

# Транспортная задача

## Пример № 1

На трех базах находится однородный груз. На базе  $A_1$  в количестве 300 т., на базе  $A_2$  в количестве 150 т., на базе  $A_3$  в количестве 50 т. Весь этот груз необходимо развести четверем заказчикам так, чтобы стоимость перевозок была наименьшей. Заказчику в пункте  $B_1$  должно поступить 170 т., в пункте  $B_2$  – 110 т., в пункте  $B_3$  – 100 т., в пункте  $B_4$  – 120 т. Расстояния между базами и пунктами назначения приведены в таблице 1 в угловых скобках.

# **1. Описание транспортной задачи**

Базы	Заказчики				Запасы на базах
	$B_1$	$B_2$	$B_3$	$B_4$	
$A_1$	70	50	15	80	300 т.
$A_2$	80	90	40	60	150 т.
$A_3$	50	10	90	11	50 т.
Потребности заказчика	170 т.	110 т.	100 т.	120 т.	<del>500 т.</del> 500 т.

## **2. Формирование опорного решения**

Базы	Заказчики				Запасы на базах
	$B_1$	$B_2$	$B_3$	$B_4$	
$A_1$	170	50	15	80	300 т.
$A_2$	—	90	40	60	150 т.
$A_3$	—	10	90	11	50 т.
Потребности заказчика	170 т.	110 т.	100 т.	120 т.	500 т. 500 т.

Базы	Заказчики				Запасы на базах
	B <sub>1</sub>	B <sub>2</sub>	B <sub>3</sub>	B <sub>4</sub>	
A <sub>1</sub>	170 <span style="border: 1px solid black; padding: 2px;">70</span>	110 <span style="border: 1px solid black; padding: 2px;">50</span>	<span style="border: 1px solid black; padding: 2px;">15</span>	<span style="border: 1px solid black; padding: 2px;">80</span>	300 т.
A <sub>2</sub>	— <span style="border: 1px solid black; padding: 2px;">80</span>	— <span style="border: 1px solid black; padding: 2px;">90</span>	<span style="border: 1px solid black; padding: 2px;">40</span>	<span style="border: 1px solid black; padding: 2px;">60</span>	150 т.
A <sub>3</sub>	— <span style="border: 1px solid black; padding: 2px;">50</span>	— <span style="border: 1px solid black; padding: 2px;">10</span>	<span style="border: 1px solid black; padding: 2px;">90</span>	<span style="border: 1px solid black; padding: 2px;">11</span>	50 т.
Потребности заказчика	170 т.	110 т.	100 т.	120 т.	500 т. <hr style="width: 100%; border: 0.5px solid black;"/>

Базы	Заказчики				Запасы на базах
	B <sub>1</sub>	B <sub>2</sub>	B <sub>3</sub>	B <sub>4</sub>	
A <sub>1</sub>	170 <span style="border: 1px solid black; padding: 2px;">70</span>	110 <span style="border: 1px solid black; padding: 2px;">50</span>	20 <span style="border: 1px solid black; padding: 2px;">15</span>	— <span style="border: 1px solid black; padding: 2px;">80</span>	300 т.
A <sub>2</sub>	— <span style="border: 1px solid black; padding: 2px;">80</span>	— <span style="border: 1px solid black; padding: 2px;">90</span>	— <span style="border: 1px solid black; padding: 2px;">40</span>	— <span style="border: 1px solid black; padding: 2px;">60</span>	150 т.
A <sub>3</sub>	— <span style="border: 1px solid black; padding: 2px;">50</span>	— <span style="border: 1px solid black; padding: 2px;">10</span>	— <span style="border: 1px solid black; padding: 2px;">90</span>	— <span style="border: 1px solid black; padding: 2px;">11</span>	50 т.
Потребности заказчика	170 т.	110 т.	100 т.	120 т.	500 т. <hr style="width: 100%; border: 0.5px solid black;"/>

Базы	Заказчики				Запасы на базах
	B <sub>1</sub>	B <sub>2</sub>	B <sub>3</sub>	B <sub>4</sub>	
A <sub>1</sub>	170 <span style="border: 1px solid black; padding: 2px;">70</span>	110 <span style="border: 1px solid black; padding: 2px;">50</span>	20 <span style="border: 1px solid black; padding: 2px;">15</span>	— <span style="border: 1px solid black; padding: 2px;">80</span>	300 т.
A <sub>2</sub>	— <span style="border: 1px solid black; padding: 2px;">80</span>	— <span style="border: 1px solid black; padding: 2px;">90</span>	80 <span style="border: 1px solid black; padding: 2px;">40</span>	— <span style="border: 1px solid black; padding: 2px;">60</span>	150 т.
A <sub>3</sub>	— <span style="border: 1px solid black; padding: 2px;">50</span>	— <span style="border: 1px solid black; padding: 2px;">10</span>	— <span style="border: 1px solid black; padding: 2px;">90</span>	— <span style="border: 1px solid black; padding: 2px;">11</span>	50 т.
Потребности заказчика	170 т.	110 т.	100 т.	120 т.	500 т. <hr style="width: 100%; border: 0.5px solid black;"/>

Базы	Заказчики				Запасы на базах
	B <sub>1</sub>	B <sub>2</sub>	B <sub>3</sub>	B <sub>4</sub>	
A <sub>1</sub>	170 <span style="border: 1px solid black; padding: 2px;">70</span>	110 <span style="border: 1px solid black; padding: 2px;">50</span>	20 <span style="border: 1px solid black; padding: 2px;">15</span>	— <span style="border: 1px solid black; padding: 2px;">80</span>	300 т.
A <sub>2</sub>	— <span style="border: 1px solid black; padding: 2px;">80</span>	— <span style="border: 1px solid black; padding: 2px;">90</span>	80 <span style="border: 1px solid black; padding: 2px;">40</span>	70 <span style="border: 1px solid black; padding: 2px;">60</span>	150 т.
A <sub>3</sub>	— <span style="border: 1px solid black; padding: 2px;">50</span>	— <span style="border: 1px solid black; padding: 2px;">10</span>	— <span style="border: 1px solid black; padding: 2px;">90</span>	50 <span style="border: 1px solid black; padding: 2px;">11</span>	50 т.
Потребности заказчика	170 т.	110 т.	100 т.	120 т.	500 т. <hr style="width: 100%; border: 0.5px solid black;"/>

Стоимость перевозок по опорному  
(первоначальному) плану  
составит:

$$F_{\text{нач}} = 70 \cdot 170 + 50 \cdot 110 + 15 \cdot 20 + 40 \cdot 80 \\ + 60 \cdot 70 + 11 \cdot 50 = 25650 \text{ (т.км.)}$$

# **Решение транспортной задачи методом потенциалов**

Пересчитывать опорный план  
можно с помощью потенциалов.

**Тариф  $c_{ij}$  базисных переменных**  
представляется в виде суммы

$$c_{ij} = \alpha_i + \beta_j$$

$\alpha_i$  - потенциалы баз,

$\beta_j$  – потенциалы заказчиков.

Тариф свободной клетки обозначают как  $c'_{ij}$  и называют **косвенным тарифом**.

Алгебраическая сумма тарифов свободной клетки определяется разностью истинного и косвенного тарифов.

$$s_{ij} = c_{ij} - c'_{ij}$$

Базы	Заказчики				Запасы на базах
	B <sub>1</sub>	B <sub>2</sub>	B <sub>3</sub>	B <sub>4</sub>	
A <sub>1</sub>	170 <span style="border: 1px solid black; padding: 2px;">70</span>	110 <span style="border: 1px solid black; padding: 2px;">50</span>	20 <span style="border: 1px solid black; padding: 2px;">15</span>	— <span style="border: 1px solid black; padding: 2px;">80</span>	300 т.
A <sub>2</sub>	— <span style="border: 1px solid black; padding: 2px;">80</span>	— <span style="border: 1px solid black; padding: 2px;">90</span>	80 <span style="border: 1px solid black; padding: 2px;">40</span>	70 <span style="border: 1px solid black; padding: 2px;">60</span>	150 т.
A <sub>3</sub>	— <span style="border: 1px solid black; padding: 2px;">50</span>	— <span style="border: 1px solid black; padding: 2px;">10</span>	— <span style="border: 1px solid black; padding: 2px;">90</span>	50 <span style="border: 1px solid black; padding: 2px;">11</span>	50 т.
Потребности заказчика	170 т.	110 т.	100 т.	120 т.	500 т. <hr style="width: 100%; border: 0.5px solid black;"/>

образуется система уравнений

$$\left\{ \begin{array}{l} \alpha_1 + \beta_1 = c_{11} = 70, \\ \alpha_1 + \beta_2 = c_{12} = 50, \\ \alpha_1 + \beta_3 = c_{13} = 15, \\ \alpha_2 + \beta_3 = c_{23} = 40, \\ \alpha_2 + \beta_4 = c_{24} = 60, \\ \alpha_3 + \beta_4 = c_{34} = 11. \end{array} \right.$$

Значение одного из данных неизвестных можно выбирать произвольно. Например, можно принять, что  $\alpha_1 = 0$ .

Тогда решение системы примет вид:

Значение одного из данных неизвестных можно выбирать произвольно. Например, можно принять, что  $\alpha_1 = 0$ .

Тогда решение системы примет вид:

$$\begin{array}{ll} \alpha_1 = 0, & \beta_1 = 70, \\ \alpha_2 = 25, & \beta_2 = 50, \\ \alpha_3 = -24, & \beta_3 = 15, \\ & \beta_4 = 35 \end{array}$$

Посчитаем алгебраические суммы свободных клеток

$$s_{14} = c_{14} - c'_{14} = 80 - (0 + 35) = 45$$

$$s_{21} = c_{21} - c'_{21} = c_{21} - (\alpha_2 + \beta_1) = 80 - (25 + 70) = -15,$$

$$s_{22} = c_{22} - c'_{22} = c_{22} - (\alpha_2 + \beta_2) = 90 - (25 + 50) = 15,$$

$$s_{31} = c_{31} - c'_{31} = c_{31} - (\alpha_3 + \beta_1) = 50 - (-24 + 70) = 4,$$

$$s_{32} = c_{32} - c'_{32} = c_{32} - (\alpha_3 + \beta_2) = 10 - (-24 + 50) = -16,$$

$$s_{33} = c_{33} - c'_{33} = c_{33} - (\alpha_3 + \beta_3) = 90 - (-24 + 15) = 99.$$

**Циклы пересчета** строятся только для тех свободных клеток, для которых алгебраические суммы тарифов отрицательны.

$$\begin{array}{ccccccc}
 + & & 80 - & & 20 + & & 170 - \\
 (2;1) \rightarrow & (2;3) \rightarrow & (1;3) \rightarrow & (1;1) \rightarrow & (2;1), \\
 80 & & & 100 & & & 90
 \end{array}$$

$$\begin{array}{ccccccccc}
 + & & 50 - & & 70 + & & 80 - & & 20 + & & 110 - \\
 (3;2) \rightarrow & (3;4) \rightarrow & (2;4) \rightarrow & (2;3) \rightarrow & (1;3) \rightarrow & (1;2) \rightarrow & (3;2) \\
 50 & & & 120 & & & 30 & & 70 & & 60
 \end{array}$$

Новая стоимость перевозок находится по формуле:

$$F_{\text{нов}} = F_{\text{нач}} - m \cdot \left| s_{ij} \right|$$

Т.е стоимость перевозок уменьшится на число:

$$m \cdot \left| s_{ij} \right|$$

$$m \cdot |s_{21}| = 80 \cdot 15 = 1200$$

$$m \cdot |s_{32}| = 50 \cdot 16 = 800$$

***Принимается наибольшее  
уменьшение стоимости перевозок.  
Строим таблицу,  
соответствующую самому  
выгодному циклу:***

Базы	Заказчики				Запасы на базах
	$B_1$	$B_2$	$B_3$	$B_4$	
$A_1$	70 90	50 110	15 100	80 —	300 т.
$A_2$	80 80	90 —	40 —	60 70	150 т.
$A_3$	50 —	10 —	90 —	11 50	50 т.
Потребности заказчика	170 т.	110 т.	100 т.	120 т.	500 т. 500 т.

***К новой таблице применяют еще раз метод потенциалов для минимизации стоимости перевозок до тех пор, пока алгебраические суммы тарифов для всех свободных клеток таблицы не окажутся положительными.***

Базы	Заказчики				Запасы на базах
	$B_1$	$B_2$	$B_3$	$B_4$	
$A_1$	70 140	50 60	15 100	80 -	300 т.
$A_2$	80 30	90 -	40 -	60 120	150 т.
$A_3$	50 -	10 50	90 -	11 -	50 т.
Потребности заказчика	170 т.	110 т.	100 т.	120 т.	500 т. 500 т.

$$F_{\text{опт.}} = 70 \cdot 140 + 50 \cdot 60 + 15 \cdot 100 + 80 \cdot 30 + 60 \cdot 120 + 10 \cdot 50 = 24400 \text{ (т.км.)},$$

**что меньше стоимости перевозки по первоначальному плану ( $F_{\text{нач.}} = 25650 \text{ т.км.}$ ) на 1250 т.км**

