2, то х = 4,6 не является натуральным числом.*

Если *у = 3, то х = 3.*

Если *у = 4, то х = 1,4 не является натуральным числом.*

Ответ: *(3; 3)*

ИСПОЛЬЗОВАНИЕ ОТНОШЕНИЯ ДЕЛИМОСТИ

<u>Пример 76.</u>

Имеются контейнеры двух видов: по 130 кг и 160 кг. Сколько было контейнеров первого и сколько второго вида, если вместе они весят 3 тонны? Укажите все решения

Решение.

Обозначим количество контейнеров первого вида через x*, второго – через* y*.*
Получаем уравнение $130x + 160y = 3000$ или $13x + 16y = 300$.

<u>Далее имеем</u>: $13x + 13y + 3y = 13 \cdot 23 + 1$,
$3y - 1 = 13 \cdot (23 - x - y)$.

Отсюда следует, что разность $3y - 1$ делится на 13.

Если $3y - 1 = 0$, то y не является натуральным числом.

Если $3y - 1 = 13$, то y не является натуральным числом.

Если $3y - 1 = 26$, то $y = 9$ и $x = 12$.

Если $3y - 1 = 39$, то y не является натуральным числом.

Если $3y - 1 = 52$, то y не является натуральным числом.

Если $3y - 1 = 65$, то $y = 22$ но $16 \cdot 22 = 352 > 300$.

Ответ: 12 контейнеров по 130 кг и 9 по 160 кг.

МЕТОД «СПУСКА»

Пример 79.

Решить в целых числах уравнение $5x - 7y = 3$.

Решение.

Выразим из уравнения то не- известное, коэффициент при котором меньше по модулю: $x = \frac{7y+3}{5} = y + \frac{2y+3}{5}$

Дробь $\frac{2y+3}{5}$ должна быть равна целому числу.

Положим $\frac{2y+3}{5} = z$, где z – целое число. Тогда $2y + 3 = 5z$. Из последнего уравнения выразим то неизвестное, коэффициент при котором меньше по модулю, и проделаем аналогичные преобразования:

$$y = \frac{5y-3}{2} = 3z - \frac{z+3}{2}$$

Дробь $\frac{z+3}{2}$ должна быть целым числом. Обозначим $\frac{z+3}{2} = t$, где t – целое число .

Отсюда $z = 2t - 3$. Последовательно возвращаемся к неизвестным x и y.

$y = 3\cdot(2t - 3) - t = 5t - 9,$

$x = y + z = 5t - 9 + 2t - 3 = 7t - 12.$

Ответ: $x = 7t - 12$, $y = 5t - 9$, где $t \in \mathbf{Z}$.

Использование формул

Теорема.

Уравнение $a_1x_1 + a_2x_2 + \ldots + a_nx_n = b$

разрешимо в целых числах тогда и только тогда, когда $d \mid b$, где d = НОД $(a_1, a_2, \ldots, a_n)$.

Теорема.

Пусть уравнение $ax + by = c$ разрешимо в **Z** и пара $(x_0; y_0)$ является частным решением этого уравнения. Тогда множеством всех решений в **Z** данного уравнения является множество пар $(x; y)$, где

$$\begin{cases} x = x_0 - \dfrac{b}{d}\cdot t \\ y = y_0 + \dfrac{a}{d}\cdot t \end{cases} \quad \text{где } t \in \mathbf{Z}.$$

Следствие.

Пусть a и b взаимно просты и (x_0 y_0)какое-нибудь решение уравнения

$$ax + by = c \ (*)$$

Тогда формулы

$$x = x_0 - b \cdot t,$$
$$y = y_0 + a \cdot t$$

при $t \in$ **Z** дают все решения уравнения (*).

Пример 81. (МГУ, 1969).

Остаток от деления некоторого натурального числа n на 6 равен 4, остаток от деления n на 15 равен 7. Чему равен остаток от деления n на 30?

Решение.

Из условия задачи следует, что существует натуральное число k такое, что

$$n = 6k + 4.$$

Аналогично имеем , $n = 15l + 7$, где $l \in \mathbf{N}$. Исключая из этих двух равенств n, получим уравнение

$$2k - 5l = 1. \quad (*)$$

Для решения этого уравнения *найдем* какое-нибудь *частное решение в целых* (не обязательно неотрицательных) *числах*. Подбором в качестве такого частного решения можно взять, например, $k = -2$, $l = -1$. Согласно следствия уравнение (*) имеет решения

$$k = -2 +5t, \quad l = -1 + 2t, \quad \text{где } t \in \mathbf{Z}.$$

Чтобы числа k и l были неотрицательными, параметр t должен принимать натуральные значения. Теперь имеем

$$n = 6 \cdot (5t - 2) +4 = 30t - 8 = 30(t - 1) + 22.$$

Ответ: 22.

Пример 83.

Решить в целых числах уравнение 127x - 52y + 1 = 0.

Решение. Преобразуем отношение коэффициентов при неизвестных. Прежде всего, выделим целую часть неправильной дроби $\frac{127}{52}$

$$\frac{127}{52} - 2 + \frac{23}{52}$$

Правильную дробь $\frac{23}{52}$ заменим равной ей дробью $\frac{1}{\frac{52}{23}}$

Тогда получим $\frac{127}{52} - 2 + \frac{1}{\frac{52}{23}}.$

Проделаем такие же преобразования с полученной в знаменателе неправильной дробью $\frac{52}{23}$.

$$\frac{127}{52} - 2 + \frac{1}{2 + \frac{1}{\frac{23}{6}}}$$

Повторяя те же рассуждения для дроби $\frac{23}{6}$, получим

$$\frac{127}{52} = 2 + \cfrac{1}{2 + \cfrac{1}{3 + \cfrac{1}{\frac{6}{5}}}} \longrightarrow \frac{127}{52} = 2 + \cfrac{1}{2 + \cfrac{1}{3 + \cfrac{1}{1 + \frac{1}{5}}}}$$

Мы получили выражение, которое называется конечной цепной или непрерывной дробью. Отбросив последнее звено этой цепной дроби – одну пятую, превратим получающуюся при этом новую цепную дробь в простую и вычтем ее из исходной дроби $\frac{127}{52}$

$$2 + \cfrac{1}{2 + \frac{1}{4}} = 2 + \frac{4}{9} = \frac{22}{9} \longrightarrow \frac{127}{52} - \frac{22}{9} = \frac{221143 - 1144}{52 \cdot 9} = -\frac{1}{52 \cdot 9}$$

Приведем полученное выражение к общему знаменателю и отбросим его

127 · 9 - 52 · 22 + 1 = 0.

127x -52y + 1 = 0

x = 9,   y = 22

x = 9 +52t ,

y = 22 + 127 t ,

где *t* є **Z.**

Ответ: *x = 9 +52t ,*

y = 22 + 127 t ,

где *t* є **Z.**

7.2. Нелинейные уравнения
Метод разложения на множители
вынесение общих множителей за скобку

Пример 84.

Решить в целых числах уравнение $2x^3 + xy - 7 = 0$.

Решение.

Приведем данное уравнение к виду

$$x(2x^2 + y) = 7$$

Так как

$$7 = 1 \cdot 7 = 7 \cdot 1 = -1 \cdot (-7) = -7 \cdot (-1),$$

то рассмотрим четыре системы уравнений:

1) $\begin{cases} x = 1 \\ 2x^2 + y = 7 \end{cases}$

2) $\begin{cases} x = 7 \\ 2x^2 + y = 1 \end{cases}$

3) $\begin{cases} x = -1 \\ 2x^2 + y = -7 \end{cases}$

4) $\begin{cases} x = -7 \\ 2x^2 + y = -1 \end{cases}$

Из каждой системы получаем решения.

Ответ: *(1; 5); (-1; -9); (7; -97); (-7; -99).*

ПРИМЕНЕНИЕ ФОРМУЛ СОКРАЩЕННОГО УМНОЖЕНИЯ

Пример 85.

Найти все пары натуральных чисел, разность квадратов которых равна 55.

Решение.

Запишем условие задачи в виде уравнения $n^2 - k^2 = 55$ или $(n - k)(n + k) = 55$.
Так как $n + k > 0$, то $n - k > 0$, причем $n + k > n - k$.

Поскольку $55 = 1 \cdot 55 = 5 \cdot 11$ то возможны два случая

$$\begin{cases} n - k = 1 \\ n + k = 55 \end{cases} \quad \text{или} \quad \begin{cases} n - k = 5 \\ n + k = 11 \end{cases}$$

Решая эти уравнения, получим два ответа:

$n = 28,\ k = 27$

и $n = 8,\ k = 3$.

Ответ: $(28;\ 27)$; $(8;\ 3)$.

Использование параметра

Пример 88.

Решить в целых числах уравнение $2x^2 - 2yx + 9x + y = 2$.

Решение.

Перепишем уравнение в виде

$$2x^2 - x(2y - 9) + y - 2 + a = a$$

и разложим левую часть уравнения на множители как квадратный трехчлен относительно *x*.

Находим дискриминант $D = 4y^2 - 44y + 97 - 8a$.

Очевидно, если , $97 - 8a = 121$, то дискриминант будет полным квадратом. При этом $a = -3$ и

$$x = \frac{2y - 9 \pm (2y - 11)}{4}.$$

Отсюда $x_1 = 0{,}5$ и $x_2 = y - 5$. Уравнение принимает вид $(2x - 1)(x - y + 5) = -3$. Рассмотрите самостоятельно решение последнего уравнения.

Ответ: $(1; 9); (-1; 3); (2; 8); (0; 2)$.

Метод решения относительно одной переменной выделение целой части

Пример 89. (МГУ, 1997).

Найти все пары целых чисел x и y, удовлетворяющие уравнению

$$3xy + 14x + 17y + 71 = 0.$$

Решение.

Выразим из данного уравнения y через x: $y = -\frac{14x + 71}{3x + 17}.$

При этом следует отметить, что величина $3x + 17 \neq 0$ (так как x – целое число). Выделим из дроби в правой части этого равенства правильную алгебраическую дробь (у которой степень числителя меньше степени знаменателя):

$$y = -\frac{4(3x + 17) + 2x + 3}{3x + 17} = -4 - \frac{2x + 3}{3x + 17}.$$

Умножим обе части последнего равенства на 3:

$$3y = -12 - \frac{6x + 9}{3x + 17} = -12 - 2 + \frac{25}{3x + 17}$$

Метод «спуска»
метод конечного «спуска»

Пример 96.

Решить в целых числах уравнение $2x^2 - 5y^2 = 7$.

Решение.

Так как $2x^2$ – четное число, а 7 – нечетное, то $5y^2$ должно быть нечетным, т.е. y – нечетное.

Пусть , $y = 2z + 1$, где $z \in \mathbf{Z}$, тогда данное уравнение можно переписать в виде

$$x^2 - 10z^2 - 10z = 6.$$

Отсюда видно, что x должно быть четным. Пусть , $x = 2m$, тогда последнее уравнение примет вид $2m^2 - 5z(z + 1) = 3$, что невозможно, так как число $z(z + 1)$ – четно, а разность двух четных чисел не может быть равна нечетному числу. Таким образом, данное уравнение не имеет решений в целых числах.

Ответ: нет решений.

$$\text{или } 3y + 14 = \frac{25}{3x + 17}.$$

Поскольку числа *3y* и *14* – целые, то *3x +17* должно быть делителем числа *25*: *3x + 17* = ±*1*; ±*5*; ±*25* – всего *6* возможностей. Отсюда для *x* получаем три возможных значения: –*4*, –*6*, –*14* (в остальных трех случаях *x* не является целым). Соответствующие значения y равны –*3*, –*13*, –*5*.

Ответ: *(-4; -3); (-6; -13); (-14; -5)*.

Замечание. В данном примере суть выделения целой части состоит в избавлении переменной *x* из числителя (сравните с примером *77*). В решении был использован прием домножения обеих частей равенства на коэффициент при *x* в знамена- теле. Этот прием домножения также удобно использовать при решении уравнений методом разложения на множители.

Параметризация уравнения

Пример 99.

Решить в целых числах уравнение $x^3 + y^3 + z^3 = 2$.

Решение.

Положим $x = a + b$, $y = a - b$.

Так как $x^3 + y^3 = 2a^3 + 6ab^2$, то исходное уравнение принимает вид

$$2a^3 + 6ab^2 + z^3 = 2.$$

Положив $a = 1$, получим $z^3 = -6b^2$.

Считаем теперь $b = 6t^2$

Отсюда $x = 1 + 6t^2$, $y = 1 - 6t^2$, $z = -6t^2$.

Таким образом, получено бесконечное множество решений исходного уравнения, соответствующих целочисленным значениям параметра t.

***Ответ*:** $x = 1 + 6t^2$, $y = 1 - 6t^2$, $z = -6t^2$, где $t \in$ **Z**

Функционально-графический метод

Пример 100. (МИОО 2010).

Найти все пары натуральных k *и* n *таких, что* $k < n$ *и* $(n)^k = (k)^n$.

Решение.

1. Преобразуем исходное равенство:

$$(n)^k = (k)^n \iff k \ln n = n \ln k \iff \frac{\ln n}{n} = \frac{\ln k}{k} \iff f(n) = f(k),$$

$$\text{где } f(x) = \frac{\ln x}{x}, x > 0.$$

2. $$f'(x) = \frac{1 - \ln x}{x^2},$$

$$\text{поэтому } f'(x) \le 0 \text{ при } x \ge e \text{ и } f'(x) \ge 0 \text{ при } 0 < x \le e.$$

Значит, функция $f(x)$ возрастает на $(0; e]$ и убывает на $[e; +\infty)$ (см. рис. 1).

Так как $k < n$, равенство $f(n) = f(k)$ может выполняться только при условии $k < e < n$, откуда следует $k = 1$ или , $k = 2$, причем для каждого k может найтись не более одного значения n, удовлетворяющего уравнению в паре с этим значением k.

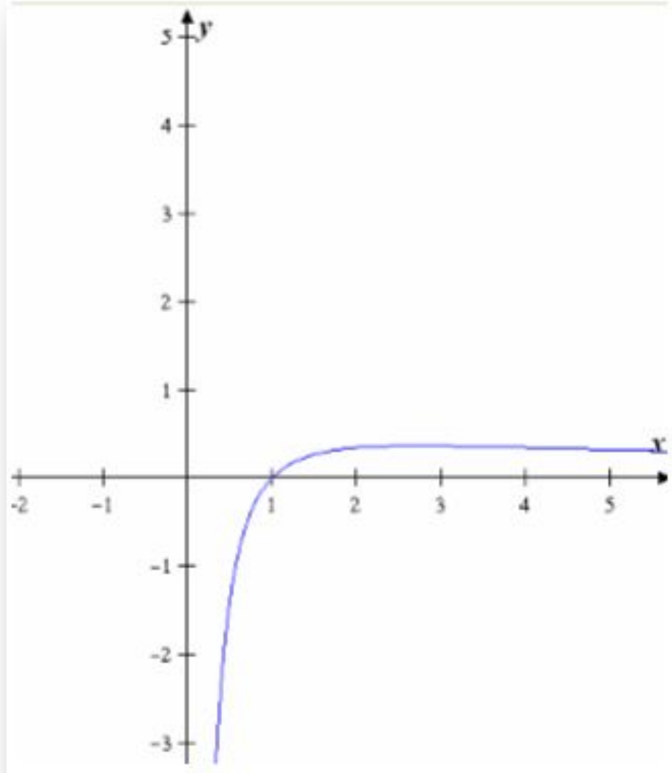

Рис. 1

3. В случае $k = 1$ из данного уравнения получаем $n = 1$, что не соответствует условию $k < n$.

4. В случае $k = 2$ получаем уравнение , $n^2 = 2^n$, решение которого легко находится подбором: $n = 4$, причем в силу выше- сказанного это единственное решение $n > e$.

Ответ: $k = 2$, $n = 4$.

7.3. Неравенства
Использование области определения

Пример 102. (МГУ, 1973).

Найти все целые числа x, удовлетворяющие неравенству

$$3^{\frac{5}{2}\log_3(13-4x)} - 3^{\log_2(3x-2)} < 47.$$

Решение.

Допустимые значения x определяются системой неравенств

$$\begin{cases} 13-4x>0, \\ 3x-2>0, \\ x\in\mathbf{Z} \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} x<\frac{13}{4}, \\ x>\frac{2}{3}, \\ x\in\mathbf{Z} \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} \frac{2}{3}<x<\frac{13}{4}, \\ x\in\mathbf{Z} \end{cases} \Leftrightarrow x=1;2;3.$$

Подставляем последовательно найденные значения x в неравенство, предварительно его упростив.

$$47+3^{\log_2(3x-2)} > (13-4x)^{\frac{5}{2}}.$$

1. $x = 1$. Тогда

$$47 + 3^{\log_2 1} > 9^{\frac{5}{2}} \Leftrightarrow 48 > 243 \text{ (неверно)}.$$

2. $x = 2$. Тогда

$$47 + 3^{\log_2 4} > 5^{\frac{5}{2}} \Leftrightarrow 56 > 5^{\frac{5}{2}} \Leftrightarrow 56^2 > 5^5 \Leftrightarrow 3136 > 3125 \text{ (верно)}.$$

3. $x = 3$. Тогда

$$47 + 3^{\log_2 7} > 47 + 3^2 \Leftrightarrow 56 > 1^{\frac{5}{2}} \Leftrightarrow 56 > 1 \text{ (верно)}.$$

Ответ: *2*; *3*.

Использование монотонности

Пример 103. (МГУ, 1976).

Найти все целые z, удовлетворяющие неравенству

$$\sqrt[6]{z+1} < \sqrt[8]{6-z}.$$

Решение.

Допустимые значения z определяются из системы

$$\begin{cases} z+1 \geq 0 \\ 6-z \geq 0 \end{cases} \Leftrightarrow -1 \leq z \leq 6.$$

Заметим, что левая часть неравенства увеличивается с ростом z, а правая – уменьшается. Это обстоятельство позволяет упростить перебор.

1. При $z = -1$ имеем $0 < \sqrt[8]{7}$ (верно).
2. При $z = 0$ имеем $1 < \sqrt[8]{6}$ (верно).
3. При $z = 1$ имеем $\sqrt[6]{2} < \sqrt[8]{5} \Leftrightarrow (\sqrt[6]{2})^{24} < (\sqrt[8]{5})^{24} \Leftrightarrow 2^4 = 16 < 5^3 = 125$ (верно).
4. При $z = 2$ имеем $\sqrt[6]{3} > \sqrt[8]{4}$, так как $3^4 = 81 > 4^3 = 64$.

В силу сделанного выше замечания, необходимости в проверке значений $z = 3, 4, 5, 6$ нет. Эти числа решениями не являются.

Ответ: *-1, 0, 1.*

Использование ограниченности

Пример 104. (МГУ, 1996).

Найти все целочисленные решения неравенства

$$\sqrt{x^3-5x-3} \le 6-x.$$

Решение.

Целые решения будем искать из двух ограничений системы

$$\begin{cases} x^3-5x-3\ge 0, \\ 6-x\ge 0 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} x(x^2-5)\ge 3, \\ x\le 6. \end{cases}$$

Первое неравенство выполняется при $x = 3, 4, 5, 6$. Но из этих значений исходному неравенству удовлетворяет только $x = 3$.

При $x = 0, 1, 2$ первое неравенство не выполняется.

При $x = -1$ выполняется как первое не- равенство, так и исходное неравенство.

При $x = -2$ первое неравенство не выполняется.

При остальных значениях $x = -3, -4, \ldots$ первое неравенство не разрешимо, так как левая часть неравенства $x(x^2 - 5) \ge 3$ будет отрицательной.

Ответ: $-1; 3$.

Метод интервалов

<u>Пример 105. (МГУ, 1972).</u>

Определить, сколько целочисленных решений имеет неравенство

$$(n^2-2)(n^2-22)(n^2-52)(n^2-152)<0$$

Решение.

Методом интервалов по 2 n определяем решения (см. рис. 2):

$$2<n^2<22 \text{ или } 52<n^2<152.$$

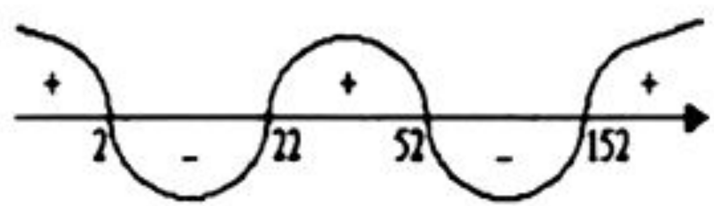

Рис. 2

Дальше подбором находим $n=\pm2, \pm3, \pm4$ или $n=\pm8, \pm9, \pm10, \pm11, \pm12$.

Ответ: *16 решений.*

7.4. Уравнения и неравенства
Уравнение с одной неизвестной

Пример 107.

Может ли квадратное уравнение $ax^2 + bx + c = 0$ с целыми коэффициентами иметь дискриминант, равный 23?

Первое решение.

Рассмотрим уравнение $b^2 - 4ac = 23$.

Так как 23 – нечетное число, а $4ac$ – четное, то b^2 и, следовательно, b – нечетное число, т.е. $b = 2k - 1,\ k \in \mathbf{Z}$. Тогда $(2k - 1)^2 - 4ac = 23;\ 4(k^2 - k - ac) = 22$. Последнее уравнение не имеет решений, так как 22 не делится на 4.

Второе решение.

Перепишем уравнение $b^2 - 4ac = 23$ в виде $b^2 - 25 = 4ac - 2$ и разложим обе части уравнения на множители $(b - 5)(b + 5) = 2(2ac - 1)$. (*)

Так как в правой части уравнения – число четное, то и в левой – тоже четное, следовательно, $b - 5$ и $b + 5$ одновременно четные (докажите), т.е. $b - 5 = 2m$, $b - 5 = 2k$.

Левая часть уравнения (*) делится на 4, а правая – нет, поэтому уравнение $b^2 - 4ac = 23$ не имеет решений в целых числах.

Третье решение.

Перепишем уравнение $b^2 - 4ac = 23$ в виде $b^2 = 4ac + 23$ или $b^2 = 4(ac + 5) + 3$. Получили, что квадрат натурального числа при делении на 4 дает остаток 3, что невозможно (докажите).

Ответ: не может.

Показательные уравнения

Теорема.

Если остаток от деления a_1 на b равен r_1, а остаток от деления a_2 на b равен r_2, то остаток от деления $a_1 + a_2$ на b равен остатку от деления $r_1 + r_2$ на b.

Опорная задача.

Докажите, что оста- ток от деления на 3 числа 5^k равен 1, если k четно, и 2, если k нечетно.

<u>*Пример 121. (МИОО 2010).*</u>

Найти все пары $(x; y)$ *целых чисел, удовлетворяющие системе неравенств:*

$$\begin{cases} x^2 + y^2 < 18x - 20y - 166, \\ 32x - y^2 > x^2 + 12y + 271. \end{cases}$$

Решение.

Выделяя полные квадраты, получаем:

$$\begin{cases} (x-9)^2 + (y+10)^2 < 15, \\ (x-16)^2 + (y+6)^2 < 21, \\ x, y \in Z. \end{cases}$$

Из первого и второго неравенства системы:

$$\begin{cases} (x-9)^2 < 15 \\ (x-16)^2 < 21; \end{cases} \quad \begin{cases} 6 \le x \le 12 \\ 12 \le x \le 20; \end{cases} \quad x = 12.$$

Подставляя $x = 12$ в систему, получаем:

$$\begin{cases} (y+10)^2 < 6, \\ (y+6)^2 < 5, \\ y \in Z; \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} -2 \le y + 10 \le 2, \\ -2 \le y + 6 \le 2, \\ y \in Z; \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} -12 \le y \le -8, \\ -8 \le y \le -4, \\ y \in Z. \end{cases} \text{ Отсюда } y = -8.$$

Ответ: *(12; -8).*

Уравнения, содержащие функцию «целая часть числа» $[x]$

 Целой частью числа x называется наибольшее целое число, не превосходящее x.

 Свойства целой части числа:

1) Из равенства $[y] = n$ следует, что

   а) n – целое число;

   б) $y = n + \alpha$, где $0 \le \alpha < 1$;

   в) $0 \le y - n < 1$.

2) Если $[u] = [v]$ то $u = m + \alpha$, $v = m + \beta$, где $0 \le \alpha < 1$ и $0 \le \beta < 1$, поэтому $u - v = \alpha - \beta$ и $-1 < u - v < 1$.

3) Если $[x + y] = x$ то x – целое число и $0 \le y < 1$.

4) Если n – целое число, то

$$[n + x] = n + [x].$$