



АЛГЕБРАИЧЕСКИЕ НЕРАВЕНСТВА

БАХЛАЕВА О.В.

МОУ СОШ №61» Г.САРАТОВ

Неравенства –не только составная часть контрольно-измерительных материалов государственной итоговой аттестации- «задания этого типа являются **характеристическим свойством**, различающим базовый и профильный уровни подготовки учащихся. К их выполнению в 2015 г. приступало более 60% участников профильного единого государственного экзамена (ЕГЭ), а положительные баллы получили более 30% всех участников. Поэтому при подготовке выпускников к экзамену решению заданий подобного уровня следует уделять много внимания».

- В данной работе рассматриваются рациональные, дробно-рациональные неравенства и неравенства, содержащие знак модуля.

ПОДХОДЫ К РЕШЕНИЮ АЛГЕБРАИЧЕСКИХ НЕРАВЕНСТВ

Функциональн
ый

ПОДХОД

Неравенство- как
сравнение двух
функций

Алгебраический

ПОДХОД

Неравенство- как
сравнение двух
выражений

Геометрический

ПОДХОД

Геометрическая
интерпретация
неравенств

ФУНКЦИОНАЛЬНЫЙ ПОДХОД

Метод интервалов основан на свойстве непрерывности функции.

$$\frac{(5x-2)^2}{x-3} \geq \frac{4-20x+25x^2}{24-11x+x^2}.$$

Преобразуем неравенство:
$$\frac{(5x-2)^2}{x-3} \geq \frac{4-20x+25x^2}{24-11x+x^2}.$$

$$\frac{(5x-2)^2}{x-3} \geq \frac{4-20x+25x^2}{24-11x+x^2} \Leftrightarrow \frac{(5x-2)^2}{x-3} - \frac{(5x-2)^2}{(x-3)(x-8)} \geq 0 \Leftrightarrow$$

$$\Leftrightarrow \frac{(5x-2)^2(x-9)}{(x-3)(x-8)} \geq 0 \Leftrightarrow \begin{cases} x = 0, 4, \\ 3 < x < 8, \\ x \geq 9. \end{cases}$$

Ответ: $\{0, 4\} \cup (3; 8) \cup [9; +\infty).$

ФУНКЦИОНАЛЬНЫЙ ПОДХОД

ИСПОЛЬЗОВАНИЕ СВОЙСТВ МОНОТОННОСТИ ФУНКЦИИ

Решите неравенство: $(2x^2+1)^5 - (3x)^5 > 3x - 2x^2 - 1$.

Запишем неравенство как

$$(2x^2+1)^5 + 2x^2+1 > (3x)^5 + 3x$$

Рассмотрим функцию $y = t^5 + t$, определенную при всех действительных значениях t . Так как $y'(t) = 5t^4 + 1 > 0$ для любого t из области определения, то функция $y(t)$ возрастает на всей области определения. Для возрастающей функции, определенной на всей числовой прямой, неравенство $y(t_1) > y(t_2)$ равносильно неравенству $t_1 > t_2$. Значит, наше неравенство равносильно неравенству $2x^2+1 > 3x$,

$$2x^2 - 3x + 1 > 0, \text{ откуда } x < 0,5 \text{ или } x > 1.$$

Ответ: $(-\infty; 0,5) \cup (1; +\infty)$.

ФУНКЦИОНАЛЬНЫЙ ПОДХОД

МЕТОД РАЦИОНАЛИЗАЦИИ

- Пример 5. Решите неравенство: $(x^2-1)^{2+x} > (x^2-1)^{5x-3}$
- Запишем его как $(x^2-1)^{2+x} - (x^2-1)^{5x-3} > 0$ и используем метод рационализации.
- $$\begin{cases} (x^2 - 1 - 1)(2 + x - 5x + 3) > 0, \\ x^2 - 1 > 0. \end{cases} \Leftrightarrow$$
- $$\begin{cases} (x - \sqrt{2})(x + \sqrt{2})(5 - 4x) > 0, \\ (x - 1)(x + 1) > 0. \end{cases} \Leftrightarrow$$
- $$\begin{cases} x < -\sqrt{2}, \\ 1,25 < x < \sqrt{2}. \end{cases}$$
- Ответ: $(-\infty ; -\sqrt{2}) \cup (1,25; \sqrt{2})$

АЛГЕБРАИЧЕСКИЙ ПОДХОД

СВЕДЕНИЕ НЕРАВЕНСТВА К РАВНОСИЛЬНОЙ СИСТЕМЕ

Пример 6. Решите неравенство:

$$\left| x^2 - \frac{29}{12}x - \frac{35}{12} \right| \geq 2x^2 - \frac{61}{12}x - \frac{19}{12}.$$

Согласно одной из стандартных схем неравенство равносильно совокупности неравенств:

$$\left| x^2 - \frac{29}{12}x - \frac{35}{12} \right| \geq 2x^2 - \frac{61}{12}x - \frac{19}{12} \Leftrightarrow \begin{cases} x^2 - \frac{29}{12}x - \frac{35}{12} \geq 2x^2 - \frac{61}{12}x - \frac{19}{12}, \\ -x^2 + \frac{29}{12}x + \frac{35}{12} \geq 2x^2 - \frac{61}{12}x - \frac{19}{12} \end{cases} \Leftrightarrow$$

$$\Leftrightarrow \begin{cases} x^2 - \frac{8}{3}x + \frac{4}{3} \leq 0, \\ x^2 - \frac{5}{2}x - \frac{3}{2} \leq 0 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} (x-2) \left(x - \frac{2}{3} \right) \leq 0, \\ (x-3) \left(x + \frac{1}{2} \right) \leq 0 \end{cases} \Leftrightarrow -0,5 \leq x \leq 3.$$

Ответ: $[-0,5; 3]$.

АЛГЕБРАИЧЕСКИЙ ПОДХОД

МЕТОД ВВЕДЕНИЯ НОВОЙ ПЕРЕМЕННОЙ

Пример 7. Решите неравенство:

$$\frac{3}{2 - (x+1)\sqrt{3}} + \frac{(x+1)\sqrt{3} - 1}{(x+1)\sqrt{3} - 3} \geq 3.$$

Сделаем замену $z = (x+1)\sqrt{3}$; решим неравенство методом интервалов.

$$\frac{3}{2-z} + \frac{z-1}{z-3} \geq 3 \Leftrightarrow \frac{(z-1)(z-3,5)}{(z-2)(z-3)} \leq 0 \Leftrightarrow \begin{cases} 1 \leq z < 2, \\ 3 < z \leq 3,5. \end{cases}$$

Возвратимся к исходной переменной и получим:

$$1 \leq (x+1)\sqrt{3} < 2 \quad \text{или} \quad 3 < (x+1)\sqrt{3} \leq 3,5$$

$$\frac{1}{\sqrt{3}} - 1 \leq x < \frac{2}{\sqrt{3}} - 1 \quad \text{или} \quad \sqrt{3} - 1 < x \leq \frac{7}{2\sqrt{3}} - 1.$$

Ответ: $\left[\frac{1}{\sqrt{3}} - 1; \frac{2}{\sqrt{3}} - 1 \right) \cup \left(\sqrt{3} - 1; \frac{7}{2\sqrt{3}} - 1 \right]$.

АЛГЕБРАИЧЕСКИЙ ПОДХОД

РАЗБИЕНИЕ ОБЛАСТИ ОПРЕДЕЛЕНИЯ НА ПОДМНОЖЕСТВА

Пример 8. Решите неравенство:

$$3|x+1| + \frac{1}{2}|x-2| - \frac{3}{2}x \leq 8.$$

Числа 2 и -1 разбивают числовую прямую на три промежутка $(-\infty; -1)$, $[-1; 2)$ и $[2; +\infty)$. Освобождаясь от знаков модулей, с учетом знаков выражений под знаком модуля решим данное неравенство на каждом из этих промежутков.

Первый случай.

$$\begin{cases} -3x - 3 - \frac{1}{2}x + 1 - \frac{3}{2}x \leq 8, \\ x \leq -1 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} -5x \leq 10, \\ x \leq -1 \end{cases} \Leftrightarrow -2 \leq x \leq -1.$$

Второй случай.

$$\begin{cases} 3x + 3 - \frac{1}{2}x + 1 - \frac{3}{2}x \leq 8, \\ -1 < x \leq 2 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} x \leq 4, \\ -1 < x \leq 2 \end{cases} \Leftrightarrow -1 < x \leq 2.$$

Третий случай.

$$\begin{cases} 3x + 3 + \frac{1}{2}x - 1 - \frac{3}{2}x \leq 8, \\ x > 2 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} 2x \leq 6, \\ x > 2 \end{cases} \Leftrightarrow 2 < x \leq 3.$$

Объединяя промежутки, получаем $-2 \leq x \leq 3$.

Ответ: $[-2; 3]$.

ГЕОМЕТРИЧЕСКИЙ ПОДХОД

В РЕШЕНИИ НЕРАВЕНСТВ ИСПОЛЬЗУЮТ ГЕОМЕТРИЧЕСКИЕ СВОЙСТВА

ГЕОМЕТРИЧЕСКАЯ ИНТЕРПРЕТАЦИЯ МОДУЛЯ

Пример 9. Решите неравенство: $|x - 5| > |x + 2|$.

Геометрическая интерпретация дает простое и красивое решение: так как $|x - 5|$ и $|x + 2| = |x - (-2)|$ – это расстояния от точки x до точек 5 и -2 соответственно, то из данного равенства следует, что точка x – середина отрезка $[-2; 5]$, и поэтому $x = \frac{-2+5}{2} = 1,5$. Значит, решениями данного неравенства являются все числа $x \in (-\infty; 1,5)$, т.е. все точки, расстояния от каждой из которых до точки 5 больше расстояния до точки (-2) .

Ответ: $(-\infty; 1,5)$.

$$\frac{x^2 - 5x + 6}{(x-22)(x-3)} \leq 0$$

АЛГЕБРАИЧЕСКИЕ НЕРАВЕНСТВА В КИМ_{АХ} ГОСУДАРСТВЕННОЙ ИТОГОВОЙ АТТЕСТАЦИИ

БАЗОВЫЙ УРОВЕНЬ

НЕРАВЕНСТВА

- А) $x^2 + 5x + 6 \leq 0$
 Б) $x^2 + 5x - 6 \leq 0$
 В) $x^2 - 5x + 6 \leq 0$
 Г) $x^2 - 5x - 6 \leq 0$

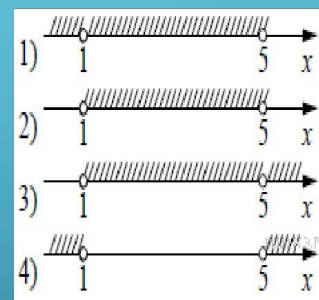
РЕШЕНИЯ

- 1) $[-2; 3]$
 2) $[-3; -2]$
 3) $[-1; 6]$
 4) $[-6; 1]$

НЕРАВЕНСТВА

- А) $(x-1)^2(x-5) < 0$
 Б) $(x-1)(x-5) < 0$
 В) $\frac{x-1}{x-5} > 0$
 Г) $\frac{(x-5)^2}{x-1} > 0$

РЕШЕНИЯ



НЕРАВЕНСТВА

- А) $\frac{1}{(x-2)(x-3)} > 0$
 Б) $3^{-x+3} > 3$
 В) $\log_3 x > 1$
 Г) $\frac{x-3}{x-2} < 0$

РЕШЕНИЯ

- 1) $x < 2$ или $x > 3$
 2) $2 < x < 3$
 3) $x < 2$
 4) $x > 3$

АЛГЕБРАИЧЕСКИЕ НЕРАВЕСТВА В КИМ_{АХ} ГОСУДАРСТВЕННОЙ ИТОГОВОЙ АТТЕСТАЦИИ

Профильный уровень

2.

$$(x^2 - 3,6x + 3,24)(x - 1,5) \leq 0.$$

$$\frac{x^2 - 2x - 2}{x^2 - 2x} + \frac{7x - 19}{x - 3} \leq \frac{8x + 1}{x}.$$

$$\frac{1}{x - 1} + \frac{1}{2 - x} \leq 5.$$

3.

$$\left(\frac{10}{5x - 21} + \frac{5x - 21}{10} \right)^2 \leq \frac{25}{4}.$$

$$\frac{2 - (x - 6)^{-1}}{5(x - 6)^{-1} - 1} \leq -0,2.$$

$$\frac{6}{x\sqrt{3} - 3} + \frac{x\sqrt{3} - 6}{x\sqrt{3} - 9} \geq 2.$$

$$\left| 2x^2 + \frac{19}{8}x - \frac{1}{8} \right| \geq 3x^2 + \frac{1}{8}x - \frac{19}{8}.$$

$$3|x + 1| + \frac{1}{2}|x - 2| - \frac{3}{2}x \leq 8.$$

АЛГЕБРАИЧЕСКИЕ НЕРАВЕСТВА В КИМАХ ГОСУДАРСТВЕННОЙ ИТОГОВОЙ АТТЕСТАЦИИ

ТИПИЧНЫЕ ОШИБКИ И СПОСОБЫ ИХ УСТРАНЕНИЯ

- Используют преобразования, нарушающие равносильность;
- Формальное перенесение приемов решения уравнений на неравенство;
- Последовательность шагов нарушена, незакончена, не выполнена до конца (нет обратных переходов);
- Неверное использование логической символики;
- Не исключают из ответа точки, при которых знаменатель обращается в 0;
- В расстановке знаков, записи конечного ответа;
- Вычислительные ошибки.
- Добиваться понимания смысла равносильных переходов, а не формального запоминания;
- нужно более тщательно отрабатывать применение метода введения вспомогательной переменной при решении неравенств, указывая на отличия от уравнений, решаемых тем же способом, запись промежуточных ответов лучше в виде неравенства
- Логическую символику отработать или не использовать
- система устной работы для формирования вычислительной грамотности