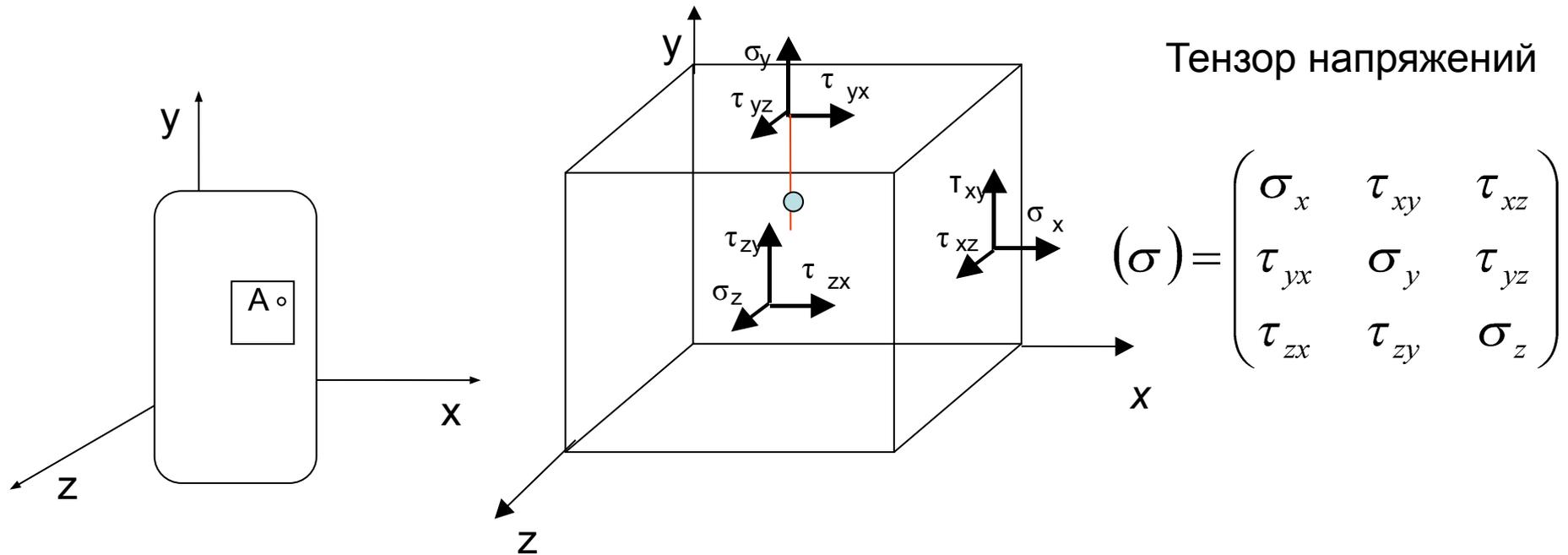


# Напряженное и деформированное состояние в точке Основные понятия и определения



Индексы при напряжениях проставляются по следующему **правилу** **первый** индекс указывает, какой оси параллельна нормаль к площадке действия рассматриваемого напряжения, второй индекс показывает, какой оси параллельно данное напряжение.

Нормальное растягивающее напряжение, **положительно**, нормальное сжимающее напряжение **отрицательно**.

Касательное напряжение **положительно**, если обозначающий его вектор пытается вращать выделенный объем относительно любой точки на внутренней нормали по ходу часовой стрелки

# Основные понятия и определения

Площадки, на которых касательные напряжения равны нулю, называются **главными площадкам**

Нормальные напряжения, действующие на главных площадках, называются **главными напряжениями..**

Направления параллельные главным напряжениям называются **главными направлениями**

Главные напряжения принято обозначать  $\sigma_1, \sigma_2$  и  $\sigma_3$ , при этом индексы расставляются лишь после того, как эти напряжения вычислены, так чтобы выполнялись алгебраические неравенства

$$\sigma_1 \geq \sigma_2 \geq \sigma_3$$

Для данной точки тела  $\sigma_1$  – наибольшее, а  $\sigma_3$  – наименьшее, в алгебраическом смысле, нормальное напряжение. Напряжение  $\sigma_2$  - это *промежуточное главное напряжение*

*При обработке результатов эксперимента были получены следующие значения главных напряжений: -500 МПа, 300 МПа и -600 МПа. Выберем обозначения для вычисленных напряжений.*

$$300 \geq -500 \geq -600$$

$$\sigma_1 \geq \sigma_2 \geq \sigma_3$$

# Виды напряженного состояния

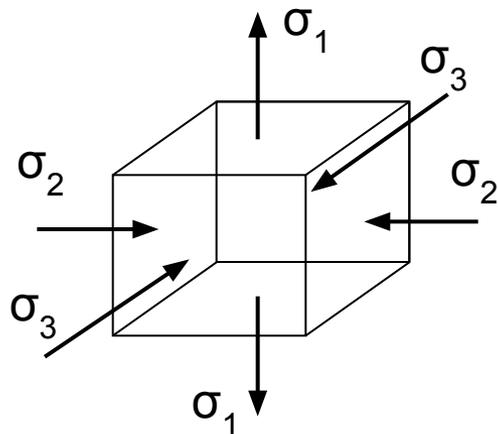
Вид напряженного состояния зависит от числа главных напряжений.

Если на элемент действуют три главных напряжения ( $\sigma_1 \neq 0; \sigma_2 \neq 0; \sigma_3 \neq 0$ ), **объемным** напряженное состояние.

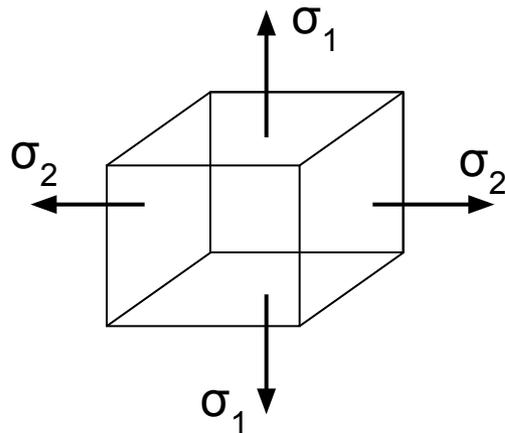
Если на элемент действуют два главных напряжения ( $\sigma_1 \neq 0; \sigma_2 \neq 0; \sigma_3 = 0$  или  $\sigma_1 \neq 0; \sigma_2 = 0; \sigma_3 \neq 0$  или  $\sigma_1 = 0; \sigma_2 \neq 0; \sigma_3 \neq 0$ ), то такое напряженное состояние называется **плоским**.

Если на объем действует одно главное напряжение ( $\sigma_1 \neq 0; \sigma_2 = 0; \sigma_3 = 0$  или  $\sigma_1 = 0; \sigma_2 = 0; \sigma_3 \neq 0$ ) то такое напряженное состояние называется линейным

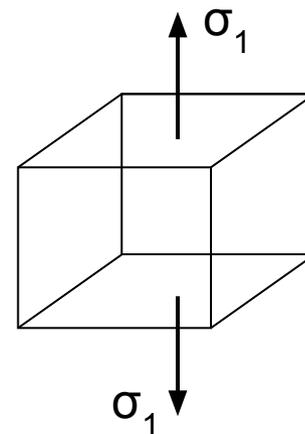
Объемное НС



Плоское НС



Линейное НС



Тензор напряжений

$$(\sigma) = \begin{pmatrix} \sigma_1 & 0 & 0 \\ 0 & \sigma_2 & 0 \\ 0 & 0 & \sigma_3 \end{pmatrix}$$

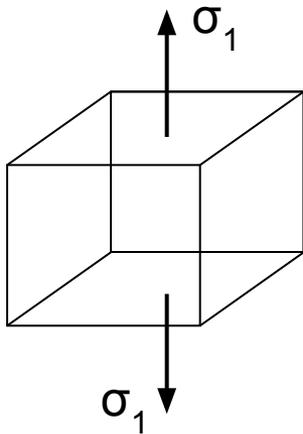
$$(\sigma) = \begin{pmatrix} 0 & 0 & 0 \\ 0 & \sigma_1 & 0 \\ 0 & 0 & \sigma_2 \end{pmatrix}$$

$$(\sigma) = \begin{pmatrix} 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & \sigma_1 \end{pmatrix}$$

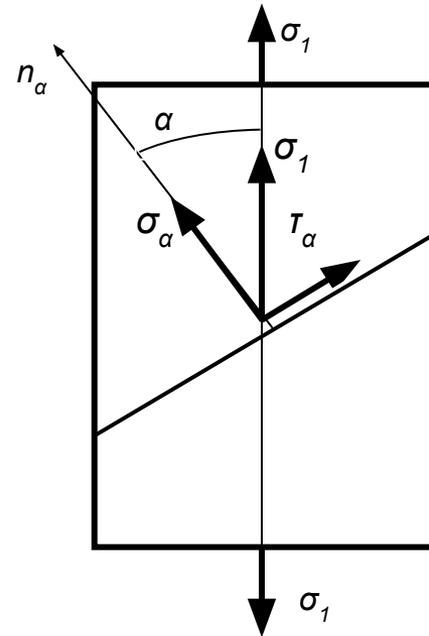
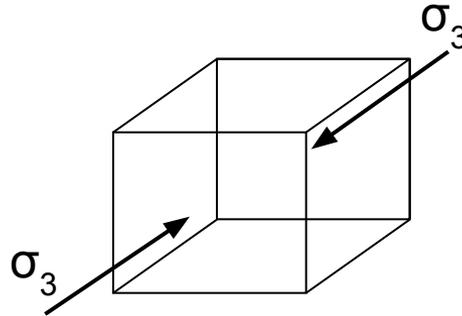
# Линейное напряженное состояние

**Линейным** называется напряженное состояние при котором действует только одно главное напряжение

Растяжение



Сжатие



$$\sigma_{\alpha} = \sigma_1 \cdot \cos^2 \alpha \quad \text{и} \quad \tau_{\alpha} = \frac{\sigma_1}{2} \cdot \sin 2\alpha \quad \text{при} \quad \text{растяжении}$$

$$\sigma_{\alpha} = \sigma_3 \cdot \cos^2 \alpha \quad \text{и} \quad \tau_{\alpha} = \frac{\sigma_3}{2} \cdot \sin 2\alpha \quad \text{при} \quad \text{сжатии}$$

# Плоское напряженное состояние

**Плоским**, называется напряженное состояние при котором на грани выделенного элемента действуют два главных напряжения

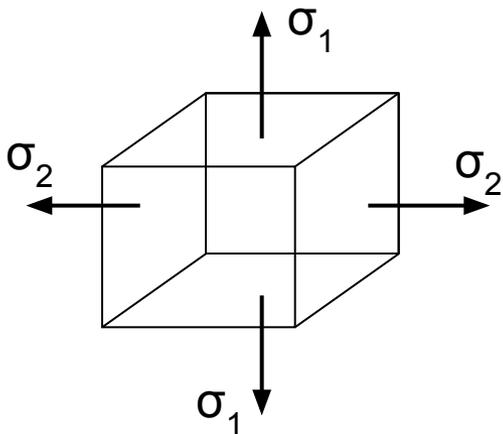
Нормальные напряжения в наклонной площадке

$$\sigma_{\beta} = \sigma_1 \cdot \sin^2 \alpha + \sigma_2 \cdot \cos^2 \alpha \quad \sigma_{\alpha} = \sigma_1 \cdot \cos^2 \alpha + \sigma_2 \cdot \sin^2 \alpha$$

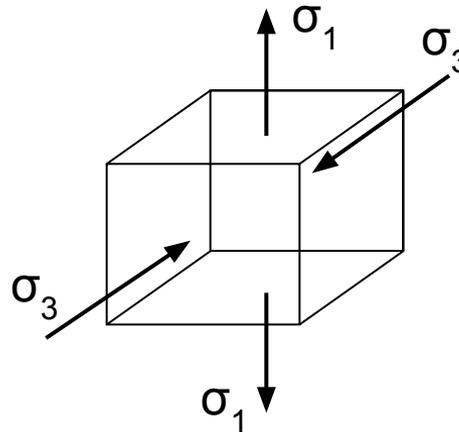
Касательные напряжения в наклонной площадке

$$\tau_{\alpha} = \frac{\sigma_1 - \sigma_2}{2} \cdot \sin 2\alpha \quad \text{и} \quad \tau_{\beta} = -\frac{\sigma_1 - \sigma_2}{2} \cdot \sin 2\alpha$$

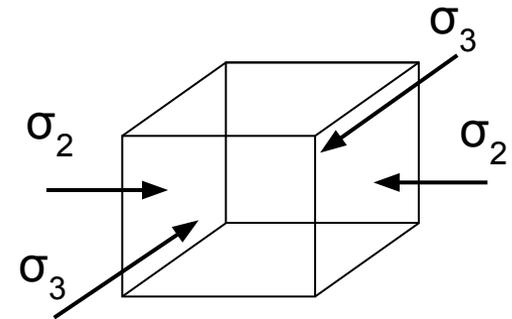
Двухосное растяжение



Разноименное плоское напряженное состояние



Двухосное сжатие



# Закон постоянства суммы нормальных напряжений

$$\sigma_{\alpha} = \sigma_1 \cdot \cos^2 \alpha + \sigma_2 \cdot \sin^2 \alpha \quad \sigma_{\beta} = \sigma_1 \cdot \sin^2 \alpha + \sigma_2 \cdot \cos^2 \alpha$$

$$\sigma_{\alpha} + \sigma_{\beta} = (\sigma_1 \cdot \cos^2 \alpha + \sigma_2 \cdot \sin^2 \alpha) + (\sigma_1 \cdot \sin^2 \alpha + \sigma_2 \cdot \cos^2 \alpha) = \sigma_1 + \sigma_2$$

**На двух взаимно перпендикулярных площадках сумма нормальных напряжений величина постоянная, которая не зависит от положения выбранных площадок.**

$$\frac{d\sigma_{\alpha}}{d\alpha} = -2\sigma_1 \cos \alpha \sin \alpha + 2\sigma_2 \sin \alpha \cos \alpha = -(\sigma_1 - \sigma_2) \sin 2\alpha = 0$$

$$\sigma_{\alpha} = \sigma_{\beta} = \sigma_1 = \sigma_2; \quad \tau_{\alpha} = \tau_{\beta} = 0;$$

**Главные напряжения являются экстремальными значениями нормальных напряжений для выбранной точки.**

$$\sigma_{\alpha_{\text{макс}}} = \sigma_1; \quad \sigma_{\alpha_{\text{минимум}}} = \sigma_2$$

# Закон парности касательных напряжений

$$\tau_{\alpha} = \frac{\sigma_1 - \sigma_2}{2} \cdot \sin 2\alpha \quad \text{и} \quad \tau_{\beta} = -\frac{\sigma_1 - \sigma_2}{2} \cdot \sin 2\alpha$$

$$\tau_{\alpha} = -\tau_{\beta}$$

**Если по какой-либо площадке действует касательное напряжение, то по перпендикулярной к ней площадке непременно будет действовать касательное напряжение равное ему по величине и противоположное по знаку.**

Максимальные касательные напряжения действуют по площадкам, расположенным под углом в  $45^{\circ}$  к главным площадкам

$$\tau_{\alpha_{\text{макс}}} = \frac{\sigma_1 - \sigma_2}{2}$$

## Плоское напряженное состояние (обратная задача)

$$\sigma_1 = \frac{\sigma_\alpha + \sigma_\beta}{2} + \frac{1}{2} \sqrt{(\sigma_\alpha - \sigma_\beta)^2 + 4\tau_\alpha^2};$$

$$\sigma_2 = \frac{\sigma_\alpha + \sigma_\beta}{2} - \frac{1}{2} \sqrt{(\sigma_\alpha - \sigma_\beta)^2 + 4\tau_\alpha^2}$$

$$\operatorname{tg} \alpha_0 = - \frac{\tau_\alpha}{\sigma_1 - \sigma_\beta}$$

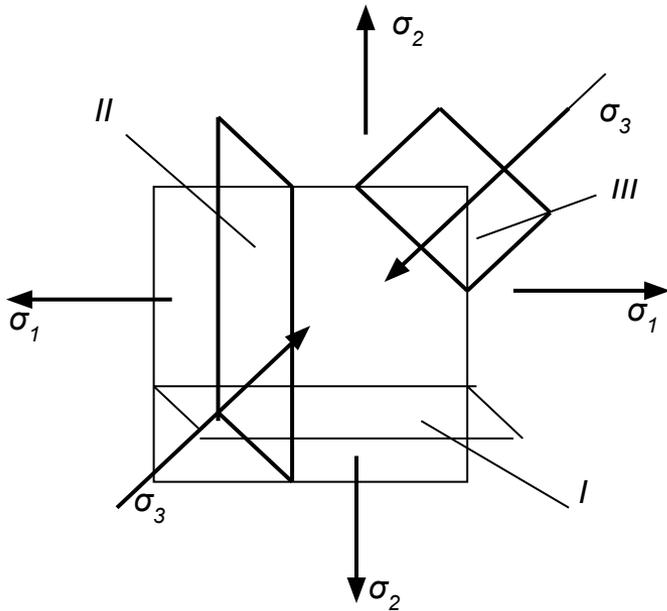
# Объемное напряженное состояние

Когда ни одно из главных напряжений не равно нулю, то такое напряженное состояние называется **объемным**.

$$\sigma_{\alpha} = \sigma_1 \cos^2 \alpha_1 + \sigma_2 \cos^2 \alpha_2 + \sigma_3 \cos^2 \alpha_3;$$

$$\tau_{\alpha} = \sqrt{\sigma_1^2 \cos^2 \alpha_1 + \sigma_2^2 \cos^2 \alpha_2 + \sigma_3^2 \cos^2 \alpha_3 - \sigma_{\alpha}^2}$$

На площадках параллельных одному из главных напряжений величины действующих напряжений не зависят от величины этого главного напряжения.



**Наибольшее касательное напряжение** будет действовать на площадке параллельной главному напряжению  $\sigma_2$  и наклоненной под углом в  $45^{\circ}$  к двум другим главным напряжениям  $\sigma_1$  и  $\sigma_3$ .

$$\tau_{\text{макс}} = \frac{\sigma_1 - \sigma_3}{2}$$

## Обобщенный закон Гука

$$\left. \begin{aligned} \varepsilon_1 &= \frac{1}{E} [\sigma_1 - \mu(\sigma_2 + \sigma_3)]; \\ \varepsilon_2 &= \frac{1}{E} [\sigma_2 - \mu(\sigma_1 + \sigma_3)]; \\ \varepsilon_3 &= \frac{1}{E} [\sigma_3 - \mu(\sigma_1 + \sigma_2)] \end{aligned} \right\}$$

Тензор деформаций

$$(\varepsilon) = \begin{pmatrix} \varepsilon_1 & 0 & 0 \\ 0 & \varepsilon_2 & 0 \\ 0 & 0 & \varepsilon_3 \end{pmatrix} \quad (\varepsilon) = \begin{pmatrix} \varepsilon_x & \gamma_{xy} & \gamma_{xz} \\ \gamma_{yx} & \varepsilon_y & \gamma_{yz} \\ \gamma_{zx} & \gamma_{zy} & \varepsilon_z \end{pmatrix}$$

# Потенциальная энергия деформации

Удельная потенциальная энергия

Удельная потенциальная энергия изменения объема

Удельная потенциальная энергия изменения формы

$$u = \frac{1}{2E} \left[ \sigma_1^2 + \sigma_2^2 + \sigma_3^2 - 2\mu(\sigma_1\sigma_2 + \sigma_2\sigma_3 + \sigma_1\sigma_3) \right]$$

$$u_V = \frac{1-2\mu}{6E} (\sigma_1^2 + \sigma_2^2 + \sigma_3^2)$$

$$\begin{aligned} u_\phi &= \frac{1+\mu}{3E} (\sigma_1^2 + \sigma_2^2 + \sigma_3^2 - \sigma_1\sigma_2 - \sigma_2\sigma_3 - \sigma_3\sigma_1) = \\ &= \frac{1+\mu}{6E} \left[ (\sigma_1 - \sigma_2)^2 + (\sigma_2 - \sigma_3)^2 + (\sigma_3 - \sigma_1)^2 \right] \end{aligned}$$