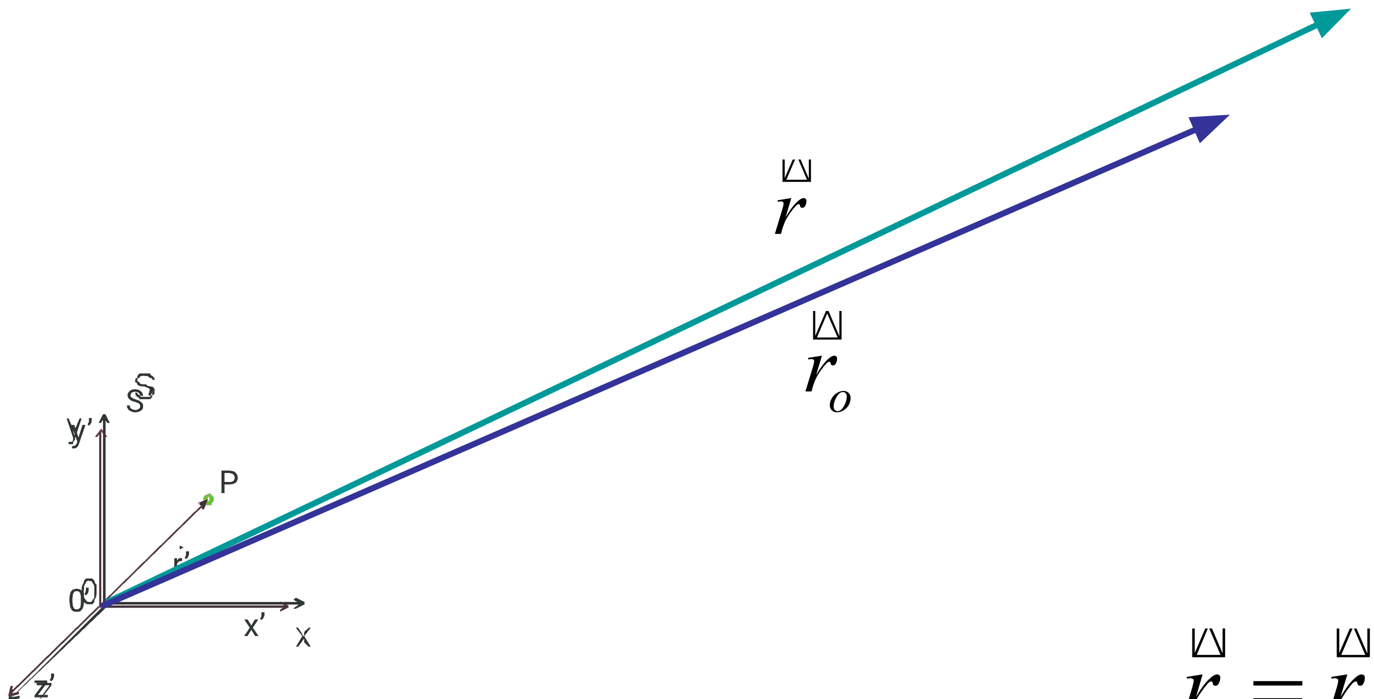
Nieinercjalne układy odniesienia

- układy poruszające się prostoliniowo z przyspieszeniem:

układ S' porusza się prostoliniowo z przyspieszeniem a_o względem układu inercjalnego S



$$\vec{r} = \vec{r}\,' + \vec{r}_o$$

$$\boxed{\vec{r} = \vec{r}\,' + \vec{r}_o}$$

prędkość układu S′
(prędkość unoszenia)

$$\frac{d\vec{r}}{dt} = \frac{d\vec{r}\,'}{dt} + \frac{d\vec{r}_o}{dt} \quad \Rightarrow \quad \boxed{\vec{v} = \vec{v}\,' + \vec{v}_o}$$

prędkość punktu P
względem układu S

prędkość punktu P
względem układu S′

Przyspieszenie

$$\vec{a} = \frac{d\vec{v}}{dt} = \frac{d\vec{v}\,'}{dt} + \frac{d\vec{v}_o}{dt} \quad \Rightarrow \quad \boxed{\vec{a} = \vec{a}\,' + \vec{a}_o}$$

$$m\vec{a} = m\vec{a}' + m\vec{a}_o \quad \Rightarrow \quad m\vec{a}' = m\vec{a} - m\vec{a}_o$$

$$\boxed{-m\vec{a}_o \equiv \vec{F}_b}$$

siły bezwładności działające na punkt materialny – pseudosiły, siły pozorne

Zwrot wektora sił bezwładności jest przeciwny do zwrotu wektora przyspieszenia

$$\boxed{m\vec{a} \equiv \vec{F}}$$

siły rzeczywiście działające na punkt materialny pochodzące od otoczenia

II zasada dynamiki w układzie nieinercjalnym

$$m\vec{a}' = \vec{F} + \vec{F}_b$$

- układy obracające się:

a) siła odśrodkowa – działa na każde ciało znajdujące się w odległości $\vec{r}\,'$ od osi obrotu

$$\vec{F}_o = -m\vec{\omega}\times(\vec{\omega}\times\vec{r}\,') = -m\omega^2\vec{r}\,' = m\frac{v^2}{r}\frac{\vec{r}}{r}$$

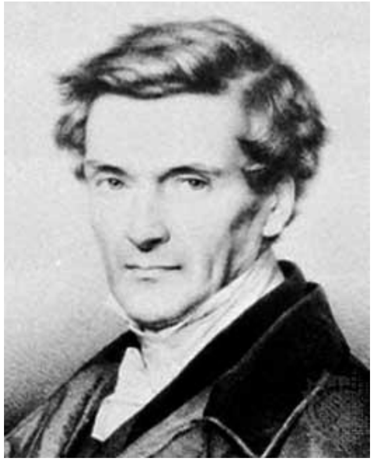
b) siła Coriolisa – działa na ciało poruszające się z prędkością $\vec{v}\,'$ względem układu obracającego się

$$\vec{F}_C = -2m\vec{\omega}\times\vec{v}\,', \quad F_C = 2m\omega v'\sin\angle(\vec{\omega},\vec{v}\,'), \; \vec{F}_C \perp \vec{\omega},\vec{v}\,'$$

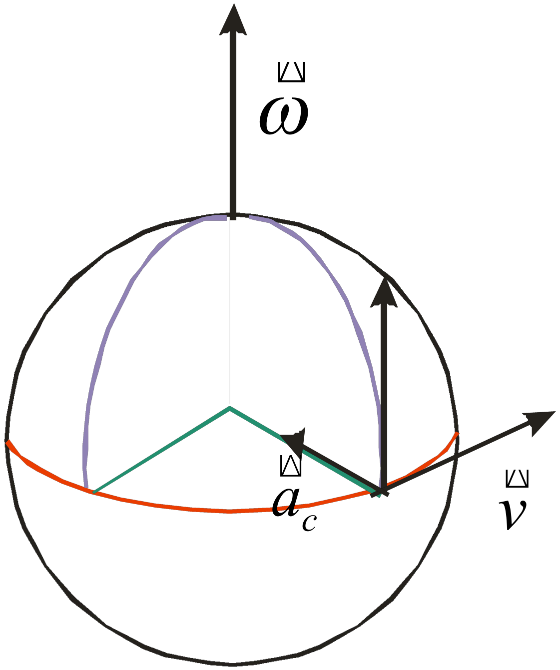
Siła Coriolisa na Ziemi

$$\vec{F}_C = -2m\vec{\omega} \times \vec{v}'$$

$$\vec{a}_C = 2\vec{\omega} \times \vec{v}'$$



Gustave Gaspard de Coriolis
1792 - 1843.



Czy laboratorium znajdujące się na powierzchni Ziemi jest układem inercjalnym?

Ziemia wykonuje dwa ruchy obrotowe:

a) wokół własnej osi

przyspieszenie dośrodkowe

$$a_{d1} = \omega^2 R_z = \frac{4\pi^2}{T^2} R_z = \frac{4\pi^2 \cdot 6.4 \cdot 10^6 \mathrm{m}}{(24 \cdot 3600)^2 \mathrm{s}^2} \approx 3.38 \cdot 10^{-2} \frac{\mathrm{m}}{\mathrm{s}^2}$$

b) wokół Słońca

przyspieszenie dośrodkowe

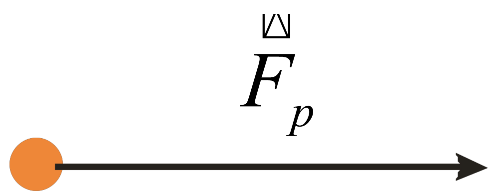
$$a_{d2} = \omega^2 R_{z-s} = \frac{4\pi^2}{T^2} R_{z-s} = \frac{4\pi^2 \cdot 1.5 \cdot 10^{11} \mathrm{m}}{(365 \cdot 24 \cdot 3600)^2 \mathrm{s}^2} \approx 5.95 \cdot 10^{-3} \frac{\mathrm{m}}{\mathrm{s}^2}$$

Tak, ale ze względu na niewielkie wartości przyspieszeń tę „nieinercjalność" można pominąć w zjawiskach, które będziemy omawiać.

Prawo zachowania energii

- prawa zachowania są niezależne od własności toru, a często również od własności danej siły
- prawa zachowania mają zastosowanie nawet wtedy, gdy siły są nieznane
- prawa zachowania stanowią dogodną pomoc w rozwiązywaniu zagadnienia ruchu cząstki.

Cząstka o masie *m* nie jest poddana działaniu żadnej siły. W chwili $t = 0$ do cząstki przyłożono siłę



$$\vec{F}_p = const$$

$$F_p = ma = m\frac{dv}{dt} = m\frac{d^2x}{dt^2}$$

Prędkość cząstki

$$v(t) = \int \frac{F_p}{m} dt = \frac{F_p}{m} t + c_1$$

Warunki początkowe

$$t = 0,\ v = v_0,\ x = x_0 \qquad v_0 = 0 + c_1 \qquad c_1 = v_0$$

$$\boxed{v(t) = v_0 + \frac{F_p}{m} t \quad \Rightarrow \quad t = \frac{m}{F_p}\left(v(t) - v_0\right)}$$

Z definicji $$v = \frac{dx}{dt}$$

otrzymamy

$$x(t) = \int \left(v_0 + \frac{F_p}{m} t \right) dt = v_0 t + \frac{F_p}{m} \frac{t^2}{2} + c_2$$

$$x_0 = 0 + c_2$$

$$c_2 = x_0$$

$$x(t) = x_0 + v_0 t + \frac{F_p}{m} \frac{t^2}{2}$$

$$x(t)-x_0 = v_0 t + \frac{F_p}{m}\frac{t^2}{2} = v_0\frac{m}{F_p}\left(v(t)-v_0\right) + \frac{F_p}{2m}\frac{m^2}{F_p^2}\left(v(t)-v_0\right)^2$$

$$= \frac{m}{F_p}\left[\left(v(t)v_0 - v_0^2\right) + \frac{1}{2}\left(v(t)^2 - 2v(t)v_0 + v_0^2\right)\right]$$

$$x(t)-x_0 = \frac{m}{2F_p}\left(v(t)^2 - v_0^2\right)$$

$$\boxed{F_p\left[x(t)-x_0\right] = \frac{m}{2}v(t)^2 - \frac{m}{2}v_0^2}$$

$$\frac{mv^2}{2}$$

energia kinetyczna cząstki

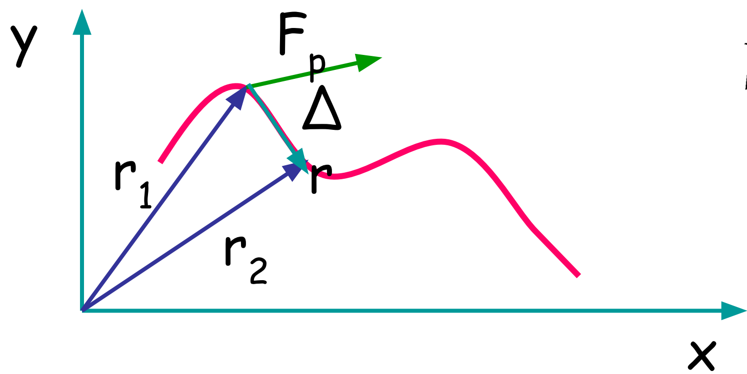
$$F_p(x - x_0)$$

praca wykonana na cząstce przez siłę F_p

$$F_p\left[x(t) - x_0\right] = \frac{m}{2}v(t)^2 - \frac{m}{2}v_0^2$$

praca wykonana przez przyłożoną siłę jest równa zmianie energii kinetycznej cząstki

Praca - iloczyn skalarny wektorów siły i przemieszczenia



$$W = \vec{F}_p \cdot \Delta\vec{r} = F_p \Delta r \cos\angle(\vec{F}_p, \Delta\vec{r})$$

$$\vec{F}_p = \vec{F}_p(\vec{r}) \neq const$$

Drogę rozkładamy na N odcinków liniowych takich, że na każdym z nich

$$F_p(r) = const$$

Wówczas

$$W = \vec{F}_p(\vec{r}_1)\cdot\Delta\vec{r}_1 + \vec{F}_p(\vec{r}_2)\cdot\Delta\vec{r}_2 + \vec{F}_p(\vec{r}_3)\cdot\Delta\vec{r}_3 + \ldots + \vec{F}_p(\vec{r}_N)\cdot\Delta\vec{r}_N = \sum_{i=1}^{N}\vec{F}_p(\vec{r}_i)\cdot\Delta\vec{r}_i$$

równanie to jest słuszne w granicy, gdy $\Delta\vec{r}_i \to 0$ - toru krzywoliniowego nie można dokładnie rozłożyć na skończoną liczbę odcinków prostoliniowych.

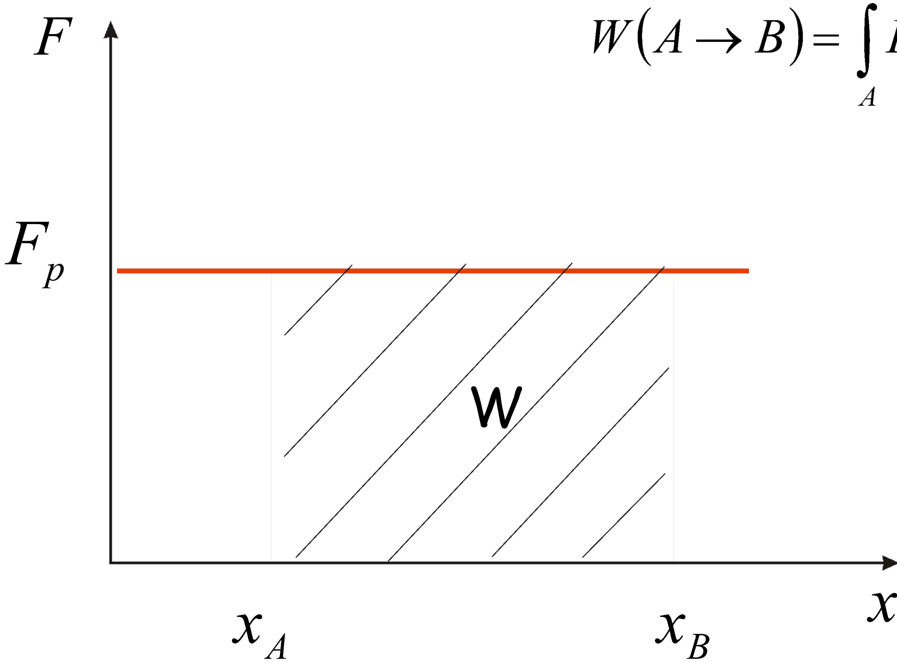
$$W = \lim_{\Delta \vec{r}_i \to 0} \sum_{i=1}^{\infty} \vec{F}_p(\vec{r}_i) \cdot \Delta \vec{r}_i \equiv \int_{\vec{r}_A}^{\vec{r}_B} \vec{F}_p(\vec{r}) \cdot d\vec{r}$$

Pracę definiujemy jako:

$$W(A \to B) = \int_A^B \vec{F}_p(\vec{r}) \cdot d\vec{r}$$

a) Stała siła

$$W(A \to B) = \int_A^B F_p \cdot dx = F_p (x_B - x_A)$$

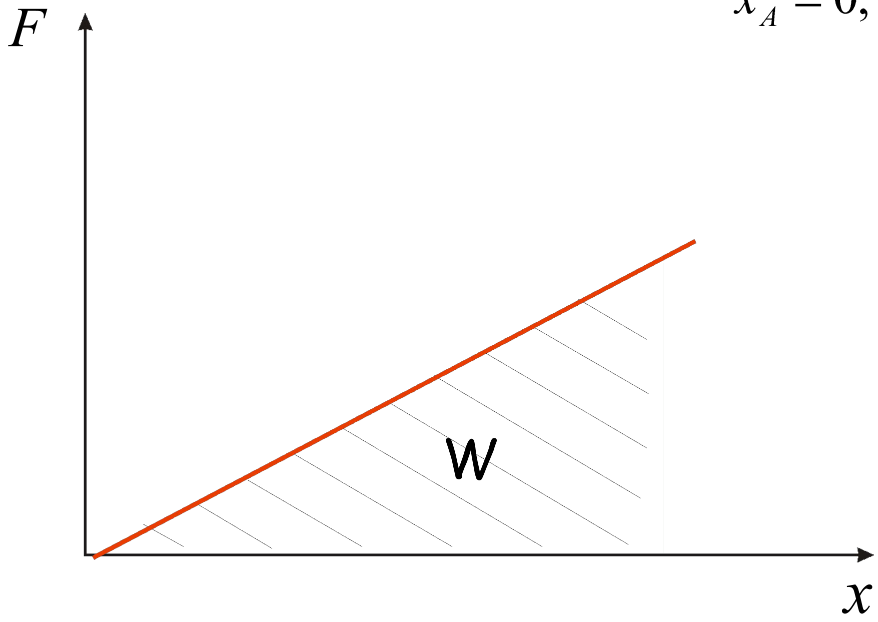


b) Siła zmienna, np. rozciągamy sprężynę:

$$F_p = -(-kx) = kx$$

$$W(A \to B) = \int_A^B kx \cdot dx = \frac{1}{2}k\left(x_B^2 - x_A^2\right)$$

$$x_A = 0, \quad W(A \to B) = \frac{1}{2}kx^2$$



Praca wykonana przez dowolną siłę

$$\boxed{\vec{F}_p = m\frac{d\vec{v}}{dt}}$$

?

$$W(A\to B) = m\int_A^B \frac{d\vec{v}}{dt}\cdot d\vec{r} = m\int_A^B \frac{d\vec{v}}{dt}\cdot\frac{d\vec{r}}{dt}dt = m\int_A^B\left(\frac{d\vec{v}}{dt}\cdot\vec{v}\right)dt$$

$$\frac{d}{dt}\vec{v}^2 = \frac{d}{dt}(\vec{v}\cdot\vec{v}) = \frac{d\vec{v}}{dt}\cdot\vec{v} + \vec{v}\cdot\frac{d\vec{v}}{dt} = 2\frac{d\vec{v}}{dt}\cdot\vec{v}$$

$$W(A\to B) = \frac{m}{2}\int_A^B \frac{d\vec{v}^2}{dt}dt = \frac{m}{2}\int_A^B d\vec{v}^2 = \boxed{\frac{mv_B^2}{2} - \frac{mv_A^2}{2}}$$

praca wykonana przez dowolną siłę = zmiana energii kinetycznej ciała

Moc – szybkość przekazywania energii.

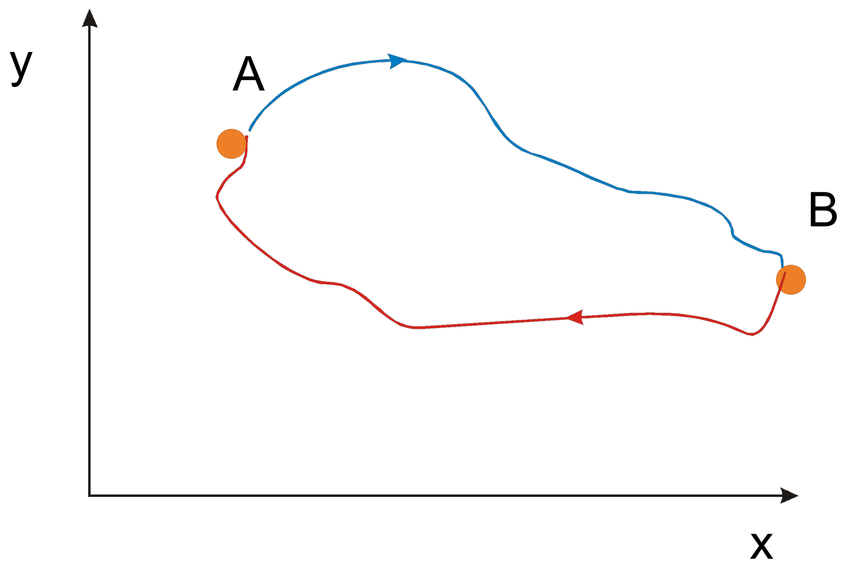
$$P = \frac{\Delta W}{\Delta t} = \vec{F}_p \frac{\Delta \vec{r}}{\Delta t}$$

W granicy, $\Delta t \to 0$

$$\boxed{P = \frac{dW}{dt} = \vec{F}_p \cdot \frac{d\vec{r}}{dt} = \vec{F}_p \cdot \vec{v}}$$

Moc chwilowa = iloczyn skalarny przyłożonej siły i prędkości chwilowej ciała.

Siły zachowawcze



$$W(A \to B) = \frac{mv_B^2}{2} - \frac{mv_A^2}{2}$$

$$W(B \to A) = \frac{mv_B^2}{2} - \frac{mv_A^2}{2}$$

$$W(A \to B \to A) = \left(\frac{mv_B^2}{2} - \frac{mv_A^2}{2}\right) + \left(\frac{mv_A^2}{2} - \frac{mv_B^2}{2}\right) = 0$$

Praca wykonana przez siłę zachowawczą po drodze zamkniętej jest równa zeru.

Praca wykonana przez silę zachowawczą nie zależy od kształtu toru.

Energia potencjalna

Przykładamy do ciała siłę F_p równoważącą wszystkie inne siły działające na ciało. Wówczas E_k = const. Praca wykonana przez siłę F_p podczas przenoszenia tego ciała z punktu A do punktu B pola zachowawczego = zmianie energii potencjalnej ciała

$$E_p(B) - E_p(A) = W(A \rightarrow B) = \int_A^B \vec{F}_p \cdot d\vec{r}$$

Energia potencjalna ciała w danym punkcie pola

$$E_p(\vec{r}) = E_p(A) + \int_A^{\vec{r}} \vec{F}_p \cdot d\vec{r}$$

wyznaczona jest z dokładnością do stałej addytywnej

Jeśli punkt A □ □, wówczas $E_p(\infty) \to 0$ i energia potencjalna ciała względem nieskończoności

$$E_p(\vec{r}) = \int_{\infty}^{\vec{r}} \vec{F}_p \cdot d\vec{r}$$

Jeśli siłę przyłożoną zastąpimy siłą $\vec{F}$ rzeczywiście działającą na ciało $\vec{F}_p = -\vec{F}$ to energia potencjalna ciała w danym punkcie pola

$$E_p(\vec{r}) = E_p(A) - \int_{A}^{\vec{r}} \vec{F} \cdot d\vec{r}$$

lub względem punktu położonego w nieskończoności

$$E_p(\vec{r}) = -\int_{\infty}^{\vec{r}} \vec{F} \cdot d\vec{r}$$

Zasada zachowania energii mechanicznej

Na cząstkę działa siła

$$\vec{F} = \vec{F}_z + \vec{F}_N$$

suma sił zachowawczych

suma sił niezachowawczych

Praca wykonana przez siłę

$$W = W_z + W_N$$

Praca wykonana przez dowolne siły podczas przenoszenia ciała z punktu A do B = zmianie energii kinetycznej ciała

$$W = W(A \to B) = E_{kB} - E_{kA}$$

Praca wykonana przez siły zachowawcze = zmianie energii potencjalnej ciała

$$W_z = W(A \to B) = -\left(E_{pB} - E_{pA}\right)$$

$$E_{kB} - E_{kA} = -\left(E_{pB} - E_{pA}\right) + W_N$$

$$\underbrace{\left(E_{kB} + E_{pB}\right)}_{\text{energia całkowita w punkcie B pola}} - \underbrace{\left(E_{kA} + E_{pA}\right)}_{\text{energia całkowita w punkcie A pola}} = W_N$$

$$\Delta E = E_{cB} - E_{cA} = W_N$$

$$\Delta E = 0 \quad \rightarrow \quad E = const \quad \rightarrow \quad W_N = 0 \quad \rightarrow \quad \vec{F}_N = 0$$

Zmiana całkowitej energii mechanicznej układu równa jest pracy sił niezachowawczych.
Jeśli na ciało (układ ciał) działają tylko siły zachowawcze wówczas energia mechaniczna jest stała.

Prawa zachowania w nieinercjalnych układach odniesienia

$$E_{cB} - E_{cA} = W_N + W_B$$

Odśrodkowa siła bezwładności

$$\vec{F}_B = m\omega^2 \vec{R}$$

a praca przez nią wykonana

$$W_B = \int_A^B \vec{F}_B d\vec{r} = \int_A^B m\omega^2 \vec{R} d\vec{r}$$

przy czym

$$\vec{R} d\vec{r} = R dr \cos\angle(\vec{R} d\vec{r}) = R dR$$

zmiana promienia

$$W_B = \int_{R_A}^{R_B} m\omega^2 R\, dR = m\omega^2 \left.\frac{R^2}{2}\right|_{R_A}^{R_B} = m\omega^2 \frac{R_B^2}{2} - m\omega^2 \frac{R_A^2}{2}$$

Praca wykonana przez siłę bezwładności nie zależy od drogi łączącej punkty A i B – jest więc siłą zachowawczą. Zmiana energii potencjalnej

$$E_{pB} - E_{pA} = -W_B$$

$$E_{pB} - E_{pA} = m\omega^2 \frac{R_A^2}{2} - m\omega^2 \frac{R_B^2}{2}$$

Energia potencjalna w dowolnym punkcie:

$$E_{pB} = \underbrace{E_{pA} + m\omega^2 \frac{R_A^2}{2}}_{const} - m\omega^2 \frac{R_B^2}{2} = -m\omega^2 \frac{R_B^2}{2} + const$$

Związek siły z energią potencjalną

Przypadek jednowymiarowy – F = F(x)

$$E_p(x) = -\int_{\infty}^{x} F_x \cdot dx$$

$$dE_p(x) = -F_x dx \qquad \rightarrow \qquad F_x = -\frac{dE_p}{dx}$$

Przypadek trójwymiarowy – F = F(x,y,z)

$$F_x = -\frac{\partial E_p}{\partial x}, \quad F_y = -\frac{\partial E_p}{\partial y}, \quad F_z = -\frac{\partial E_p}{\partial z}$$

$$\vec{F} = -\vec{i}\frac{\partial E_p}{\partial x} - \vec{j}\frac{\partial E_p}{\partial y} - \vec{k}\frac{\partial E_p}{\partial z} \equiv -\underbrace{\left(\vec{i}\frac{\partial}{\partial x} + \vec{j}\frac{\partial}{\partial y} + \vec{k}\frac{\partial}{\partial z}\right)}_{\text{operator gradientu}} E_p \equiv -gradE_p$$

Operator gradientu

Każdemu punktowi o współrzędnych (x, y, z) przypisana jest wielkość skalarna ϕ = ϕ(x, y, z), to dane pole jest polem skalarnym

$$grad\varphi \equiv \nabla\varphi \equiv \vec{i}\frac{\partial\varphi}{\partial x} + \vec{j}\frac{\partial\varphi}{\partial y} + \vec{k}\frac{\partial\varphi}{\partial z}$$

przy przemieszczeniu o odcinek

$$d\vec{r} = \vec{i}\,dx + \vec{j}\,dy + \vec{k}\,dz$$

następuje przyrost funkcji ϕ o wartość

$$d\varphi = grad\varphi \cdot d\vec{r} = \frac{\partial\varphi}{\partial x}dx + \frac{\partial\varphi}{\partial y}dy + \frac{\partial\varphi}{\partial z}dz$$

wektor

$$\vec{F} = -\vec{i}\,\frac{\partial E_p(x,y,z)}{\partial x} - \vec{j}\,\frac{\partial E_p(x,y,z)}{\partial y} - \vec{k}\,\frac{\partial E_p(x,y,z)}{\partial z} \equiv$$

$$\equiv -\underbrace{\left(\vec{i}\,\frac{\partial}{\partial x} + \vec{j}\,\frac{\partial}{\partial y} + \vec{k}\,\frac{\partial}{\partial z}\right)}_{\text{wektor}} E_p(x,y,z) \equiv -grad\, E_p(x,y,z)$$

skalar

$$\vec{\nabla} \equiv grad$$

wektor · skalar = wektor

wektor · wektor = skalar

wektor x wektor = wektor

$\vec{\nabla} \cdot a$ gradient

$\vec{\nabla} \cdot \vec{a}$ diwergencja

$\vec{\nabla} \times \vec{a}$ rotacja