НАЧЕРТАТЕЛЬНАЯ ГЕОМЕТРИЯ

Раздел № 3

Солодухин Е.А.

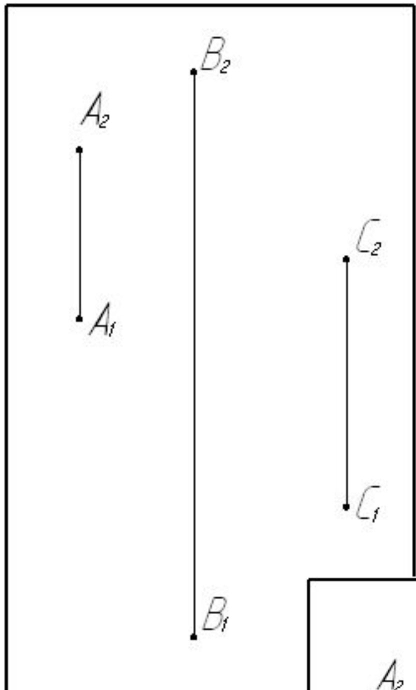
ОБЯЗАТЕЛЬНО

- Рассмотреть частный случай ПЕРЕСЕЧЕНИЯ ПРЯМОЙ И ПЛОСКОСТИ, когда плоскость проецирующая

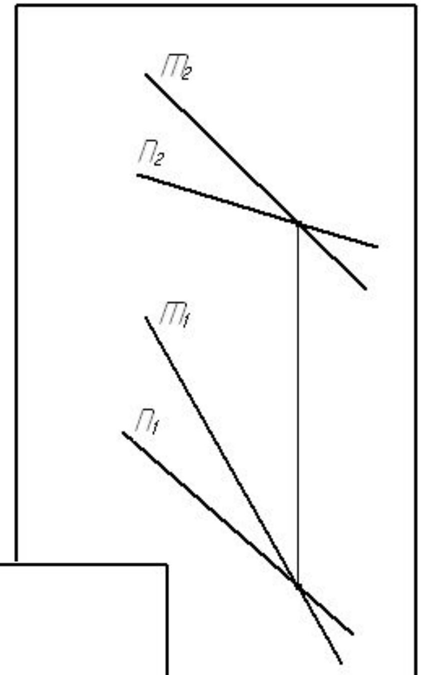
Плоскость

Плоскость это один из видов поверхности – плоская поверхность.

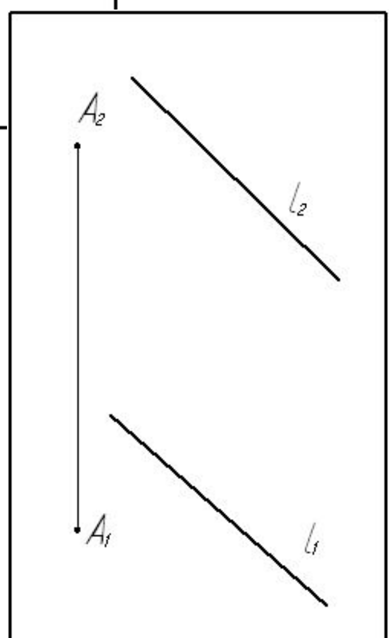
Способы задания плоскости



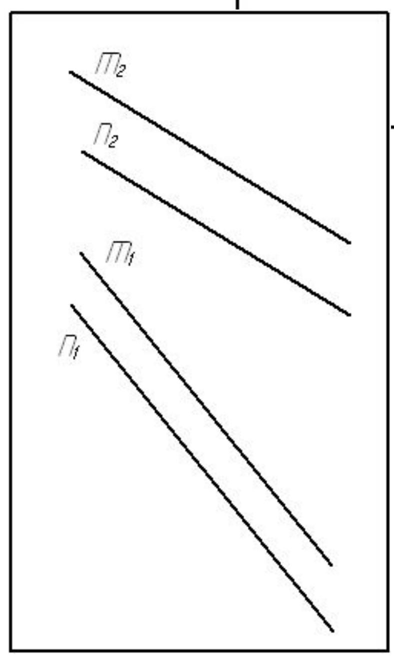
Г(A,B,C)



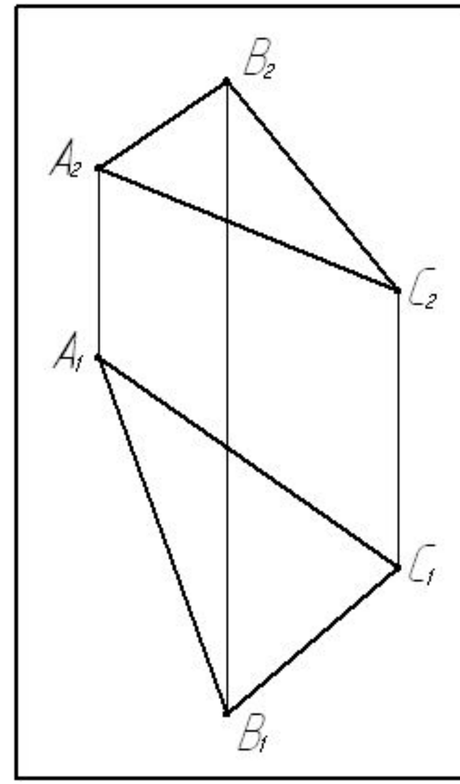
Σ(m∩n)



T(A,*l*)

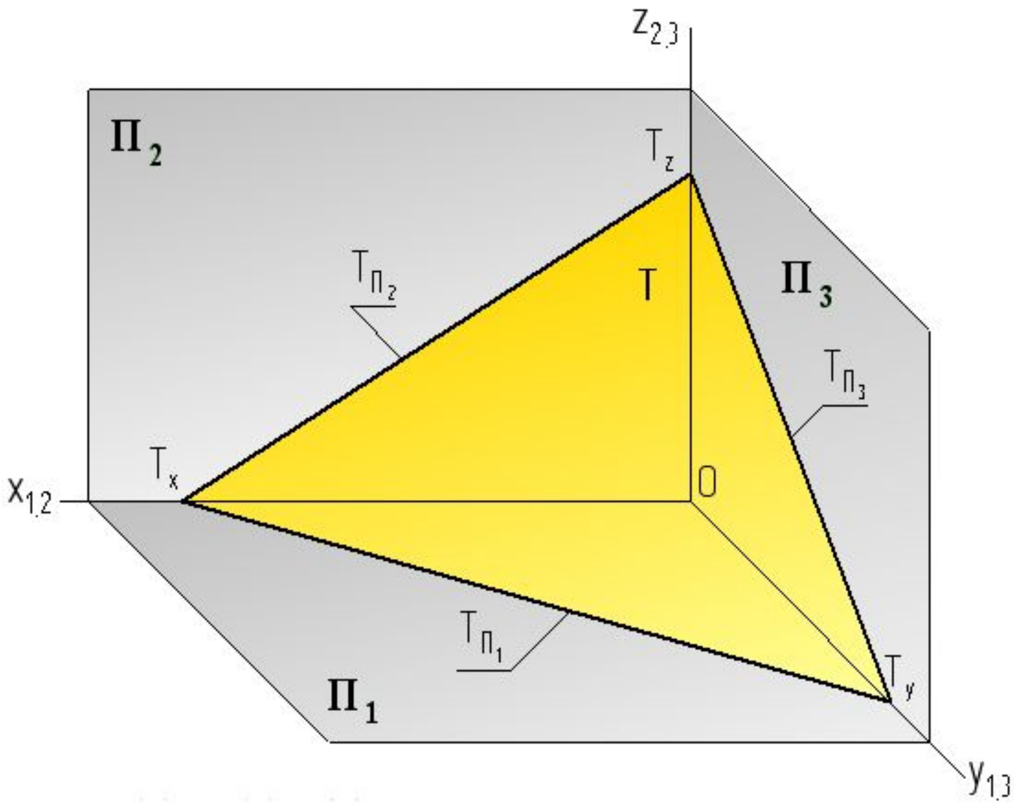


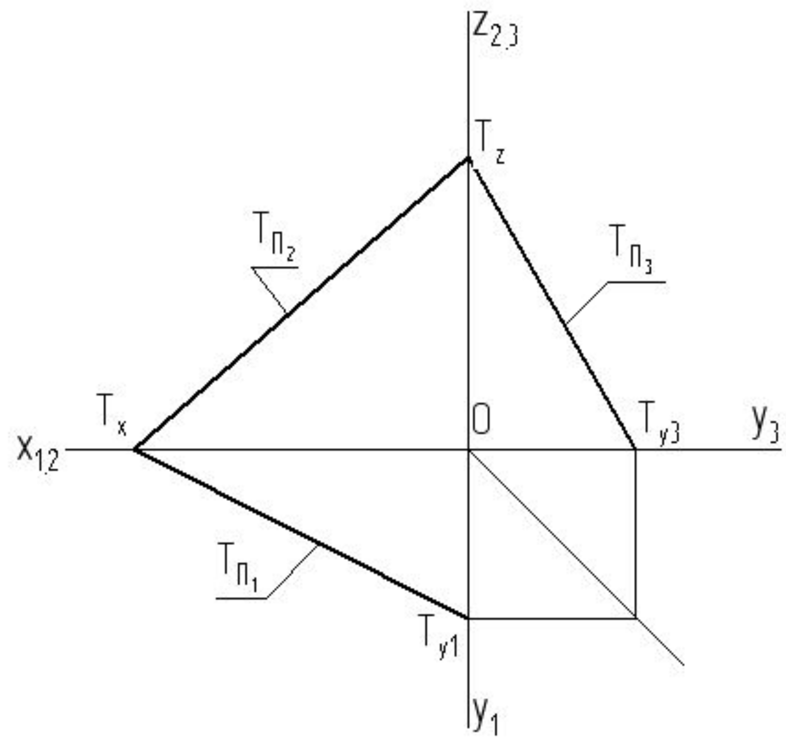
Ω(n || m)



Δ(∆ABC)

Следы плоскости

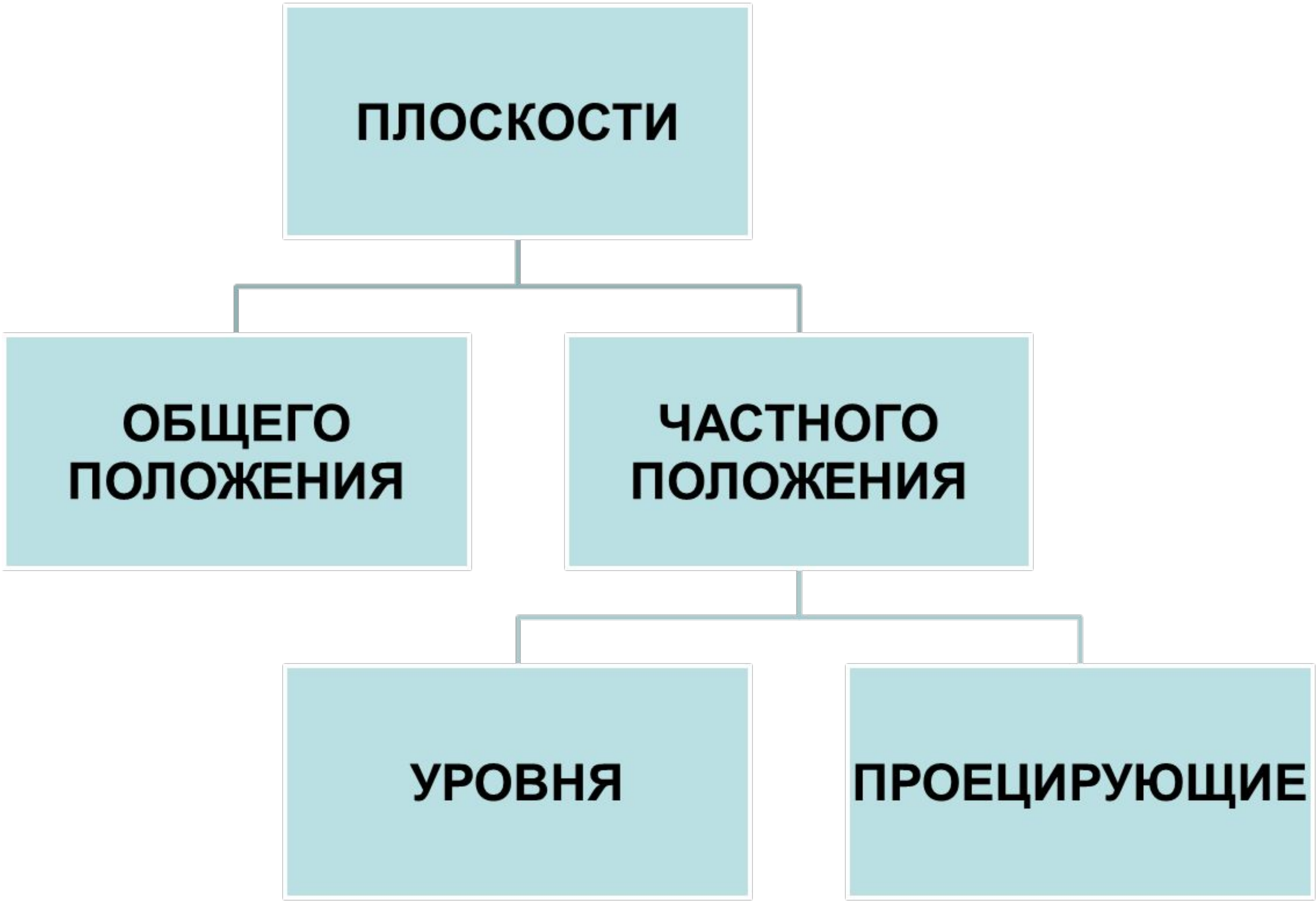




<u>След плоскости</u> – прямая, по которой плоскость пересекается с какой-либо плоскостью проекций - $T_{П1}$, $T_{П2}$, $T_{П3}$.

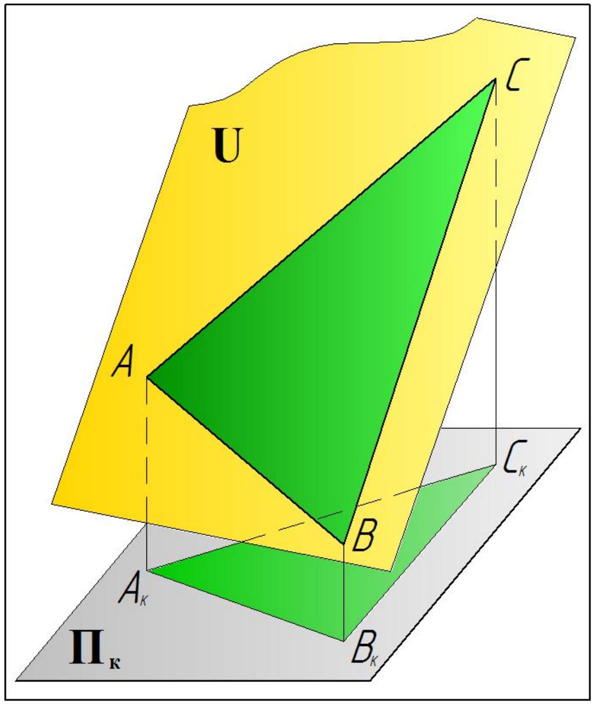
Точки пересечения плоскости с осями координат называются <u>точками схода следов</u> – T_x, T_y, T_z.

Положение плоскости относительно плоскостей проекций



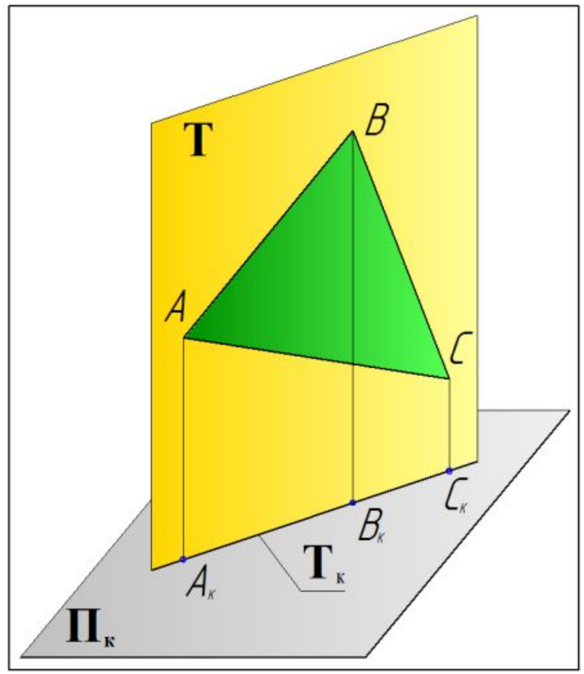
Общее положение

Частное положение



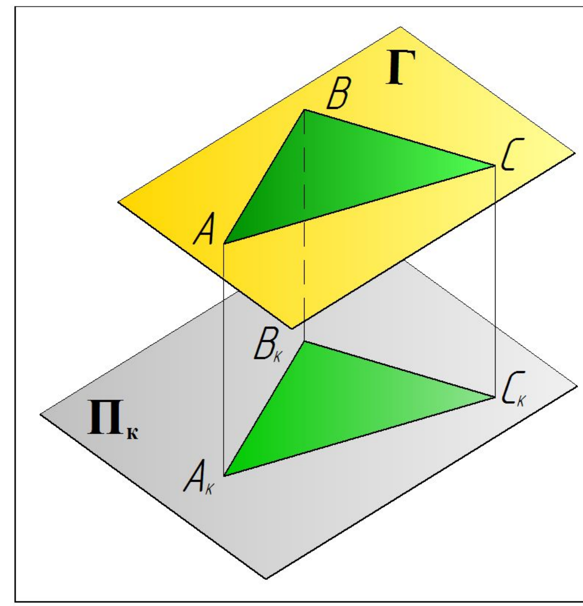
$U \nparallel П_к \wedge U \not\perp П_к$

Проецирующая плоскость



$Т \perp П_к$

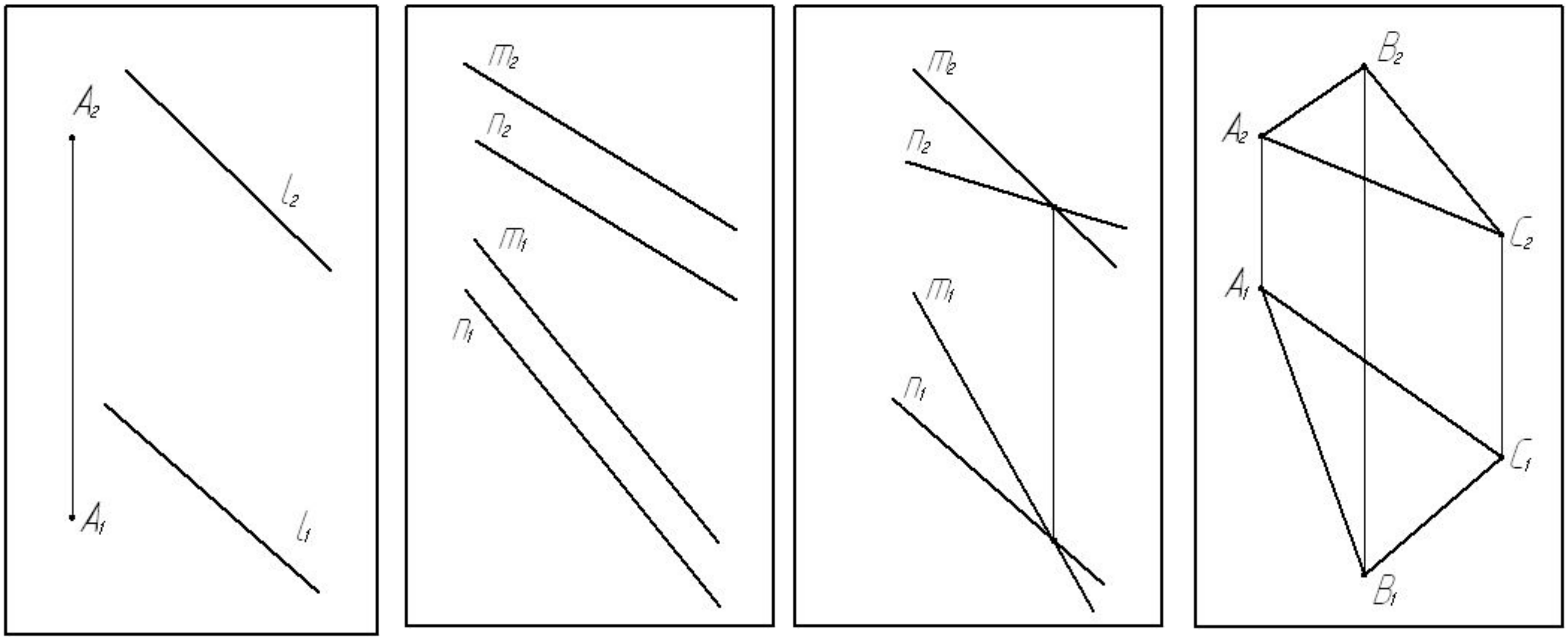
Плоскость уровня



$Г \parallel П_к$

Плоскость общего положения

Плоскость непараллельная и неперпендикулярная плоскостям проекций



Ни одна из проекций плоскости не имеет форму прямой линии

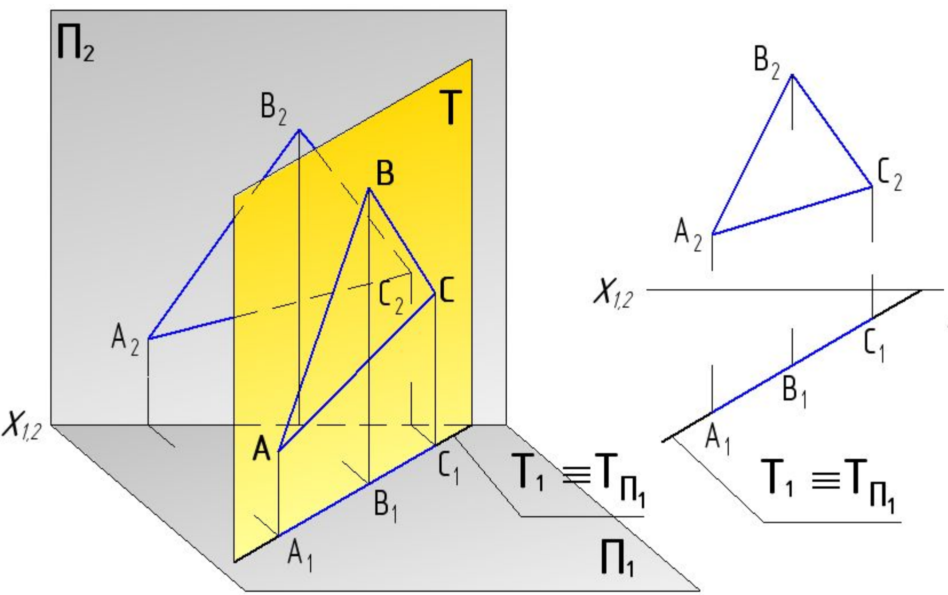
Плоскости частного положения

Проецирующие плоскости

Это плоскости перпендикулярные одной из плоскостей проекций

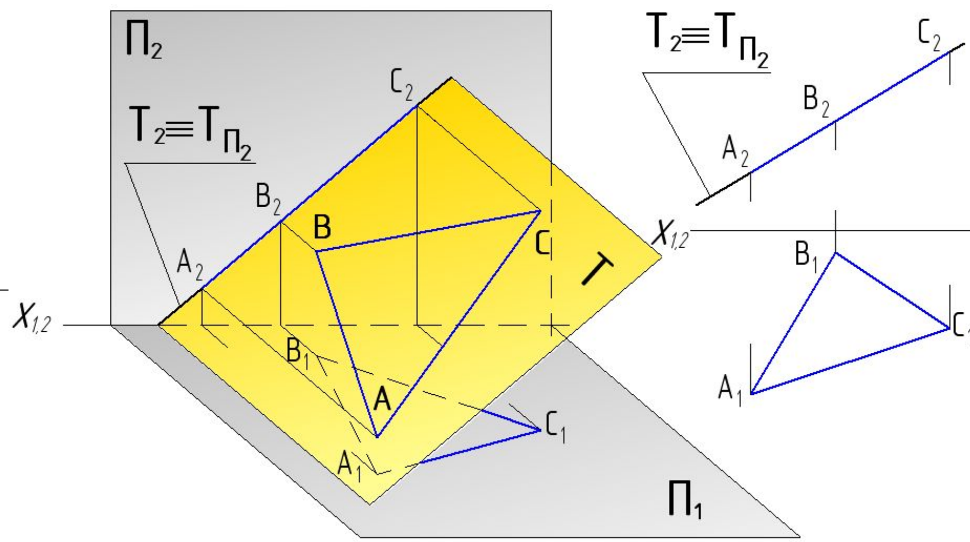
Горизонтально-проецирующая

$T \perp$



Фронтально-проецирующая

$T \perp$



T_1 – прямая и $T_1 \equiv T_{П^1}$

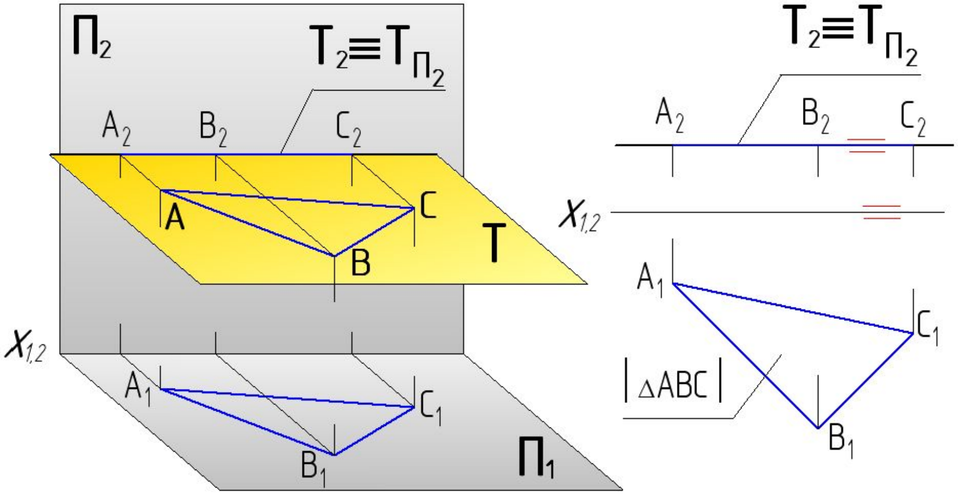
T_2 – прямая и $T_2 \equiv T_{П^2}$

Плоскости уровня

Это плоскости параллельные одной из плоскостей проекций

Горизонтальная плоскость

$\Gamma \parallel \Pi_1$



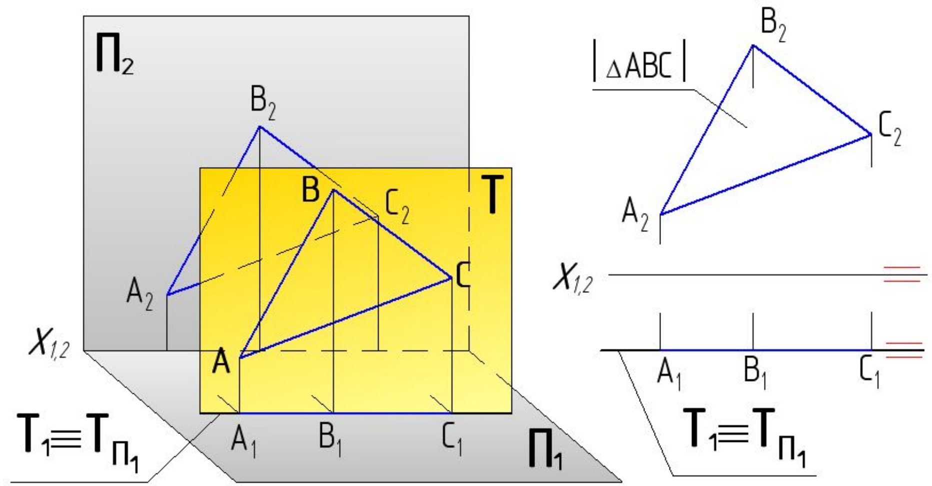
Γ_2 – прямая и $\Gamma_2 \equiv \Gamma_{\Pi^2}$

и $\Gamma_2 \parallel x_{1,2}$

$\Delta ABC \subset T \Rightarrow \Delta ABC \parallel \Pi_1 \Rightarrow A_1B_1C_1 \cong$ ABC

Фронтальная плоскость

$T \parallel \Pi_2$



T_1 – прямая и $T_1 \equiv T_{\Pi^1}$

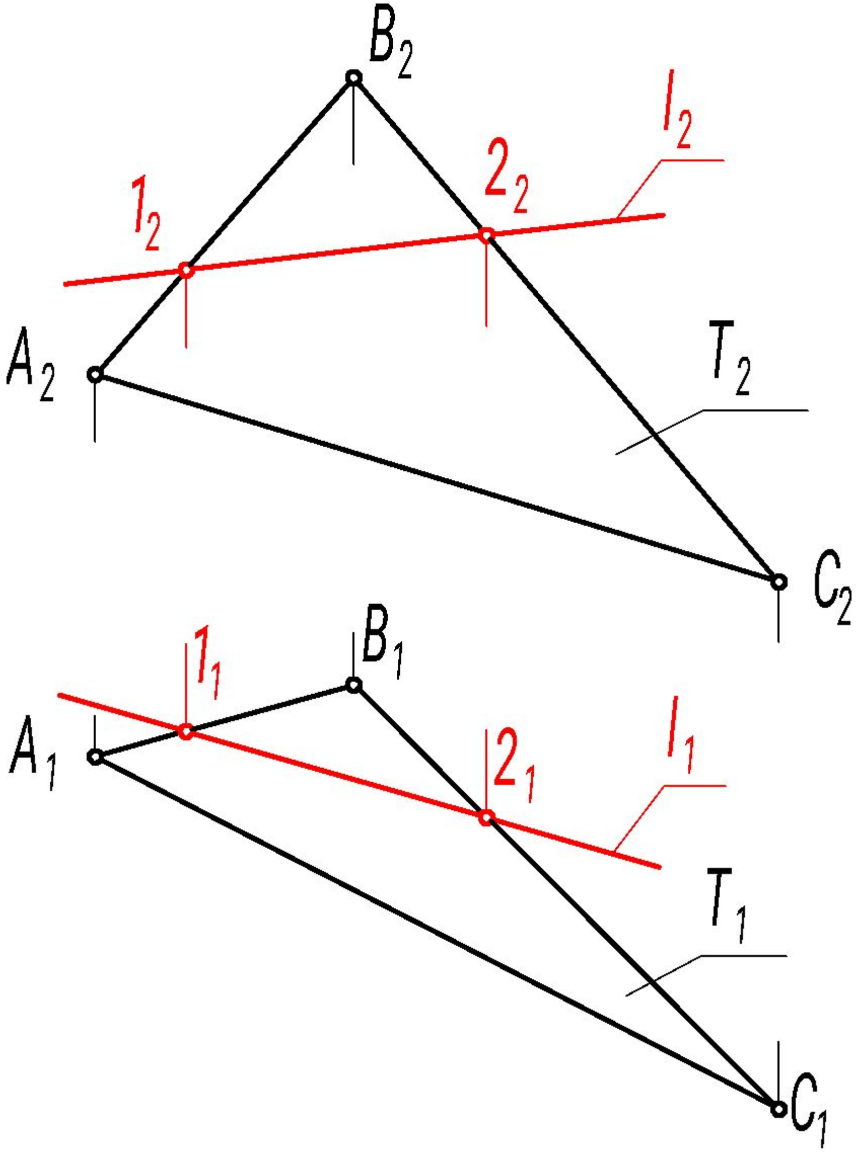
и $T_1 \parallel x_{1,2}$

$\Delta ABC \subset T \Rightarrow \Delta ABC \parallel \Pi_2 \Rightarrow A_2B_2C_2 \cong$ ABC

Вывод:

У плоскости частного положения одна из проекций обязательно имеет форму прямой линии.

Прямая на плоскости



Прямая принадлежит плоскости, если две точки прямой принадлежат этой плоскости.

$\boldsymbol{l}\,(1,2) \subset \boldsymbol{T} \Leftrightarrow (1 \in \boldsymbol{T}) \wedge (2 \in \boldsymbol{T})$

Принимаем: плоскость ***T***(∆ABC).

Построить $\boldsymbol{l} \subset \boldsymbol{T}$.

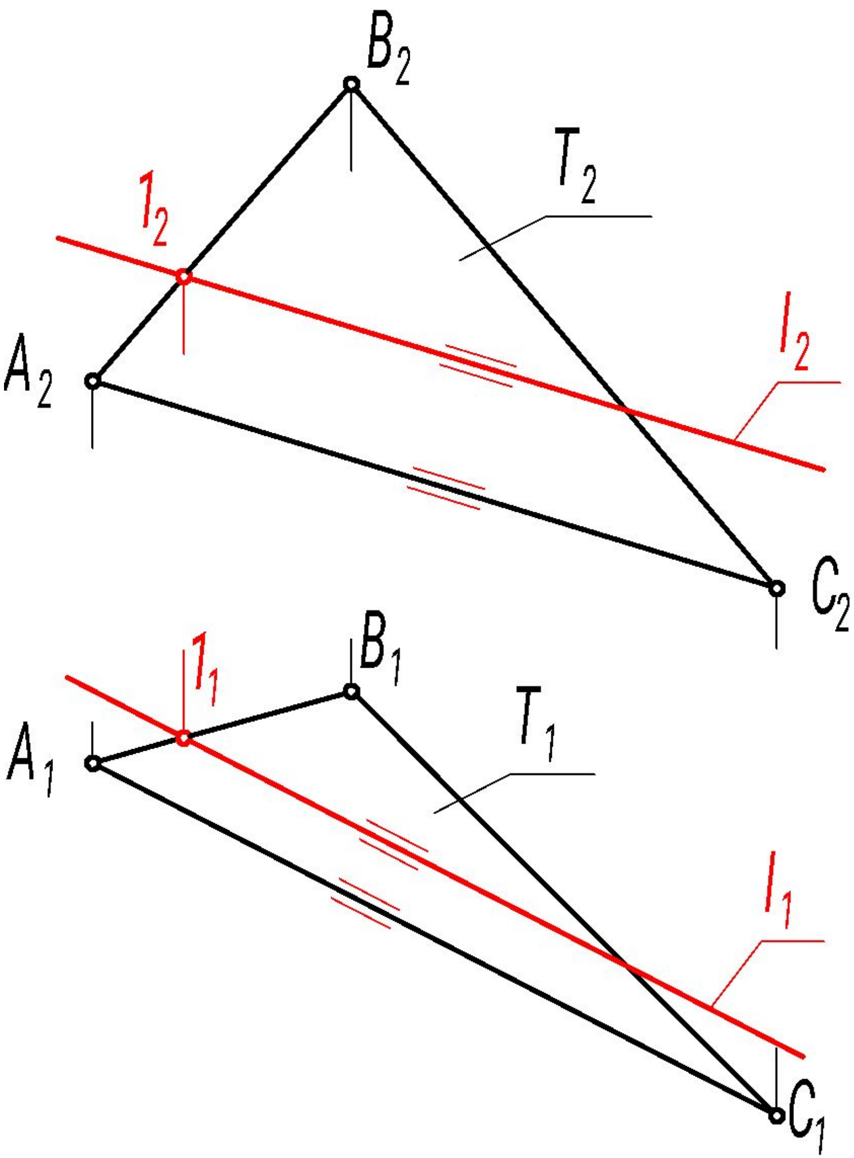
Первый вариант

Задаем:

точка 1 принадлежит стороне АВ,

точка 2 принадлежит стороне ВС.

$(1 \in AB) \wedge (2 \in BC)$



Второй вариант

Задаем: точка 1 принадлежит стороне AB, а точка 2 принадлежит стороне AC, но является несобственной точкой.

$$(1 \in AB)\ ;\ (2 \in AC;\ 2 \equiv 2^{\infty})$$

Следовательно, прямая $\boldsymbol{l}$ параллельна стороне AC. $(\boldsymbol{l} \parallel AC)$

Т.е. прямая задается одной точкой и направлением

$$\boldsymbol{l}\,(1,s) \Rightarrow 1 \in \boldsymbol{l} \wedge \boldsymbol{l} \parallel s$$

В качестве направления может быть выбрана любая прямая, принадлежащая плоскости.

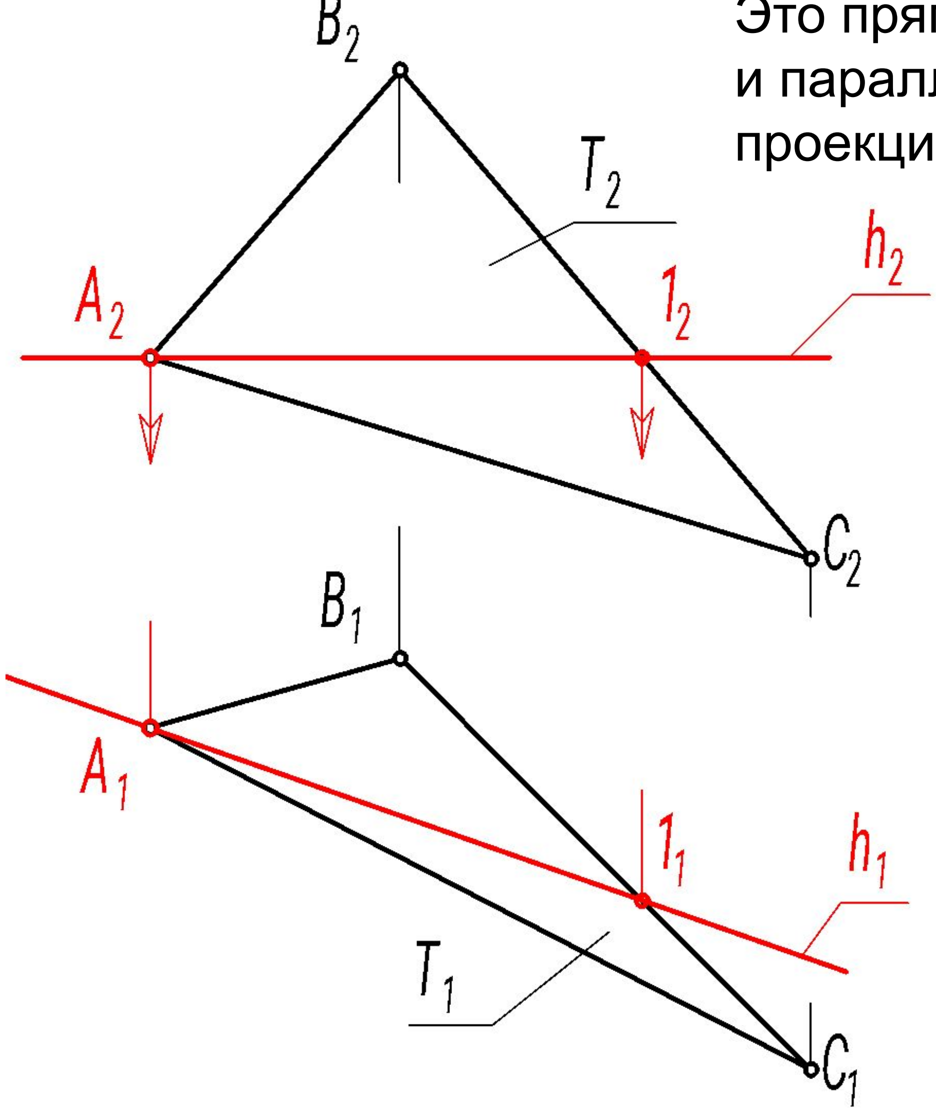
В нашем примере $s \equiv AC$, т.е. $\boldsymbol{l} \parallel AC$

Главные линии плоскости

К главным линиям плоскости относятся прямые уровня - горизонталь, фронталь, профильная прямая, и линии наибольшего наклона плоскости.

Прямые уровня плоскости

Горизонталь плоскости



Это прямая, принадлежащая плоскости,
и параллельная горизонтальной плоскости проекций

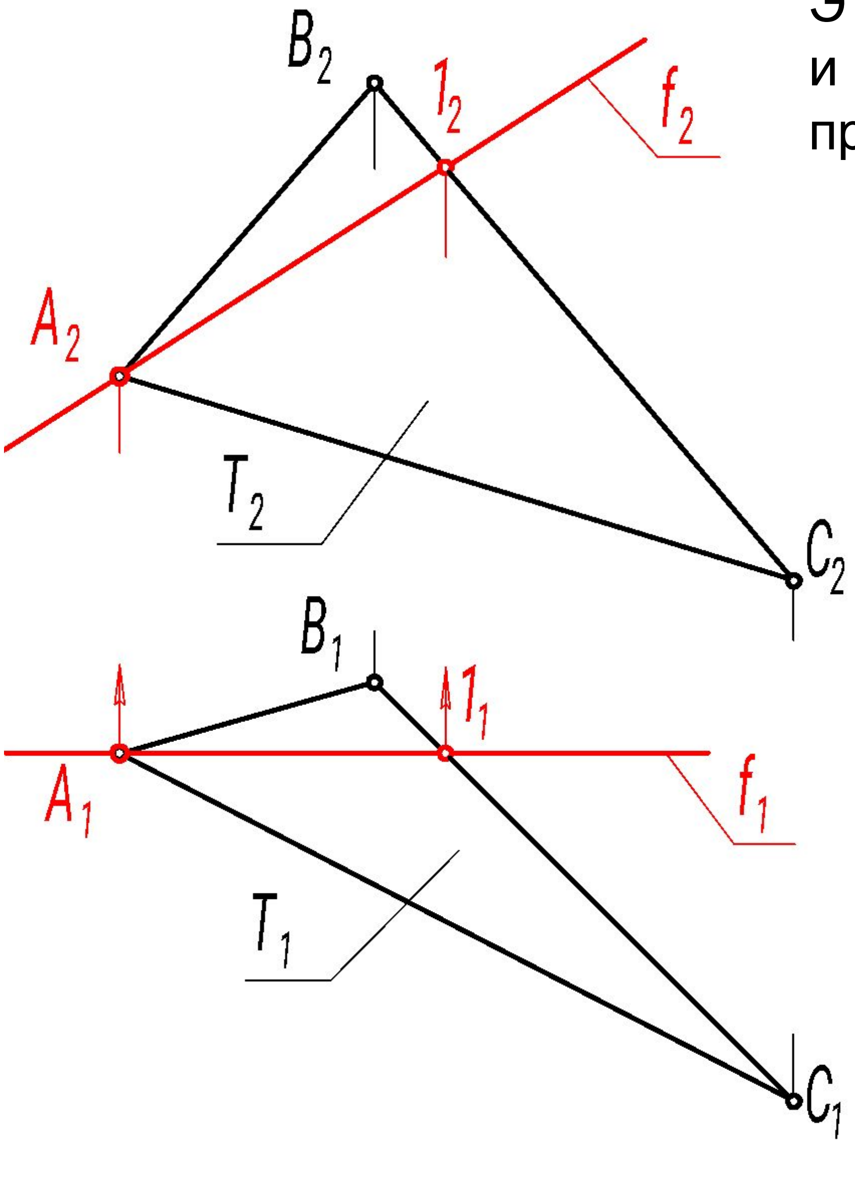
Плоскость $\boldsymbol{T}(\Delta ABC)$

Построить $\boldsymbol{h} \subset \boldsymbol{T}$

$\boldsymbol{h} \parallel \boldsymbol{\Pi_1} \Rightarrow \boldsymbol{h_2} \parallel \boldsymbol{x_{1,2}}$

Задаем $\boldsymbol{h}\ (A,1)$

Фронталь плоскости



Это прямая, принадлежащая плоскости, и параллельная фронтальной плоскости проекций

Плоскость $\boldsymbol{T}(\Delta \mathrm{ABC})$

Построить $f \subset T$

$f \parallel \Pi_2 \Rightarrow f_1 \parallel x_{1,2}$

Задаем $f(A,1)$

Линии наибольшего наклона плоскости

Данные линии применяются для определения величины угла наклона плоскости к какой-либо плоскости проекций.

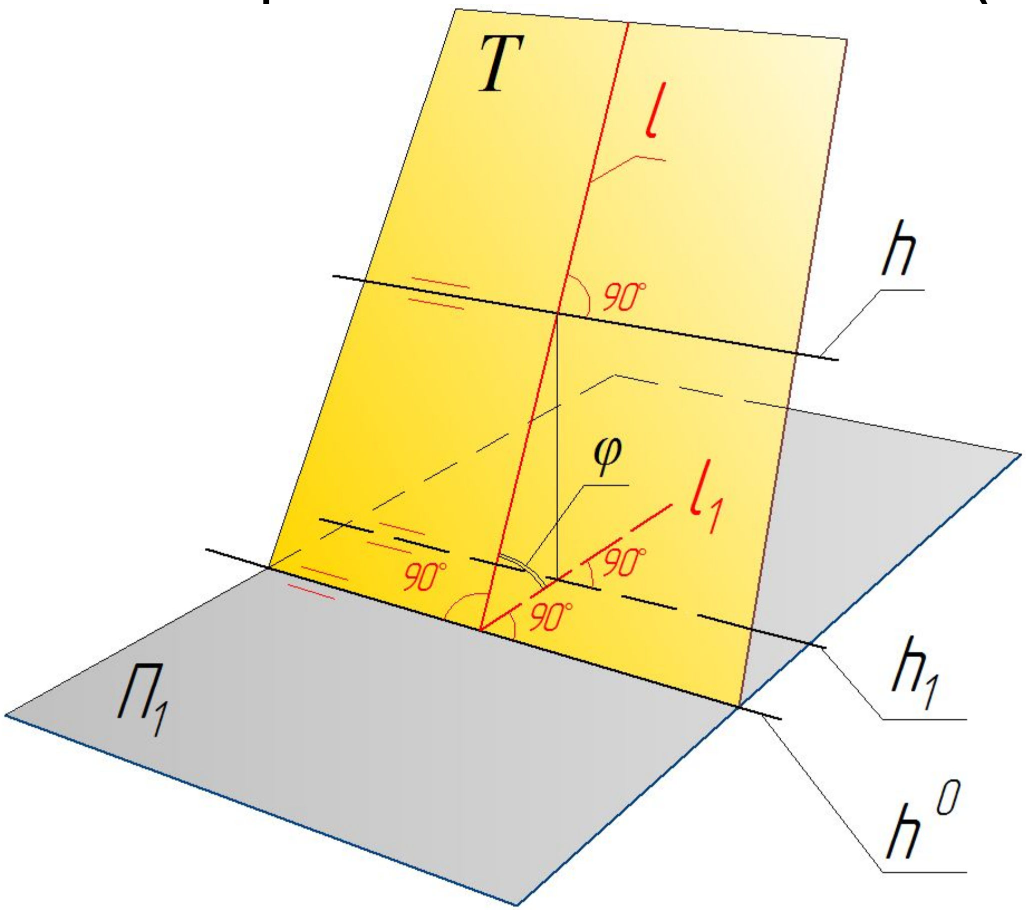
В частности, линия наибольшего наклона плоскости, используемая <u>для определения угла наклона к горизонтальной плоскости проекций</u>, получила название <u>линии наибольшего ската плоскости</u>.

Линия наибольшего ската плоскости

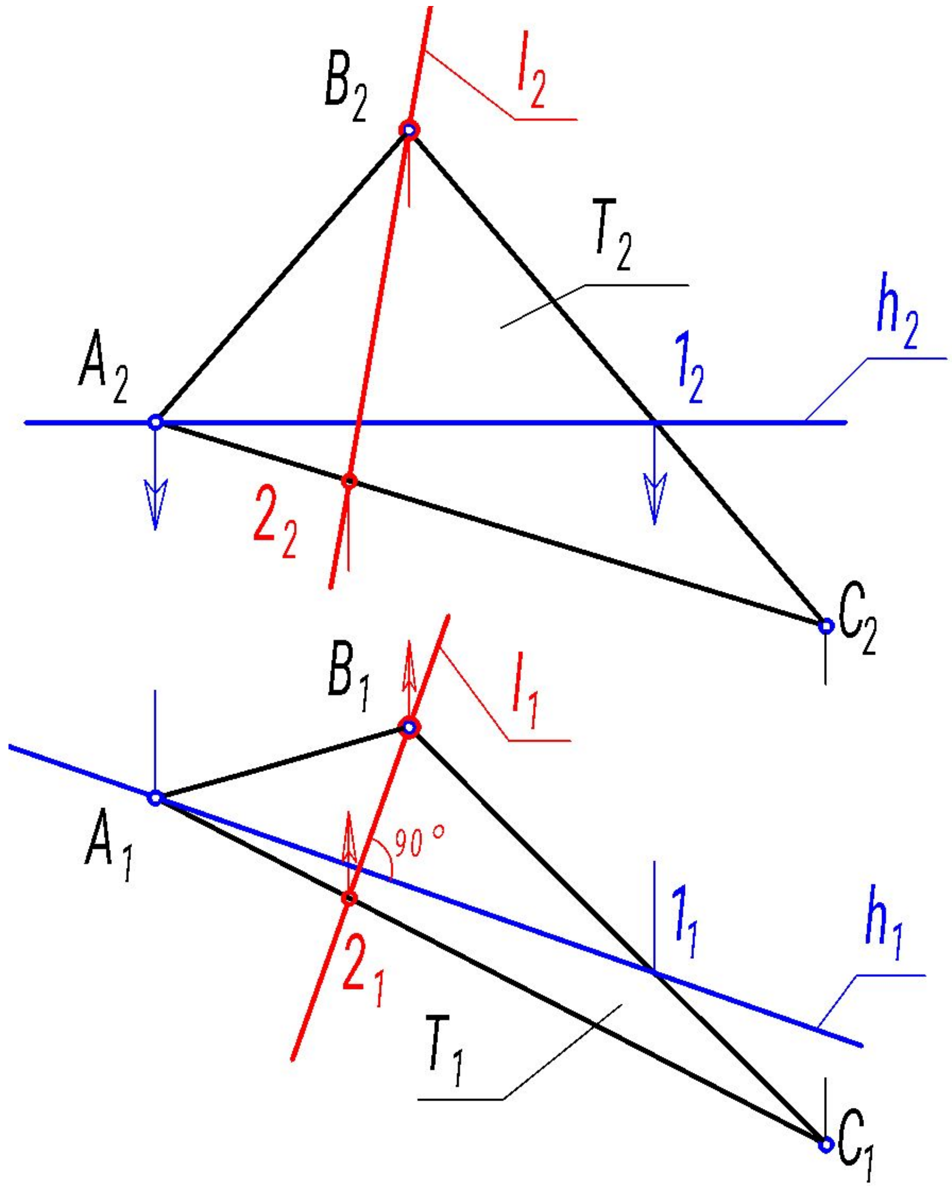
T – плоскость общего положения.

l – линия наибольшего ската плоскости ***T***, прямая общего положения ($l \subset \mathrm{T}$; $l \not\perp \Pi_1$; $l \not\perp \Pi_2$).

h – горизонталь плоскости ***T*** ($h \subset \mathrm{T}$).



$$\left.\begin{array}{l} l \perp h \\ h \parallel \Pi_1 \\ l \not\perp \Pi_1 \end{array}\right] \Rightarrow l_1 \perp h_1$$



Плоскость ***T***(∆ABC)

Построить проекции линии наибольшего ската ***l*** плоскости ***T***.

Так как $\boldsymbol{l} \subset \boldsymbol{T}$, то задаем

$\boldsymbol{l}$(B,2) ; $2 \in AC$

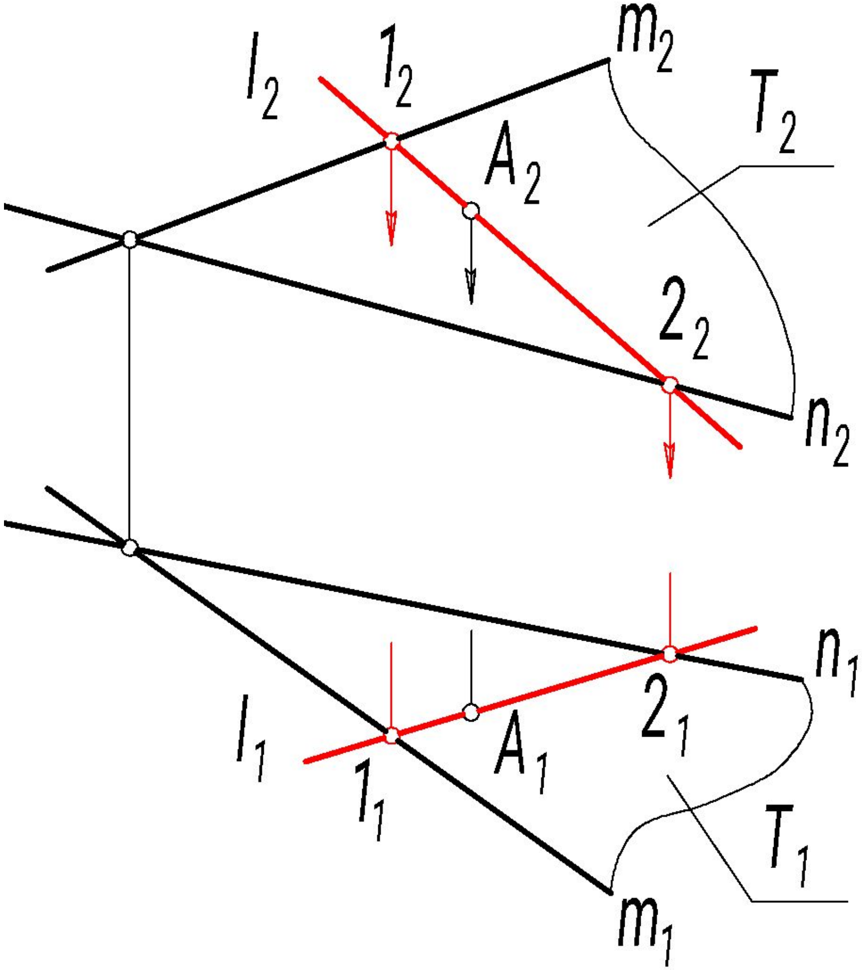
Строим $\boldsymbol{l_1} \perp \boldsymbol{h_1}$

Точка на плоскости

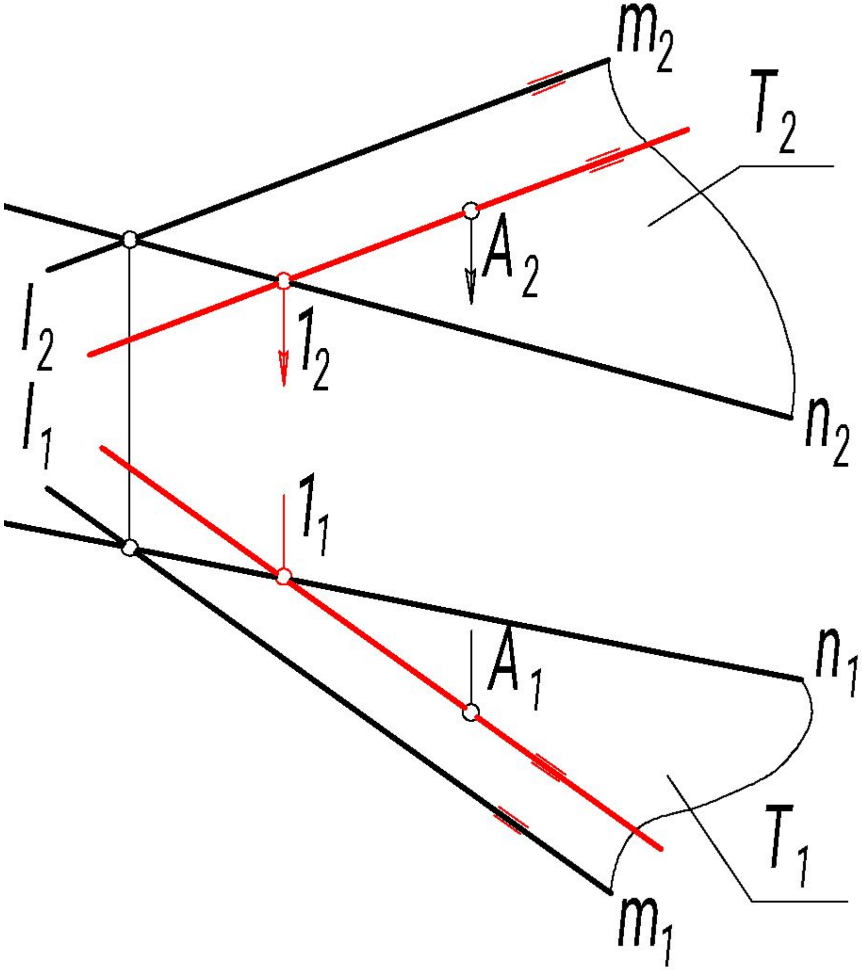
Точка принадлежит плоскости, если она принадлежит прямой, принадлежащей этой плоскости

$$\mathbf{A} \in \mathbf{\Phi} \Leftrightarrow \mathbf{A} \in \boldsymbol{l}, \boldsymbol{l} \subset \mathbf{\Phi}$$

$\boldsymbol{A} \in \boldsymbol{l}$; $\boldsymbol{l}$ (1,2) $\subset \boldsymbol{T}$; задаем ($1 \in \boldsymbol{m}$) ; ($2 \in \boldsymbol{n}$)

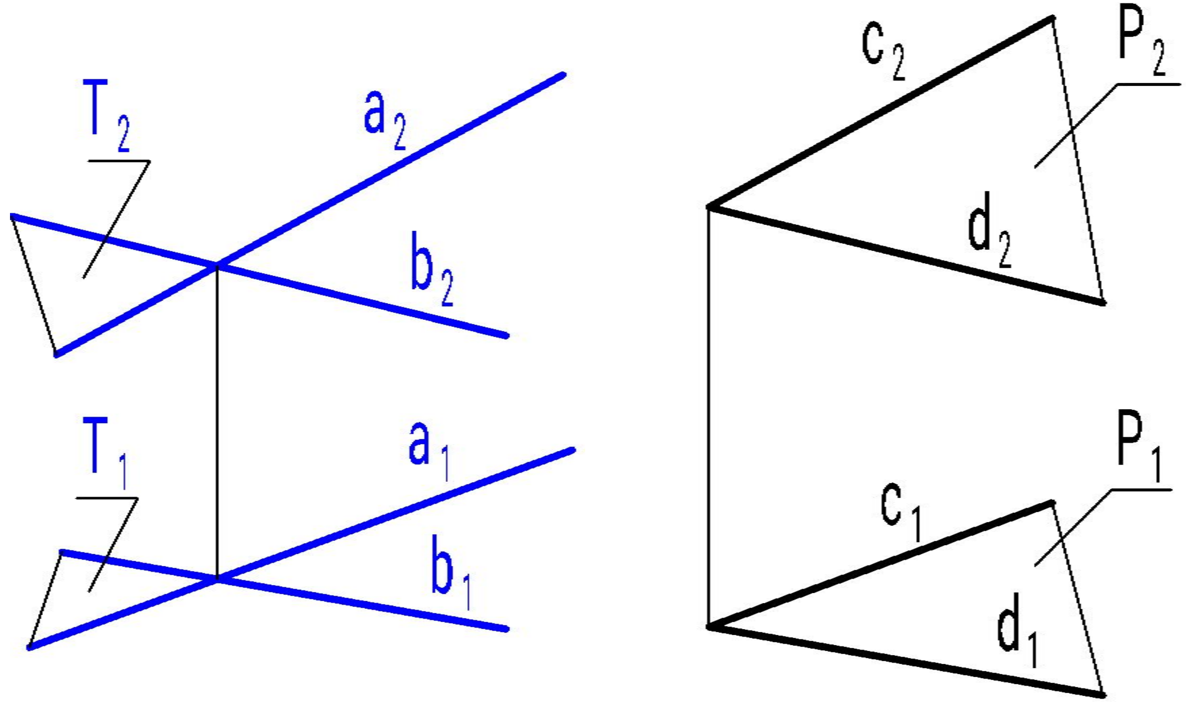


$\boldsymbol{A} \in \boldsymbol{l}$; $\boldsymbol{l}$ (1,s); задаем ($1 \in \boldsymbol{n}$) ; ($\boldsymbol{l} \parallel \boldsymbol{m}$)



Взаимное положение двух плоскостей

Параллельные плоскости

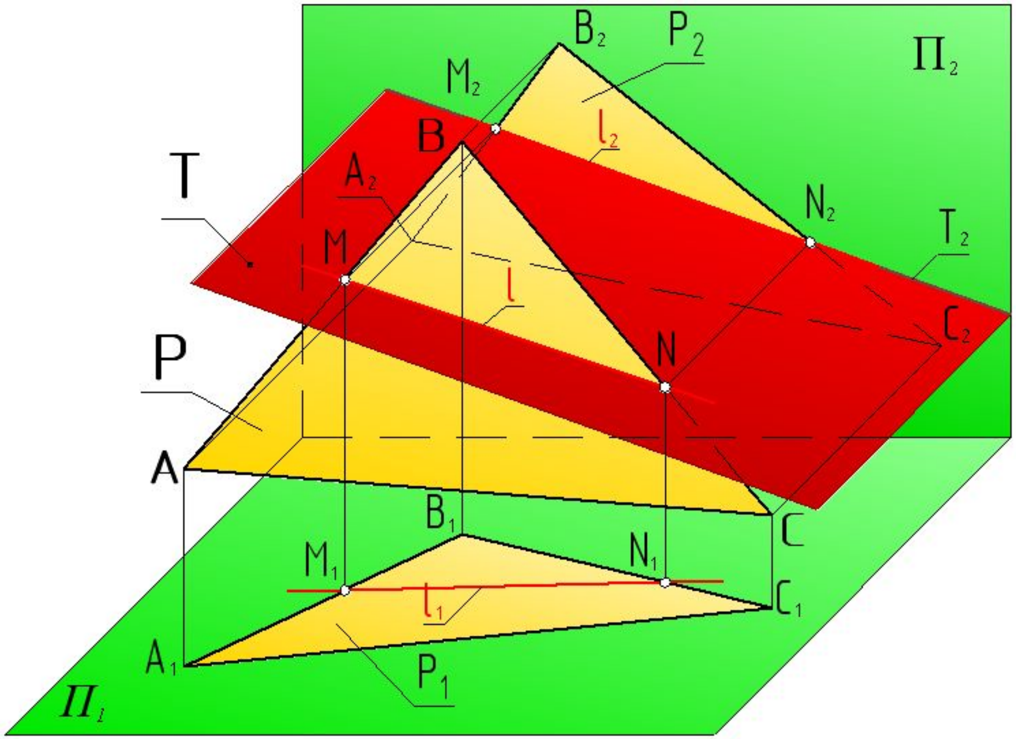


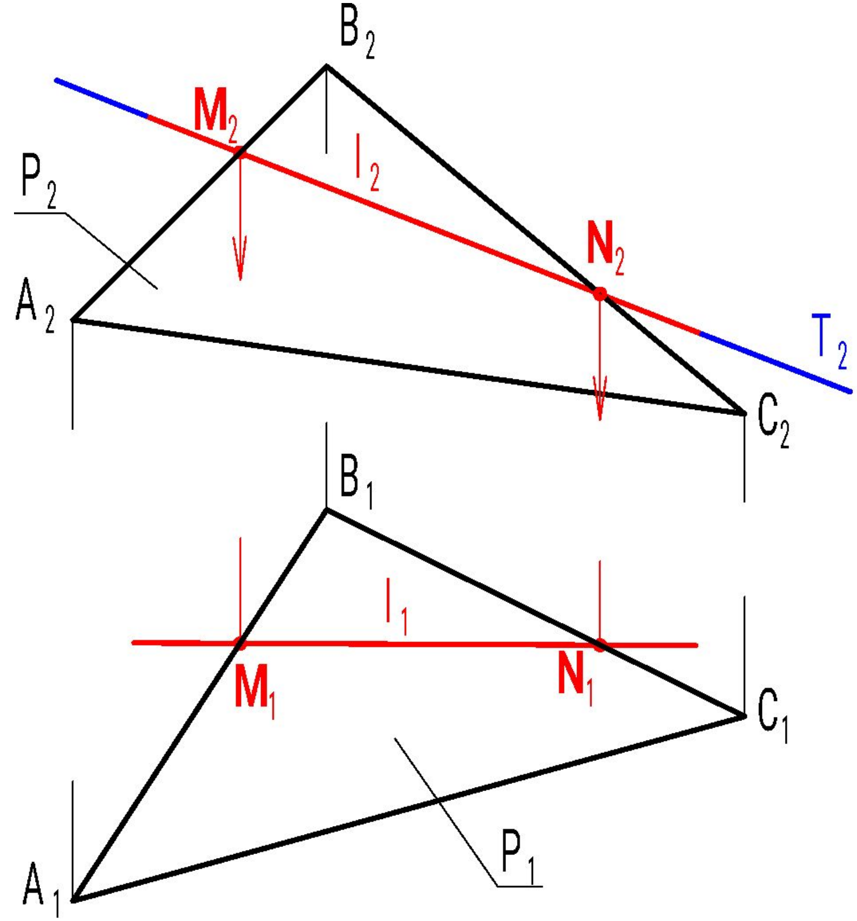
Две плоскости параллельны, если две пересекающиеся прямые одной плоскости соответственно параллельны двум пересекающимся прямым другой плоскости.

$$T(a \cap b);$$
$$P(c \cap d);$$
$$a \parallel c;\ b \parallel d;$$
$$\Rightarrow T \parallel P$$

Пересекающиеся плоскости

Частный случай: одна из двух пересекающихся плоскостей плоскость частного положения – **T** фронтально-проецирующая.





$T \cap P(\Delta ABC) = l$

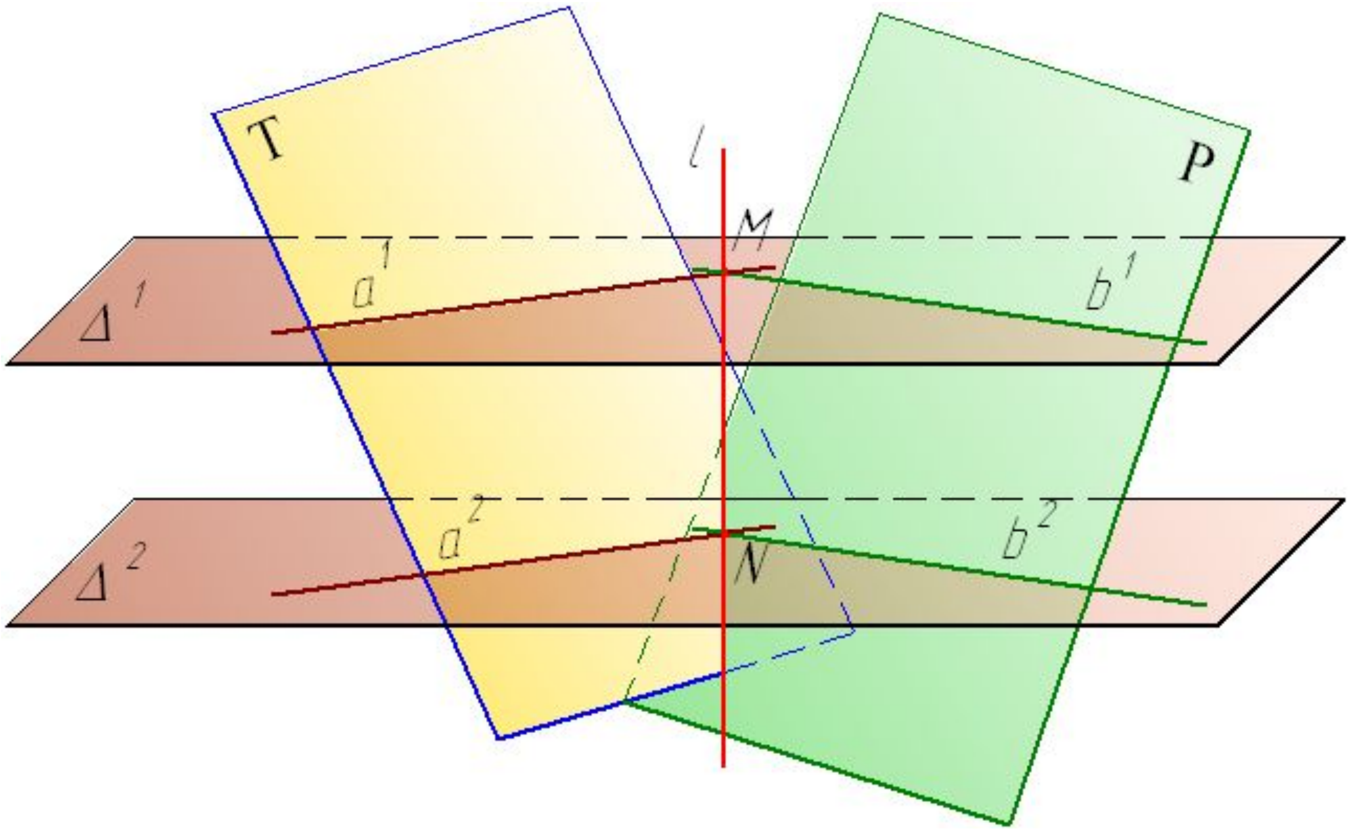
$\Rightarrow l \subset T$ и $l \subset P(\Delta ABC)$

$l(M,N)$

$M = T \cap AB;\ N = T \cap BC$

$T \perp \Pi_2 \Rightarrow T_2$ – *прямая* $\Rightarrow (M_2N_2 \equiv T_2)$

<u>Общий случай:</u> Заданы две плоскости **Т** и **Р** общего положения.



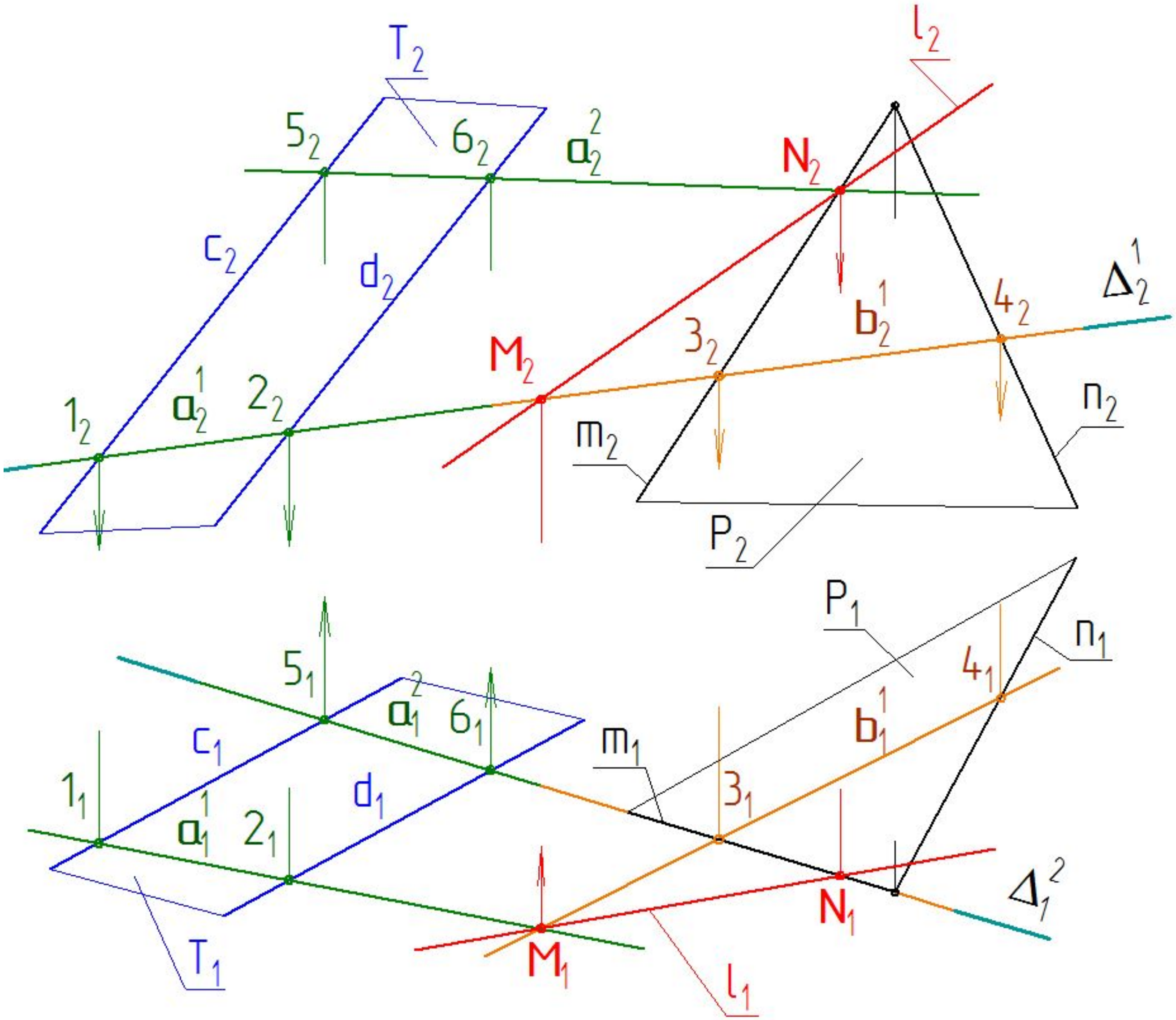
$T \cap P = l(M,N)$

Точки M и N могут быть определены как точки пересечения трех плоскостей

M=Т ∩ P ∩ Δ^1; N=Т ∩ P ∩ Δ^2

Δ^1 и Δ^2 – вспомогательные секущие плоскости - проецирующие.

$\Delta^1 \cap T = a^1$ и $\Delta^1 \cap P = b^1 \Rightarrow a^1 \cap b^1 = M$ $\Delta^2 \cap T = a^2$ и $\Delta^2 \cap P = b^2 \Rightarrow a^2 \cap b^2 = N$



$\Delta^1 \perp \Pi_2$

$\Delta^2 \perp \Pi_1 \; m \subset \Delta^2 \Rightarrow m_1 \equiv \Delta_1^2$

$\Rightarrow \Delta^2 \cap P = m$

$\Delta^2 \cap T = a^2$

$\Rightarrow N = m \cap a^2$

Взаимное положение прямой линии и плоскости

Прямая по отношению к плоскости может занимать следующие положения:

- Принадлежать;
- Быть параллельной;
- Пересекать;
- Быть перпендикулярной.

Прямая параллельна плоскости, если она параллельна какой-либо прямой, принадлежащей этой плоскости.

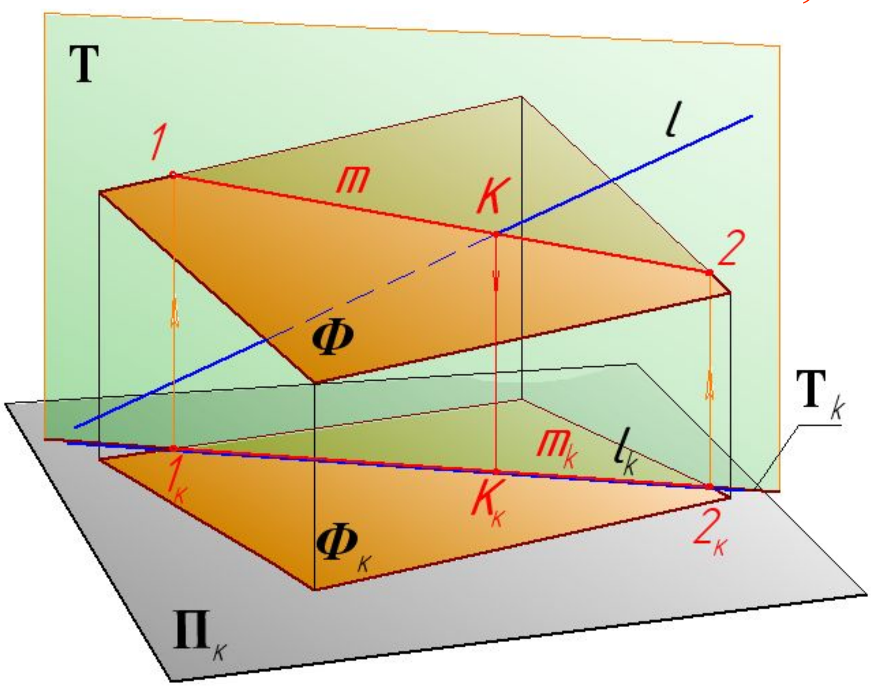
$$l \parallel \Phi \Leftrightarrow l \parallel m\ ;\ \ m \subset \Phi$$

Прямая пересекает плоскость, если она пересекает какую-либо прямую, принадлежащую этой плоскости.

$$l \cap \Phi \Leftrightarrow l \cap m\ ;\ \ m \subset \Phi$$

Прямая принадлежит плоскости, если она тождественна какой-либо прямой, принадлежащей этой плоскости.

$$l \subset \Phi \Leftrightarrow l \equiv m\ ;\ \ m \subset \Phi$$



Если $\left[\begin{array}{l} l \parallel m \\ l \cap m\,, \\ l \equiv m \end{array}\right.$ то $l \subset T$ и $m \subset T$

Но $m \subset \Phi$, следовательно,

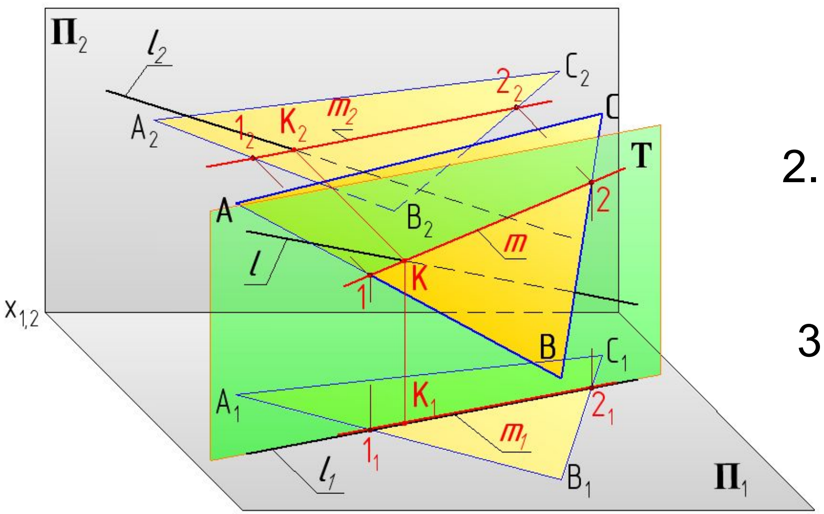
$m = \Phi \cap T$

T – вспомогательная плоскость

Если $T \perp \Pi_к$, то $l_к \equiv T_к \equiv m_к$

$m \subset \Phi$

Последовательность действий при определении взаимного положения прямой линии и плоскости



Пример. Заданы прямая $\boldsymbol{l}$ и плоскость $\boldsymbol{Ф(\Delta ABC)}$.

1. Одну из проекций заданной прямой $\boldsymbol{l}$, которую условно будем называть первой, совместить с одноименной проекцией вспомогательной прямой, например $\boldsymbol{m}$. Прямую $\boldsymbol{m}$ нужно рассматривать как принадлежащую заданной плоскости $\boldsymbol{Ф(\Delta ABC)}$.

   $l_k \equiv m_k$; $k = 1, 2$; $m \subset Ф\ (\Delta ABC)$

   На рисунке $l_1 \equiv m_1$

2. Построить недостающую (условно вторую) проекцию вспомогательной прямой $\boldsymbol{m}$.

   если $(m_1 \equiv l_1)$ то строиться m_2;

   если $(m_2 \equiv l_2)$ то строиться m_1.

3. На построенной (условно второй) проекции определить взаимное положение прямой $\boldsymbol{l}$ и вспомогательной прямой $\boldsymbol{m}$.

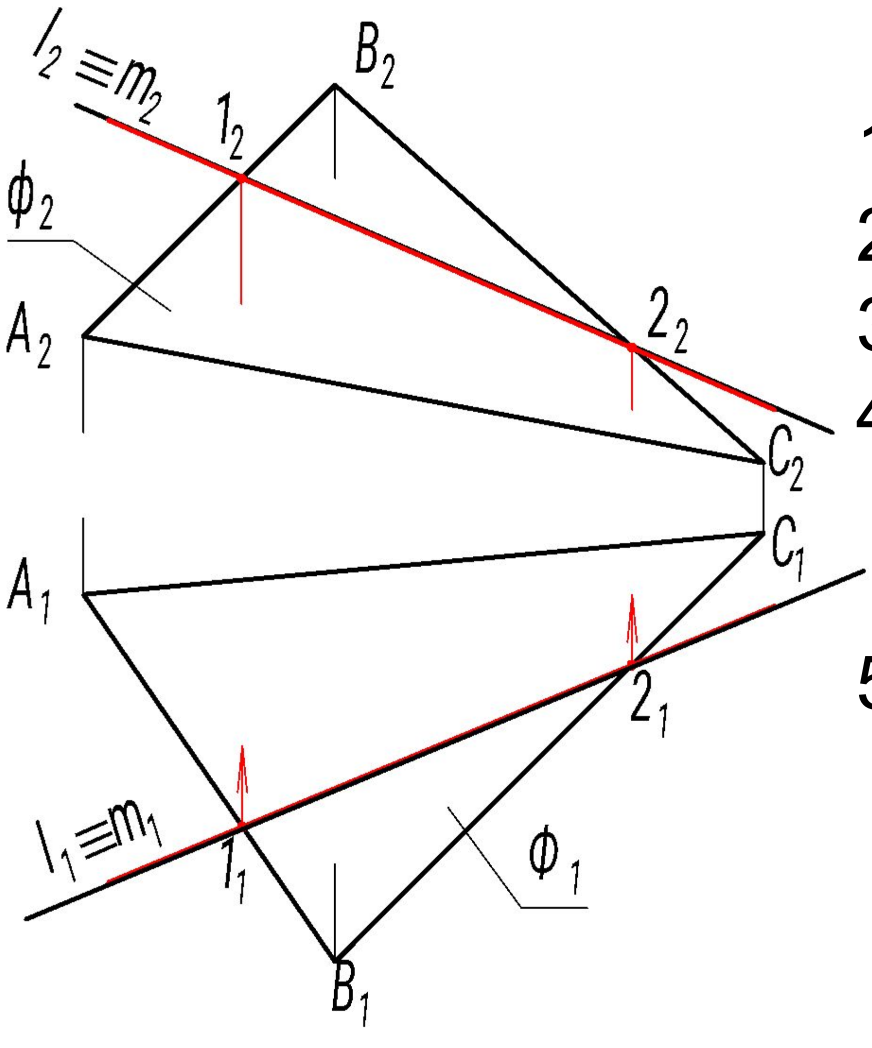
   если $(m \equiv l)$, то $l \subset Ф$,

   если $(m \parallel l)$, то $l \parallel Ф$,

   если $(m \cap l)$, то $l \cap Ф$

   На примере $(l \cap m = K,\ K = l \cap Ф\ )$.

Пример 1



1.Выбрано $l_1 \equiv m_1$

2. $m(1,2)$; $1 = m \cap AB$; $2 = m \cap BC$;

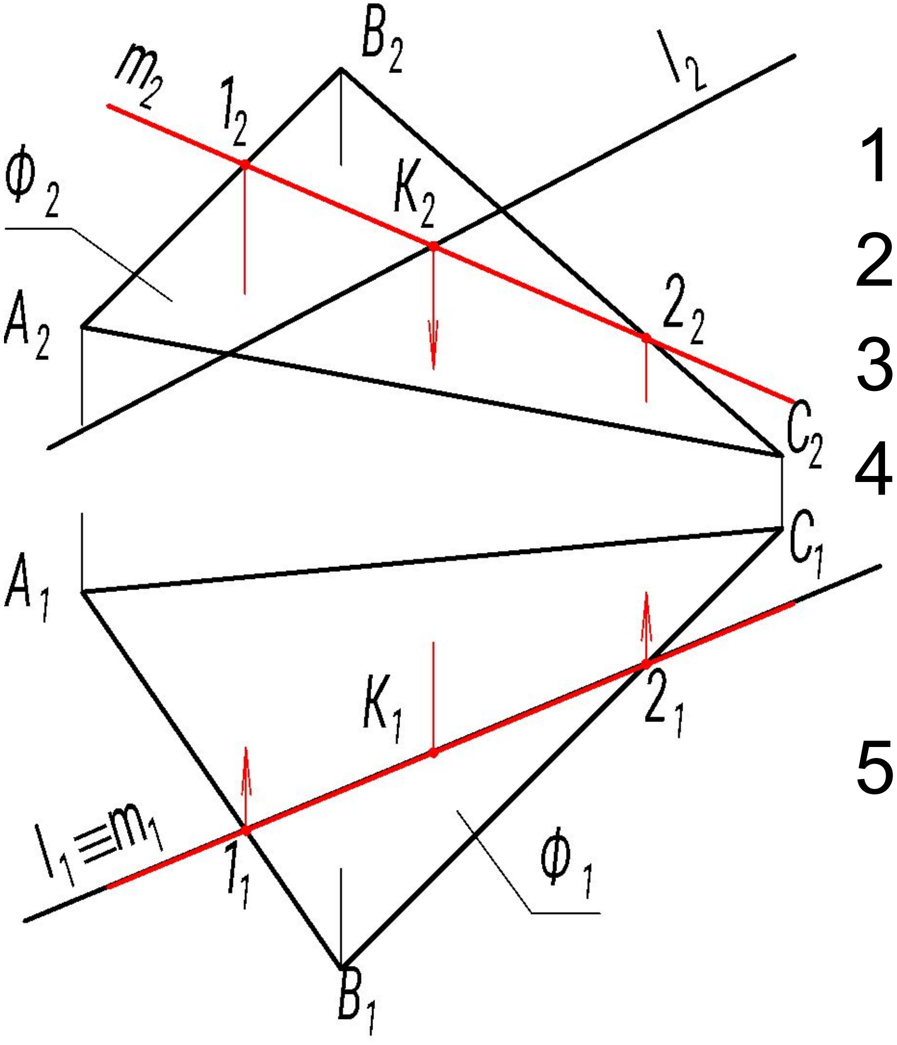
3. Строим m_2.

4. Определяем взаимное положение прямых m_2 и l_2

$m_2 \equiv l_2$

5. Следовательно, $l \subset \Phi$

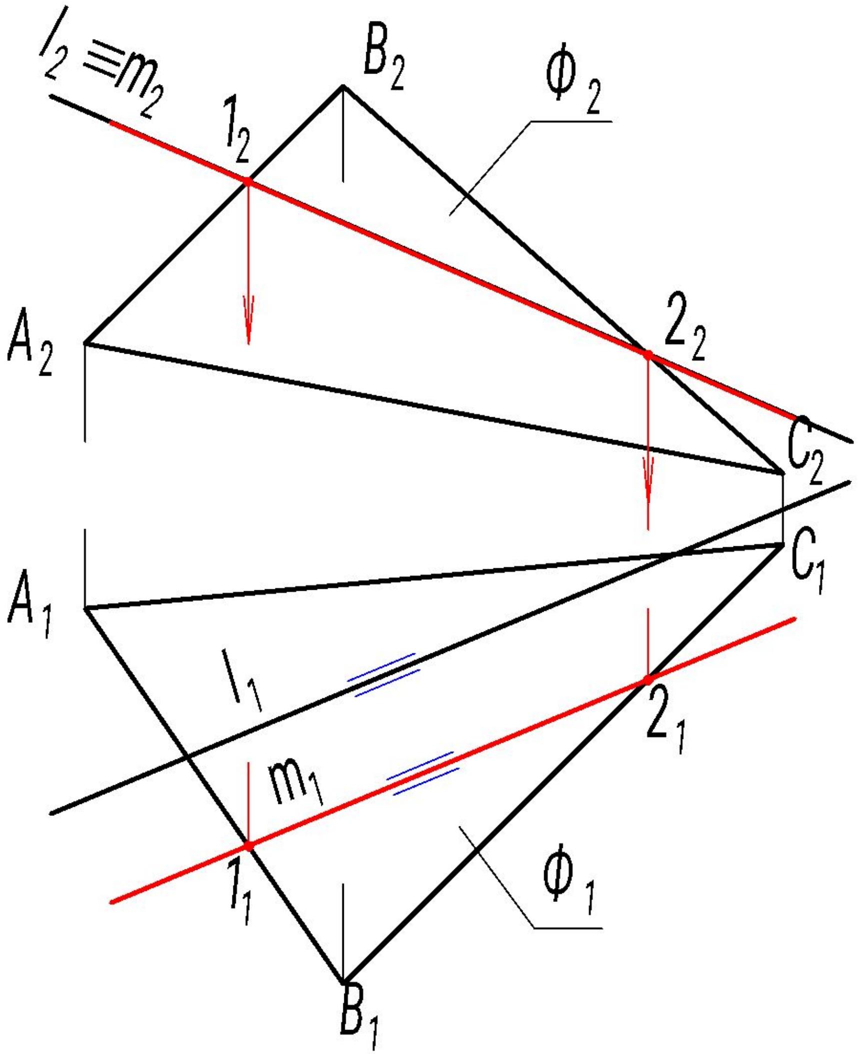
Пример 2



1. Выбрано $l_1 \equiv m_1$
2. $m(1,2)$; $1 = m \cap AB$; $2 = m \cap BC$;
3. Строим m_2.
4. Определяем взаимное положение прямых m_2 и l_2

   $m_2 \cap l_2 = K_2$
5. Следовательно, $l \cap \Phi = K$

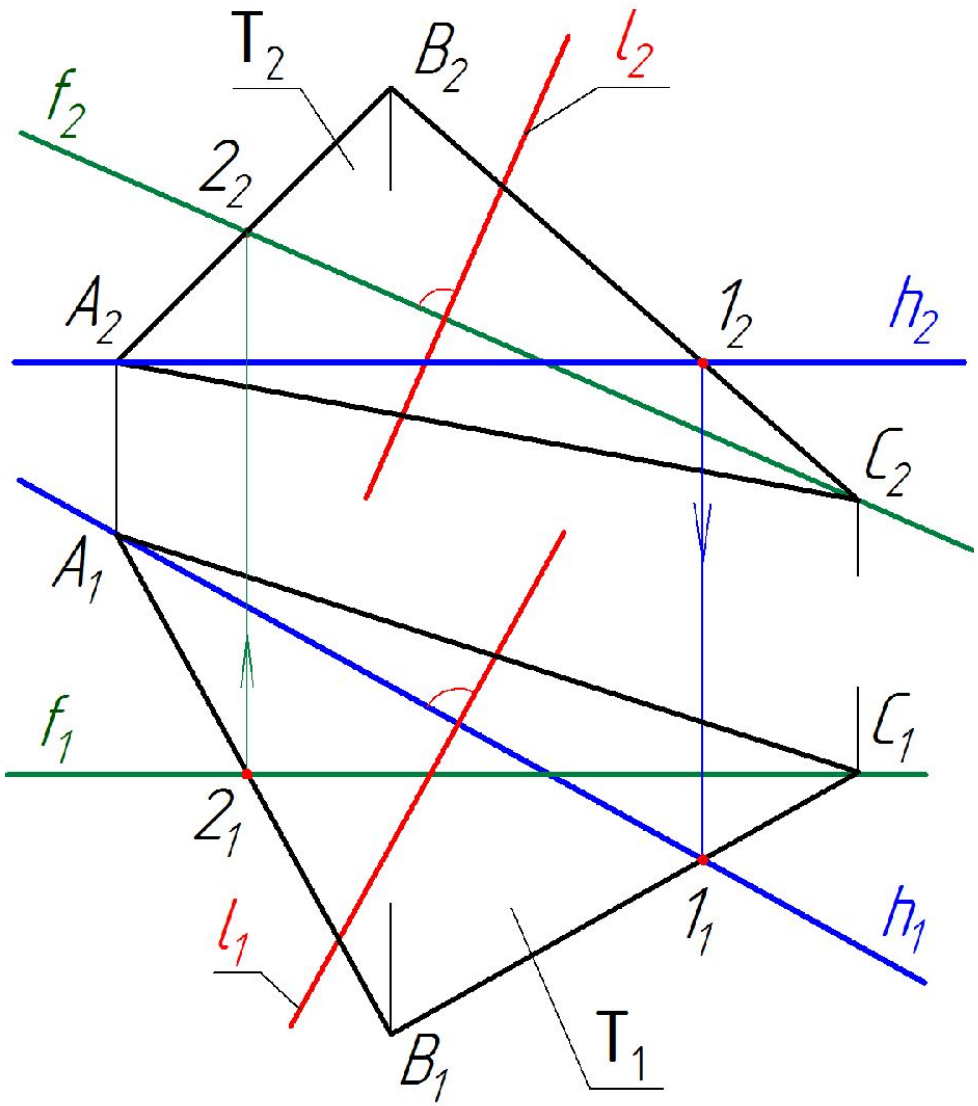
Пример 3



1. Выбрано $l_2 \equiv m_2$
2. $m(1,2)$; $1 = m \cap AB$; $2 = m \cap BC$;
3. Строим m_1.
4. Определяем взаимное положение прямых m_1 и l_1

   $m_1 \parallel l_1$
5. Следовательно, $l \parallel \Phi$

Прямая перпендикулярная плоскости



Прямая перпендикулярна плоскости, если она перпендикулярна двум пересекающимся прямым, принадлежащим этой плоскости.

В качестве прямых, лежащих в плоскости, должны быть использованы <u>только прямые уровня</u> – горизонталь и фронталь.

$$l \perp T \Rightarrow l \perp h \wedge l \perp f;$$

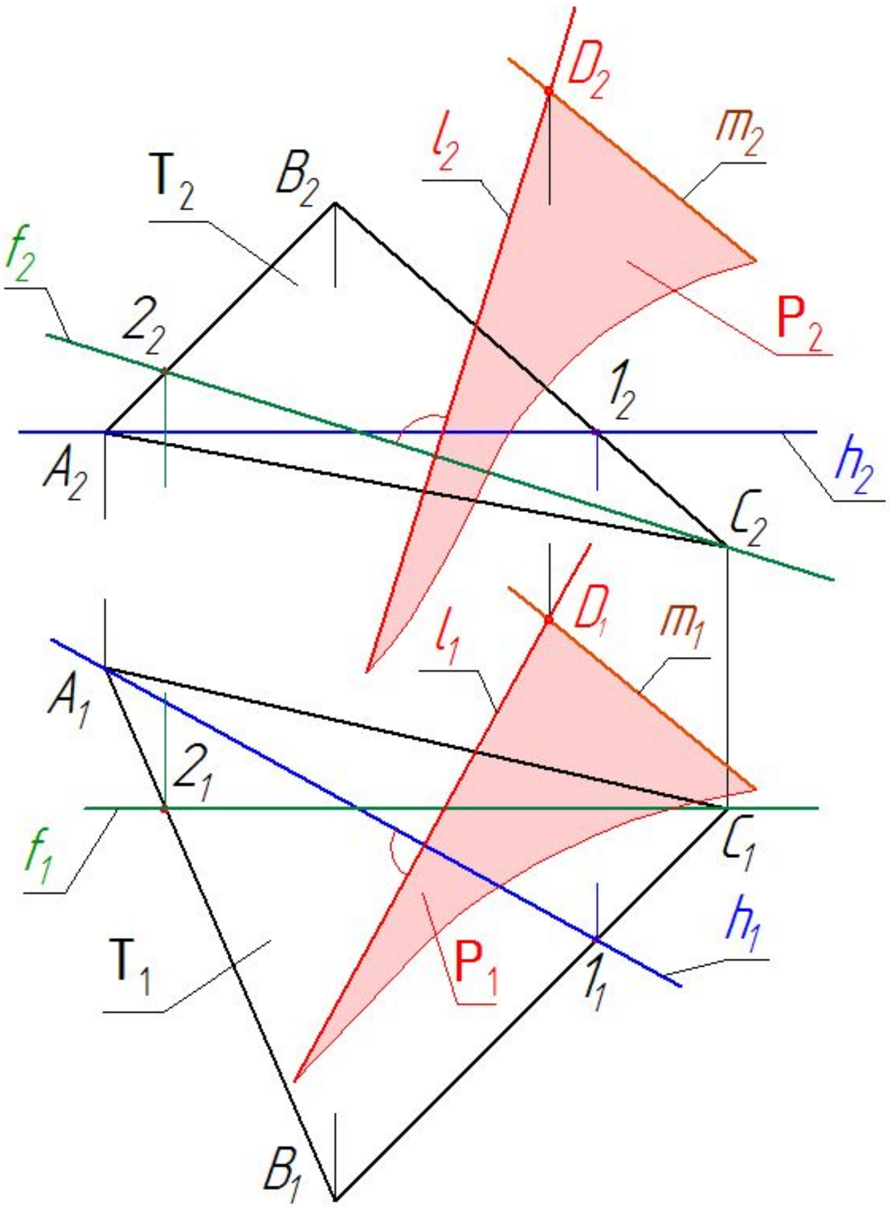
T – плоскость общего положения

$\Rightarrow l$ – прямая общего положения

$l \perp h;\ h \parallel \Pi_1;\ l \perp \Pi_1 \Rightarrow l_1 \perp h_1$

$l \perp f;\ f \parallel \Pi_2;\ l \perp \Pi_2 \Rightarrow l_2 \perp f_2$

Взаимно перпендикулярные плоскости



Две плоскости взаимно перпендикулярны, если одна из плоскостей содержит (проходит через) прямую, перпендикулярную другой плоскости.

Через точку $\boldsymbol{D}$ провести плоскость $\boldsymbol{P}$ перпендикулярную плоскости $\boldsymbol{T}(\Delta \boldsymbol{ABC})$.

Задаем $\boldsymbol{P}(\boldsymbol{l} \cap \boldsymbol{m})$; $\boldsymbol{l} \cap \boldsymbol{m} = \boldsymbol{D}$

Строим $\boldsymbol{l} \perp \boldsymbol{T}$ ($\boldsymbol{D} \in \boldsymbol{l}$; $\boldsymbol{l_1} \perp \boldsymbol{h}_1$; $\boldsymbol{l_2} \perp \boldsymbol{f_2}$)

Строим прямую $\boldsymbol{m}$ ($\boldsymbol{D} \in \boldsymbol{m}$).