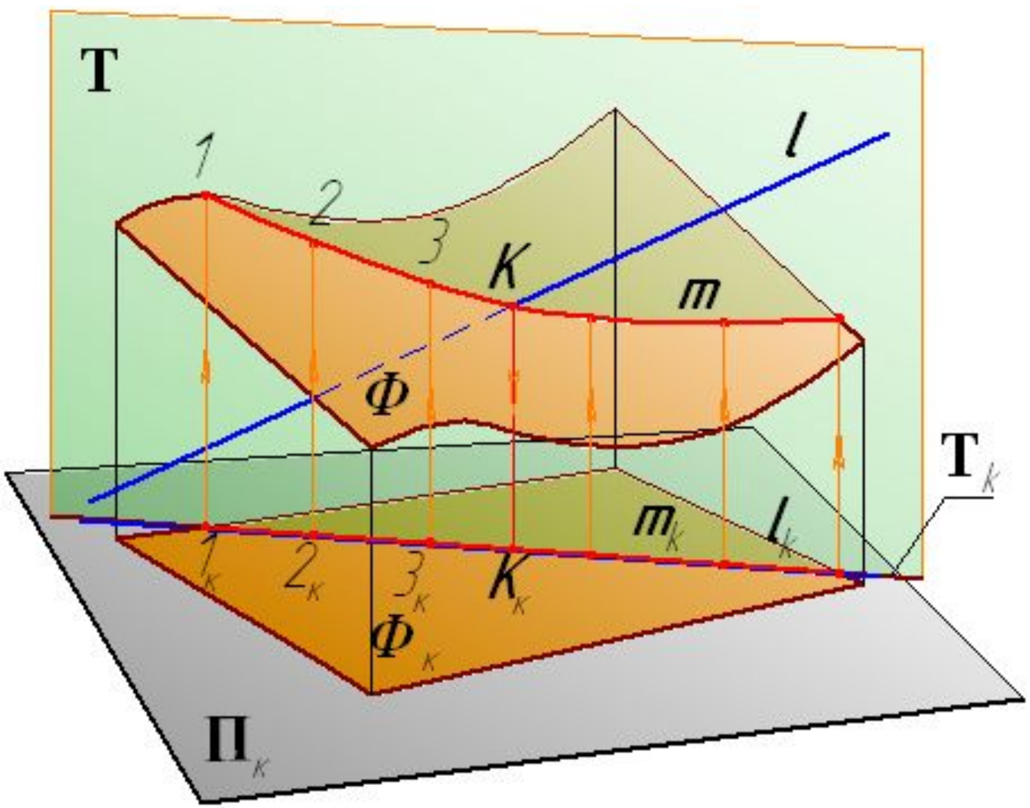
Пересечение прямой линии с поверхностью

Прямая пересекает поверхность, если она пересекает какую-либо линию, принадлежащую этой поверхности

$$l \cap \Phi = \{K^1, K^2, \ldots\}, \quad \{K^1, K^2, \ldots\} = l \cap m \; ; \; m \subset \Phi$$



Линию ***m***, принадлежащую поверхности ***Ф***, следует рассматривать как линию пересечения самой поверхности ***Ф*** с какой-то плоскостью, например, ***Т***, в которую заключена прямая ***l***.

Наиболее часто плоскость ***Т*** принимают проецирующей.

Положение плоскости ***Т*** следует выбирать так, чтобы проекции линии пересечения ***m*** по возможности имели наиболее простую геометрическую форму – прямой (ломаной) или окружности.

Общий (краткий) алгоритм построения точки пересечения прямой с поверхностью

1. $l \cup T\,;\ T \cap \Phi = m$

m – линия. По возможности на проекциях должна иметь наиболее простую геометрическую форму.

Если $T \perp \Pi_{к}$, то $\Rightarrow m_{к} \equiv T_{к} \equiv l_{к}$)

2. $l \subset T \;\wedge\; m \subset T \Rightarrow l \cap m = \{K^1, K^2, \ldots\}$

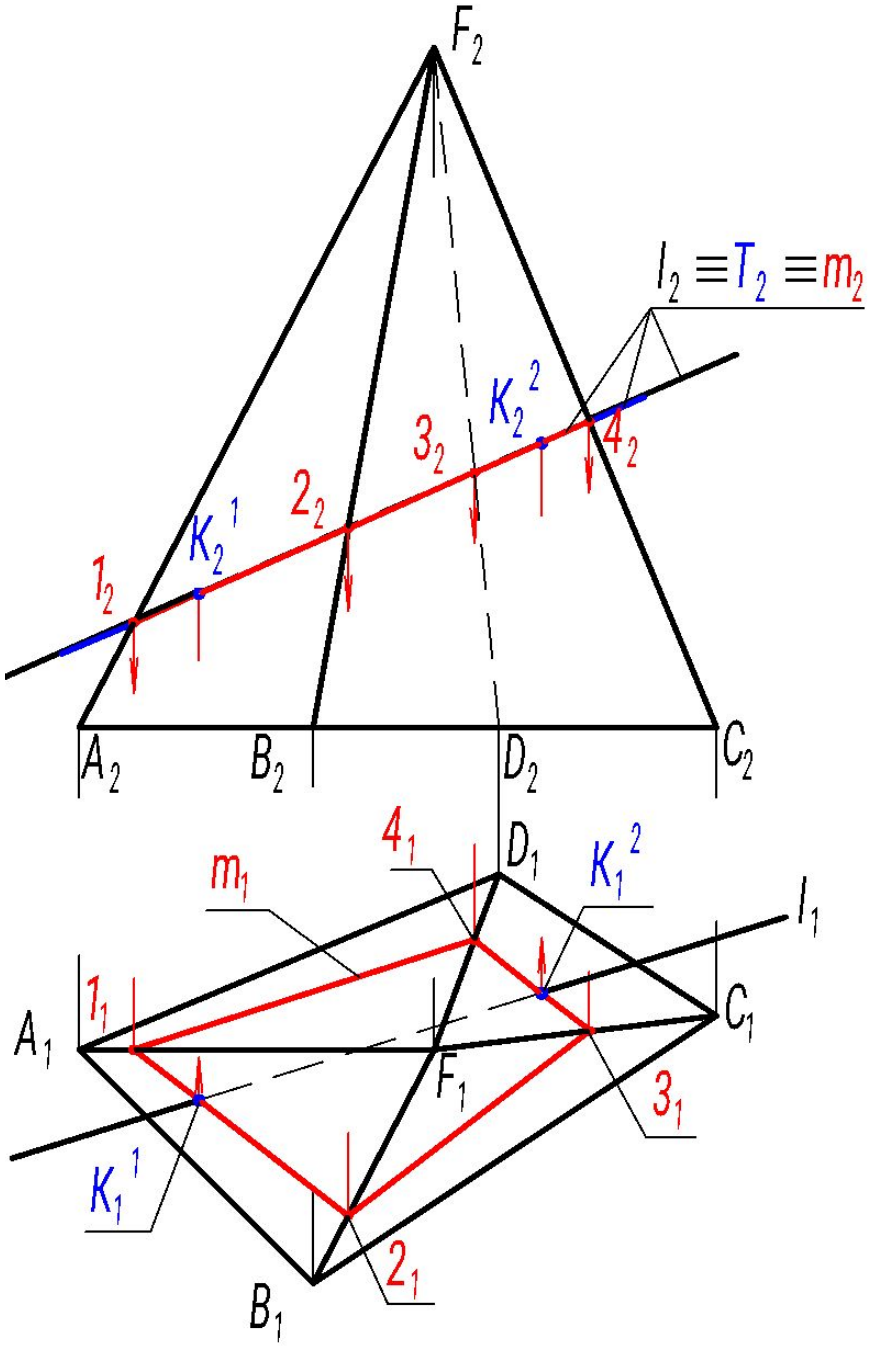
$\Rightarrow \{K^1, K^2, \ldots\} \subset m$

$m \subset \Phi \Rightarrow \{K^1, K^2, \ldots\} \subset \Phi$

$\Rightarrow \{K^1, K^2, \ldots\} = l \cap \Phi$

Пересечение прямой линии с гранной поверхностью

(на примере пирамидальной поверхности)



FABCD – четырехгранная пирамида. Определить точки K^1 и K^2 пересечения прямой l с поверхностью пирамиды.

*Так как при пересечении гранной поверхности плоскостью всегда образуется ломаная линия, то выбор положения вспомогательной плоскости **T** по отношению к какой-либо плоскости проекций не имеет значения.*

Выбираем фронтально-проецирующую плоскость.

Совмещаем фронтальную проекцию m_2 линии m с фронтальной проекцией l_2 прямой l.

$$l_2 \equiv m_2$$

Строим горизонтальную проекцию m_1, при условии, что $m \subset \Phi\ (FABCD)$

$$m\{1,2,3,4\}$$

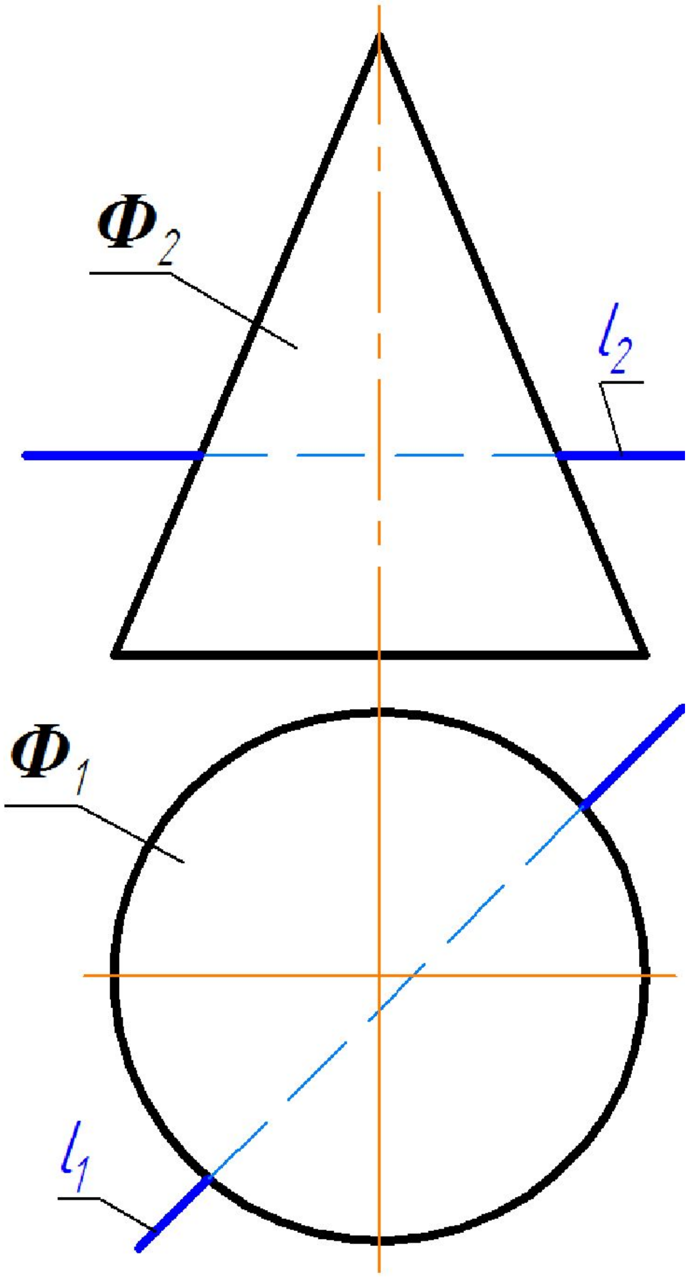
$$1=FA\cap T;\ 2=FB\cap T;\ 3=FC\cap T;\ 4=FD\cap T.$$

Определяем точки K^1_1 и K^2_1 пересечения линии m_1 с l_1.

$$m_1 \cap l_1=\{K^1_1, K^2_1\}$$

Строим фронтальные проекции K^1_2 и K^2_2 точек K^1 и K^2.

Пересечение прямой линии с конической поверхностью



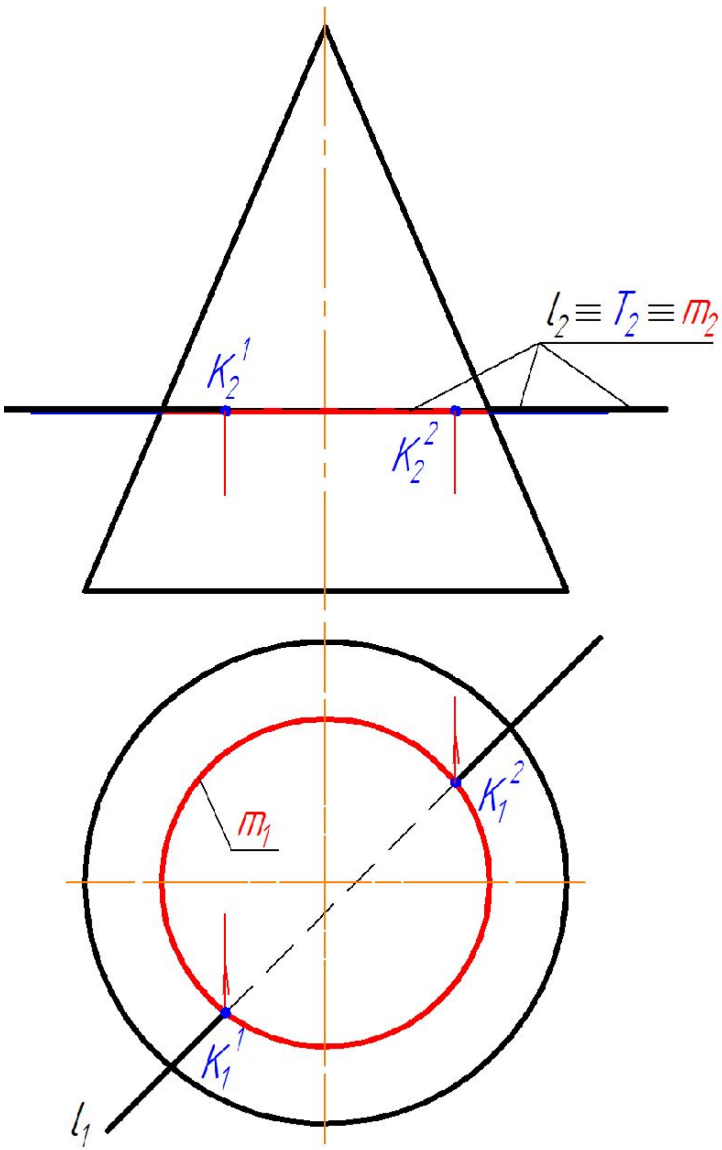
Задана прямая круговая коническая поверхность ***Ф*** и прямая ***l***.

Определить точки ***К***^{1} и ***К***^{2} пересечения прямой ***l*** с конической поверхностью ***Ф***.

Так как коническая поверхность является прямой круговой с вертикальной осью вращения, то все параллели этой поверхности являются горизонталями.

Заданная прямая также является горизонталью.

Следовательно, если прямую ***l*** заключить в горизонтальную плоскость уровня, например, ***Т***, то линией пересечения плоскости ***Т*** с поверхностью ***Ф*** будет одна из параллелей поверхности ***Ф***.



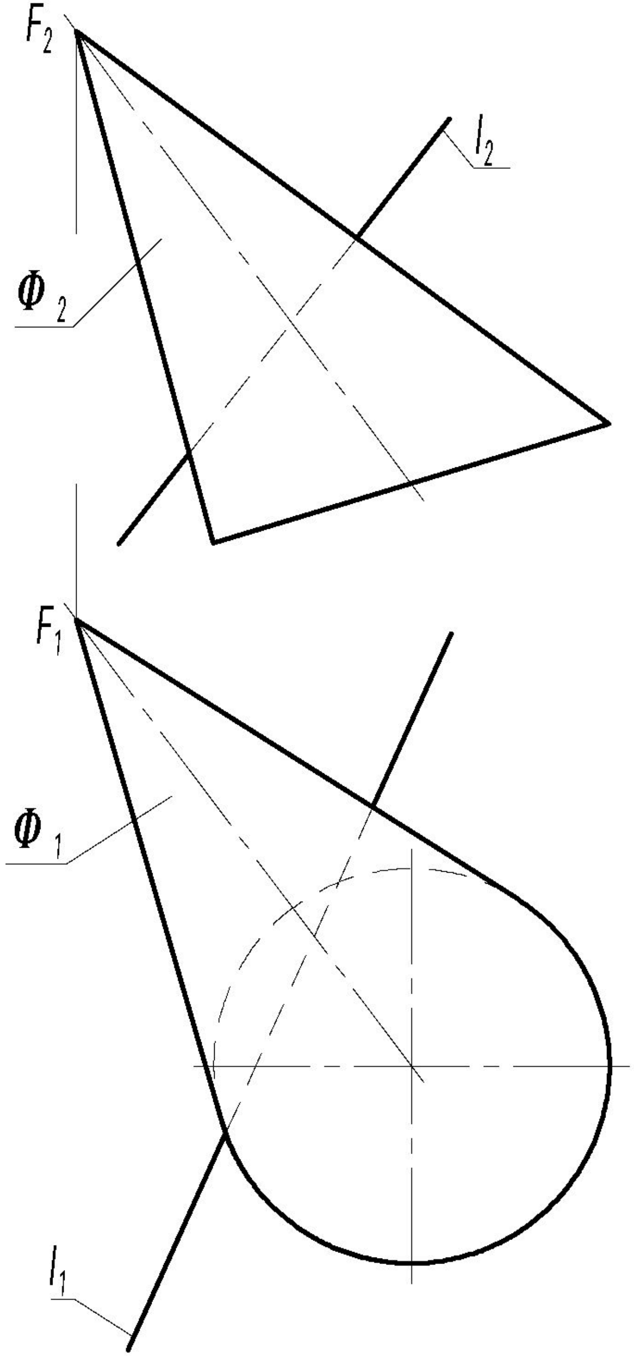
Совмещаем $m_2 \equiv l_2$

Строим горизонтальную проекцию ***m_1-окружность*** линии ***m***.

На горизонтальной проекции определяем точки ***K^1*** и ***K^2*** пересечения прямой ***l*** и линии ***m***.

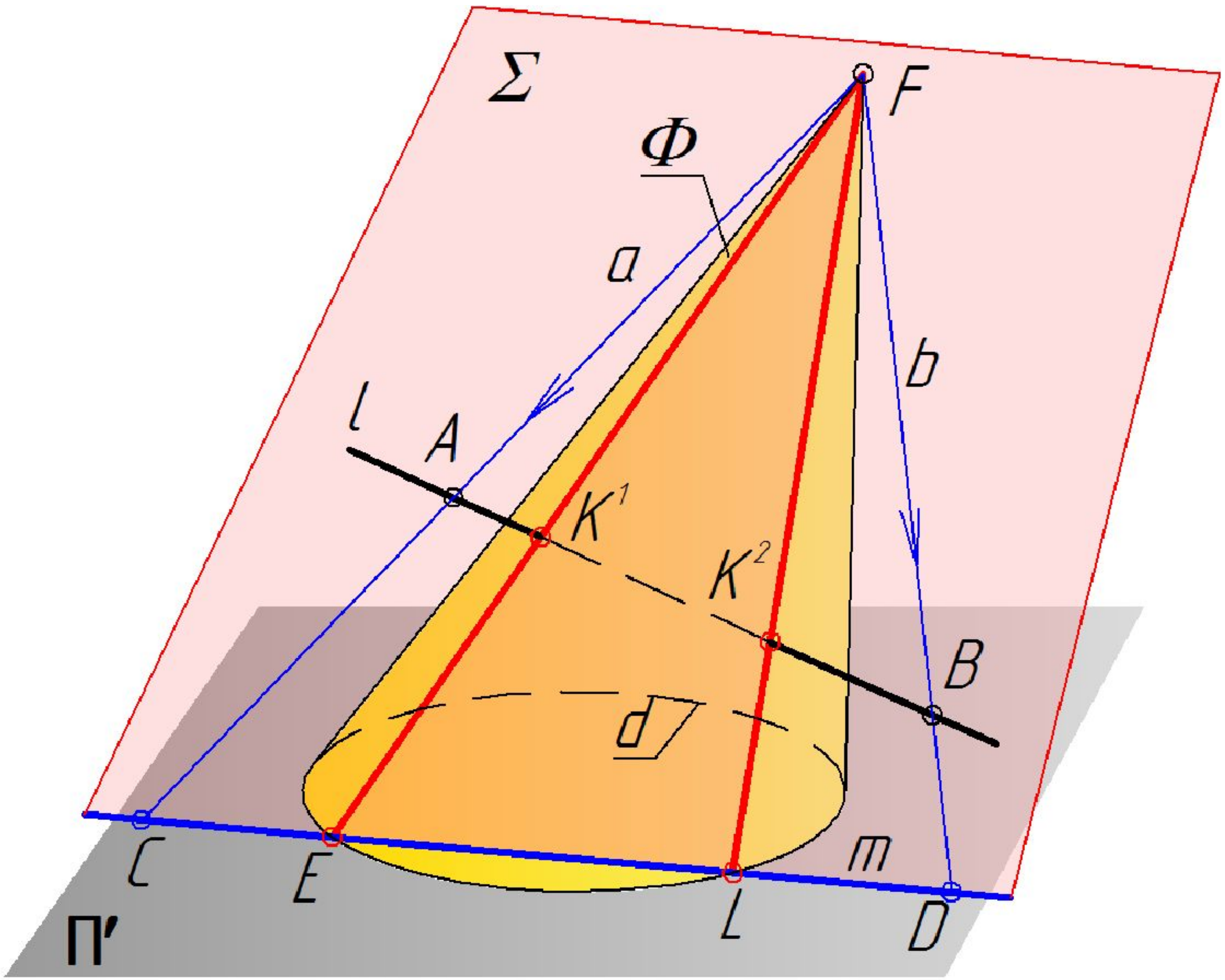
Строим фронтальные проекции точек ***K^1*** и ***K^2***.

Определяем видимость участков прямой ***l***.

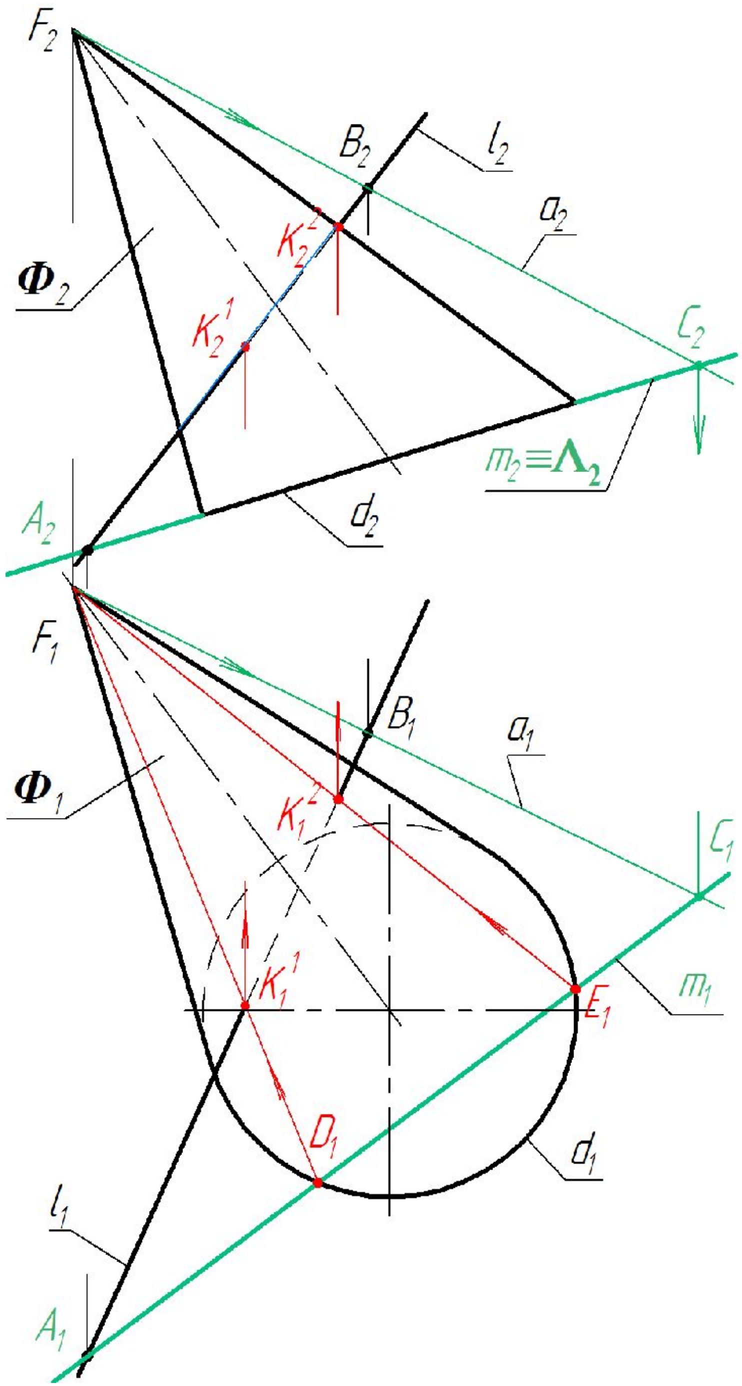


Задан наклонный эллиптический конус Φ и прямая l.

Определить точки K^1 и K^2 пересечения прямой l с поверхностью конуса Φ.



У конической поверхности есть два вида простых сечений плоскостью – две прямые (образующие) и окружность. Из двух перечисленных сечений в данном примере при заключении прямой в плоскость можно получить только сечение в виде двух прямых при условии, что секущая плоскость пройдет через вершину конуса.



Вспомогательная секущая плоскость Σ будет плоскостью общего положения и задана точкой F и самой прямой l. Однако, такой вариант задания плоскости неудобен. Поэтому зададим плоскость Σ двумя пересекающимися прямыми: прямой l и прямой $a(F,B)$. Точка B – произвольная точка, принадлежащая прямой l.

$$\Sigma\ (l,\ a(F,B(B \in l)))$$

Строим линию m пересечения плоскости Σ и плоскости основания Λ конуса Φ. Для этого находим точки пересечения прямых l и a с плоскостью основания Λ конуса Φ, и соединяем их прямой m.

$$\Sigma \cap \Lambda(d) = m,\ \ m(A,C),\ \ A = l \cap \Lambda,\ C = a \cap \Lambda$$

Отмечаем точки D и E пересечения прямой m и линии очерка основания d конуса Φ.

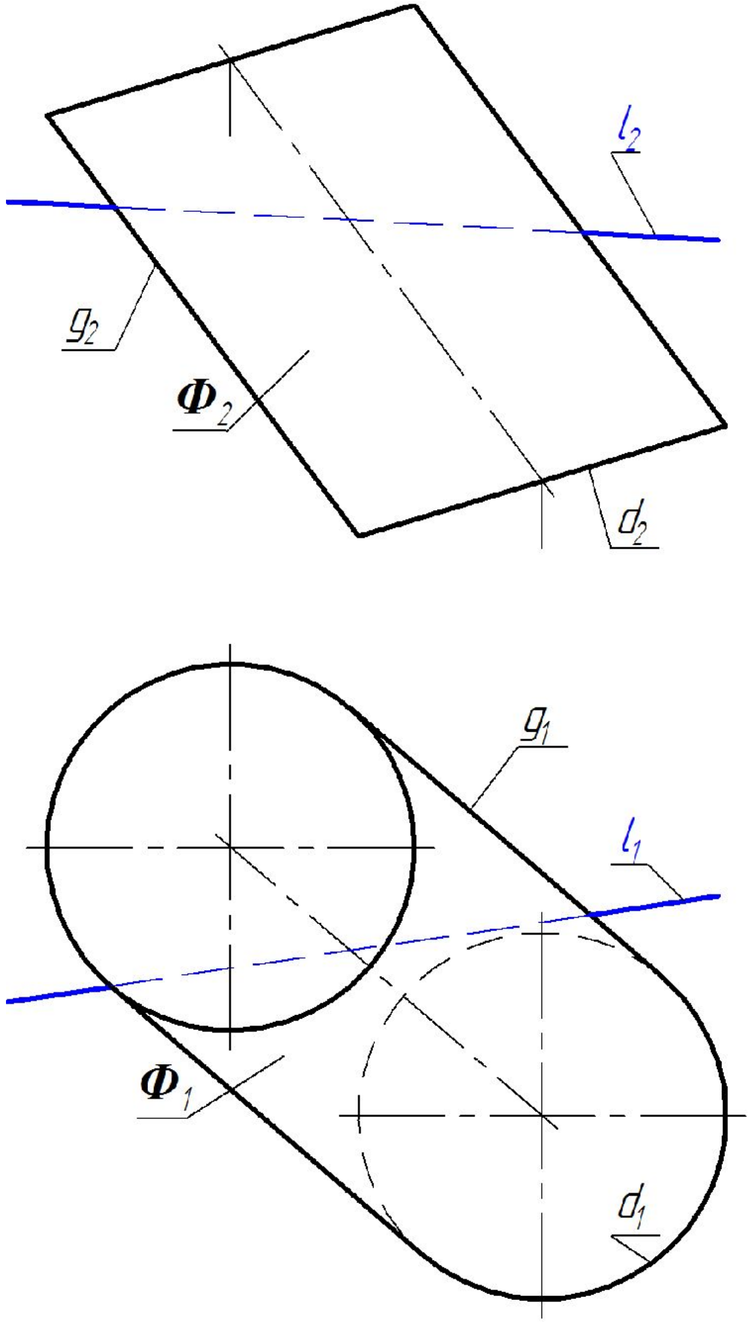
$$m \cap d = \{D,E\}$$

Строим линии пересечения плоскости Σ и конической поверхности. Для этого соединяем вершину конуса F с точками D и E.

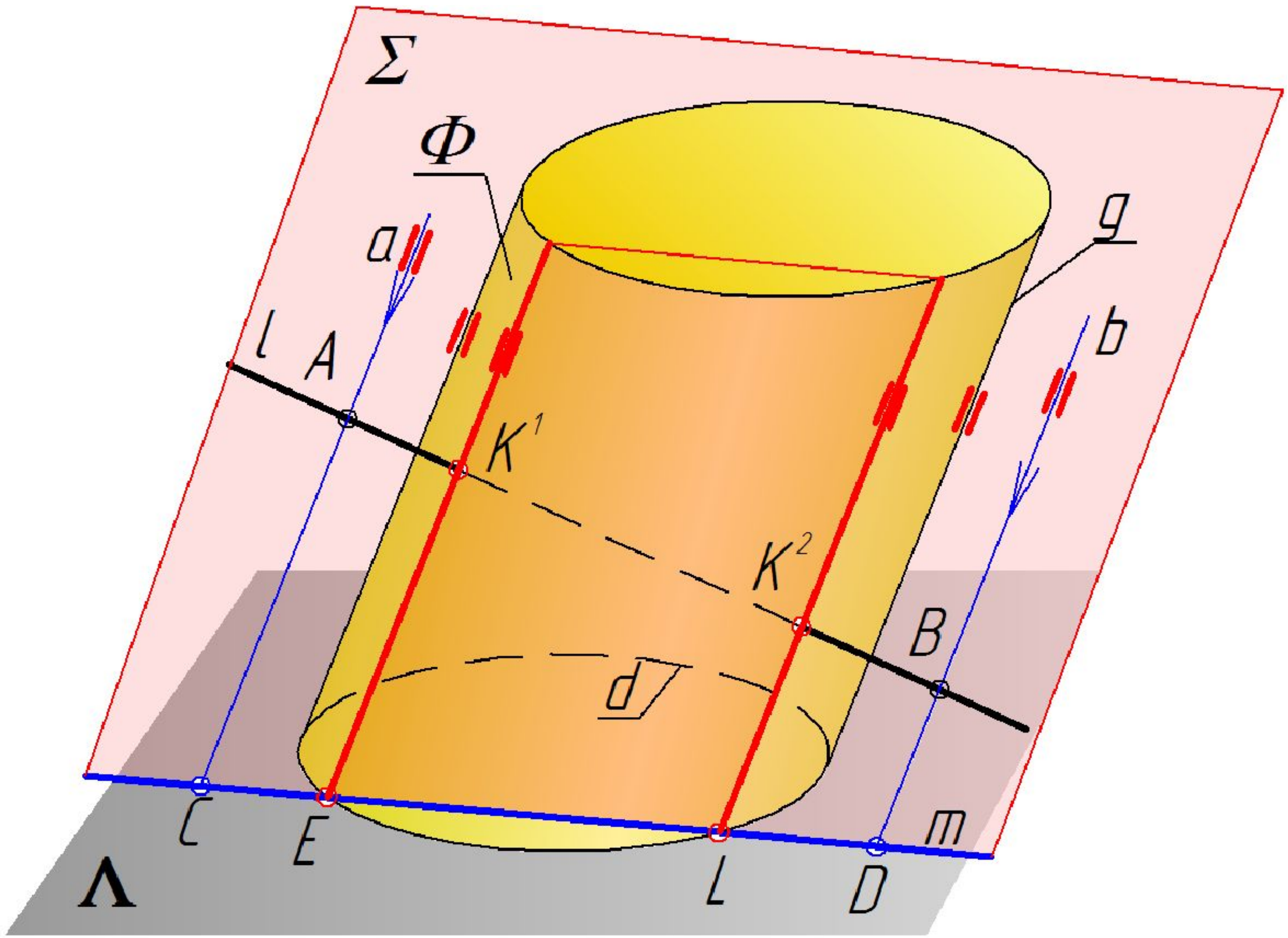
$$\Sigma\ \cap \Phi = (FD,\ FE)$$

Отмечаем точки K^1 и K^2 пересечения прямой l с построенными образующими FE и FD.

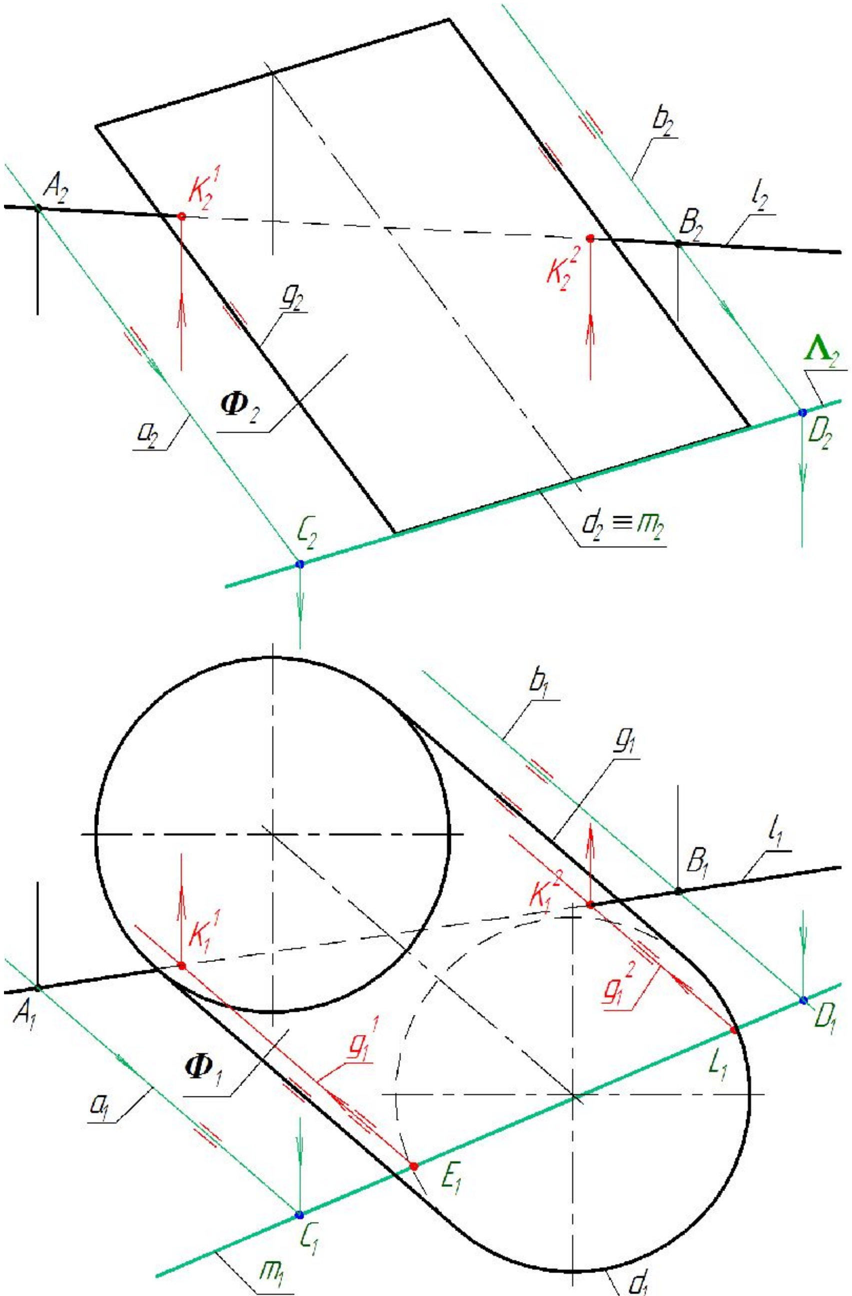
Пересечение прямой линии с цилиндрической поверхностью



Задан наклонный эллиптический цилиндр $\boldsymbol{\Phi}$. Определить точки $\boldsymbol{K^1}$ и $\boldsymbol{K^2}$ пересечения прямой $\boldsymbol{l}$ с поверхностью цилиндра.



У цилиндрической поверхности есть два вида простых сечений плоскостью – две прямые (образующие) и окружность. Из двух перечисленных сечений в данном примере при заключении прямой в плоскость можно получить только сечение в виде двух прямых при условии, что секущая плоскость пройдет параллельно образующим цилиндрической поверхности.



Вспомогательная секущая плоскость Σ будет плоскостью общего положения и задана двумя параллельными прямыми a и b, которые параллельны образующим цилиндрической поверхности и пересекают прямую l в произвольных точках A и B.

$$\Sigma\,(a,b);\ a \parallel b \parallel g;\ a \cap l = A;\ b \cap l = B$$

Строим линию m пересечения плоскости Σ и плоскости основания Λ цилиндра Φ. Для этого находим точки пересечения прямых a и b с плоскостью основания Λ конуса Φ, и соединяем их прямой m.

$$\Sigma \cap \Lambda(d) = m,\ \ m(C,D),\ \ C = a \cap \Lambda,\ D = b \cap \Lambda$$

Отмечаем точки E и L пересечения прямой m и линии очерка основания d конуса Φ.

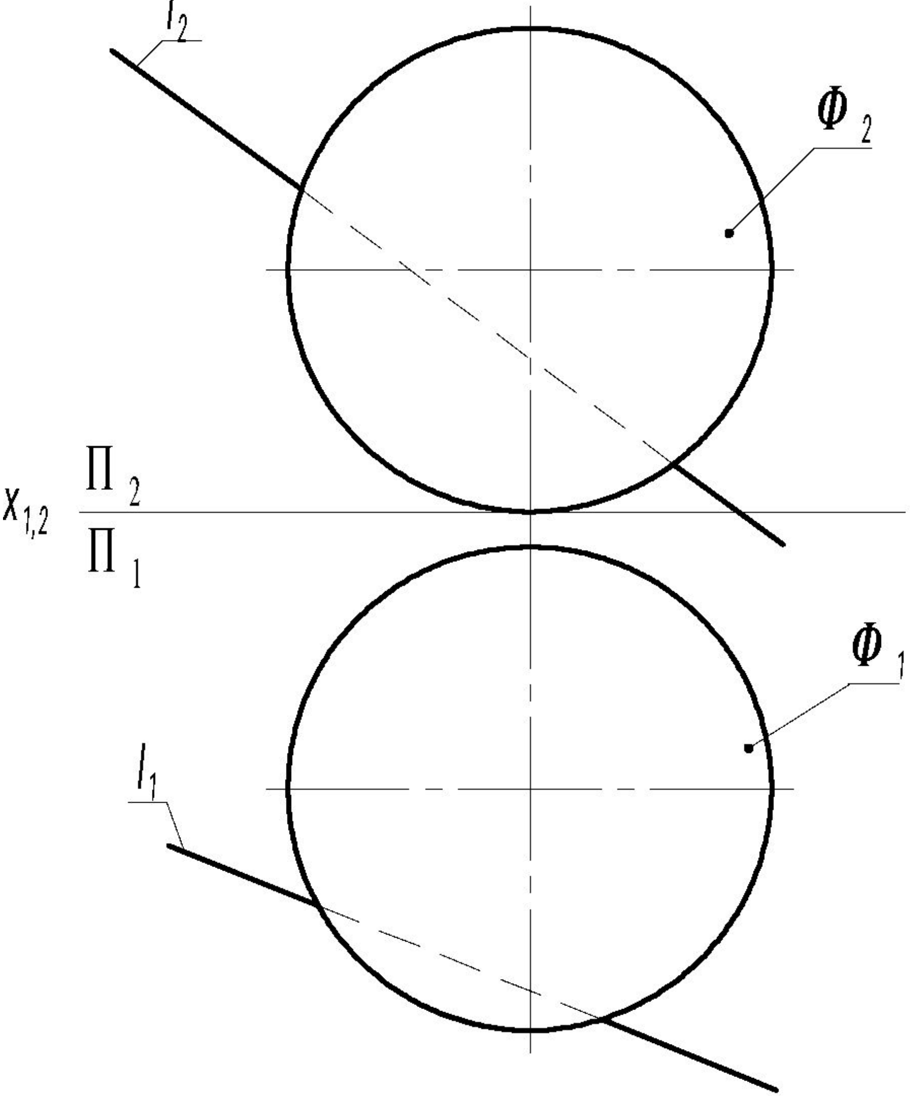
$$m \cap d = \{L,E\}$$

Строим линии пересечения плоскости Σ и цилиндрической поверхности. Для этого через точки L и E проводим прямые g^1 и g^2 параллельно образующим цилиндрической поверхности.

$$\Sigma\ \cap \Phi = (g^1,g^2);\ E \in g^1;\ L \in g^2;\ g^1 \parallel g^2 \parallel g;$$

Отмечаем точки K^1 и K^2 пересечения прямой l с построенными образующими g^1 и g^2.

Пересечение прямой линии со сферической поверхностью



Задана сфера **Ф**.

Определить точки K^1 и K^2 пересечения прямой l с поверхностью сферы.

Совмещаем горизонтальную проекцию m_1 линии m с горизонтальной проекцией прямой l.

$$m_1 \equiv l_1$$

Линия m – окружность, но ее фронтальная проекция имеет форму эллипса.

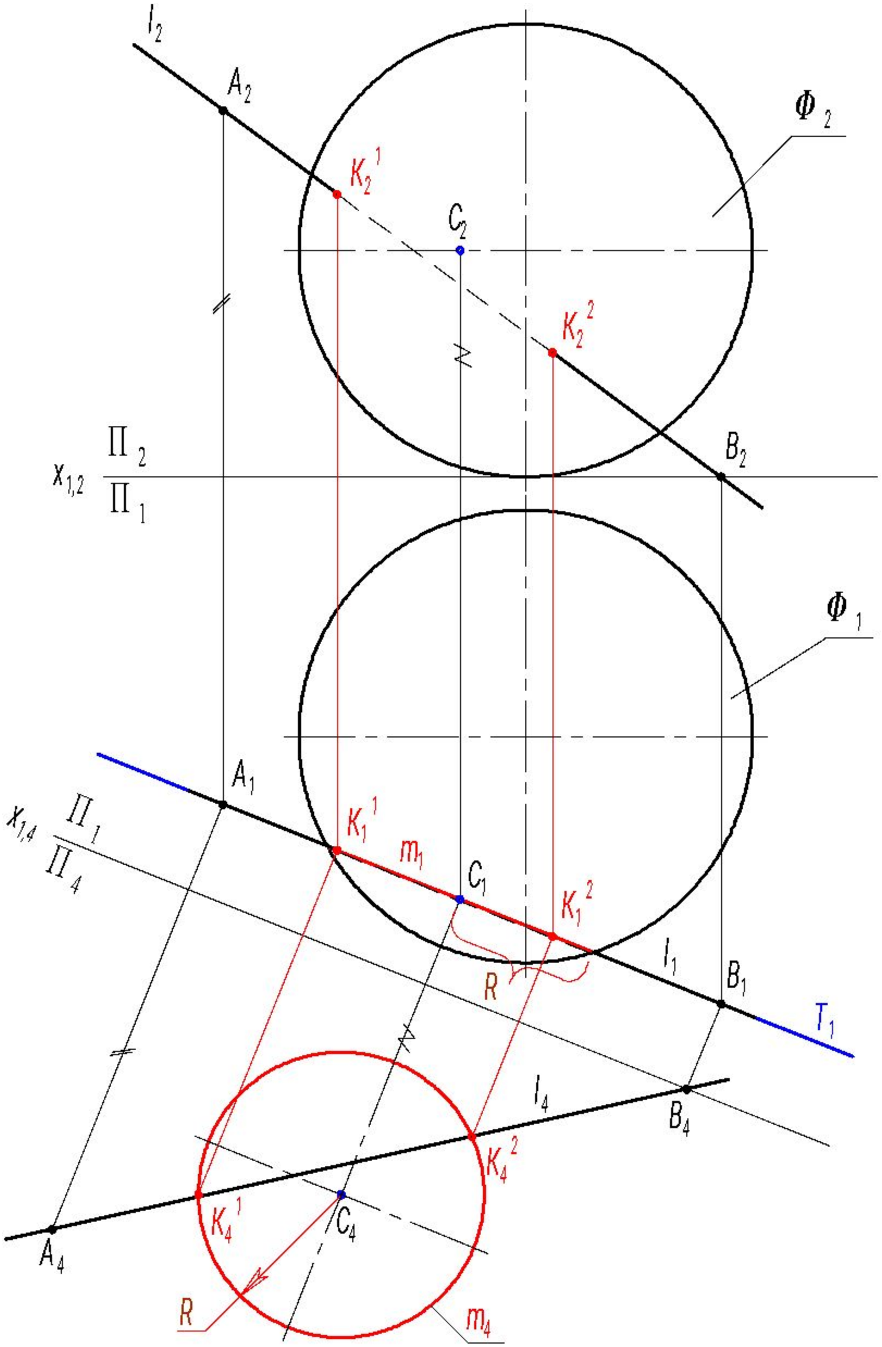
Использование $m_2 \equiv l_2$ дает тот же результат.

Следовательно, должна быть построена дополнительная проекция.

При пересечении сферической поверхности плоскостью фигура сечения всегда имеет форму окружности. Однако, если секущая плоскость не параллельна плоскости проекций, то проекция окружности будет иметь вид эллипса. Т.е. фигуры сложной в построении. Но, если подобрать дополнительную плоскость проекций параллельно фигуре сечения, то мы получим ее истинное изображение.

Если вспомогательную секущую плоскость, в которую заключают заданную прямую, принять проецирующей, то и параллельная ей плоскость также будет проецирующей, что полностью удовлетворяет требованиям способа замены (перемены) плоскостей проекций.

Следовательно, данная задача должна быть решена способом замены (перемены) плоскостей проекций.



В качестве вспомогательной секущей плоскости выбираем горизонтально-проецирующую плоскость T.

$$T \perp \Pi_1;\ l \subset T \Rightarrow l_1 \equiv T_1;$$

Плоскость T пересекает сферическую поверхность по линии m.

$$T \cap \Phi = m \Rightarrow m \subset T \Rightarrow m_1 \equiv l_1 \equiv T_1$$

Дополнительную плоскость проекций Π_4 располагаем параллельно линии m и перпендикулярно плоскости Π_1.

$$(\Pi_4 \| m, \Pi_4 \perp \mathrm{T}) \Rightarrow x_{1,4} \| (m_1 \equiv l_1)$$

На поле плоскости Π_4 строим проекции прямой l и линии m.

$$m_4,\ l_4$$

Определяем точки K^1_4, K^2_4 пересечения линий m_4 и l_4.

$$\{K^1_4, K^2_4\} = m_4 \cap l_4$$

Строим горизонтальные и фронтальные проекции точек K^1 и K^2.