Лектор: канд. техн. наук, доц. Афанасьева Ольга Владимировна

Раздел 3

ОСОБЕННОСТИ ПРИМЕНЕНИЯ ЗАДАЧ ЛИНЕЙНОГО ПРОГРАММИРОВАНИЯ ПРИ МОДЕЛИРОВАНИИ ПРОЦЕССОВ ФУНКЦИОНИРОВАНИЯ СЛОЖНЫХ СИСТЕМ

*Раздел 3 Особенности применения задач линейного программирования при моделировании процессов функционирования сложных систем

3.1 Особенности решения задач оптимизации методами линейного программирования

3.2 Формы записи задач линейного программирования

3.3 Геометрические методы решения задач линейного программирования

3.4 Симплексный метод

3.5 Особенности решения транспортных задач линейного программирования

* Раздел 3 Особенности применения задач линейного программирования при моделировании процессов функционирования социально-технических систем

3.1 Особенности решения задач оптимизации методами линейного программирования

Задачи математического программирования, в которых целевая функция и ограничения на область допустимых решений (управлений) являются линейными относительно управлений, называются задачами линейного программирования (ЗЛП).

3.1 Особенности решения задач оптимизации методами линейного программирования

Линейность целевой функции и ограничений означает пропорциональную зависимость их значений от значений управления.

Например, если управляемыми переменными являются объемы выпускаемой продукции разной номенклатуры, то

- при фиксированной цене за единицу продукции каждого вида объем выручки за ее реализацию пропорционален объему продукции,

- расход ресурсов на производство продукции пропорционален ее объему,

- стоимость ресурсов при фиксированной цене за единицу ресурса пропорциональна объему ресурса и т.п.

3.2 Формы записи задач линейного программирования

3.2 Формы записи задач линейного программирования

Общая (смешанная) задача линейного программирования (ЗЛП)

Общая форма ЗЛП характеризуется наличием ограничений типа равенств и неравенств. Целевая функция и ограничения суть линейные функции переменных $x_i, i = 1, 2, ..., n$:

$$z(x) = \sum_{j=1}^{n} c_j x_j \to max;$$

$$\sum_{j=1}^{n} a_{ij} x_j = b_i; i = 1, 2, ..., l; \sum_{j=1}^{n} a_{ij} x_j \le b_i; i = l+1, l+2, ..., m;$$

$$x_j \ge 0, j = 1, 2, ..., n.$$

Основная (стандартная) задача линейного программирования (ЗЛП)

Задача характеризуется наличием ограничений только типа неравенств.

Математическая формулировка:

$$z(x) = \sum_{j=1}^{n} c_j x_j \to max;$$

$$\sum_{j=1}^{n} a_{ij} x_j \le b_i; i = 1,\dots,m;$$

$$x_j \ge 0; j = 1,\dots,n.$$

Пример. Задача о максимальной прибыли предприятия.

Для изготовления каждого из n видов продукции употребляется m видов сырья, причем расход $i-ого$ вида сырья на единицу $j-ого$ вида продукции составляет a_{ij} единиц. Прибыль на единицу продукции $j-ого$ вида составляет c_j рублей. Определить, сколько единиц $x_j\left(j=\overline{1,n}\right)$ продукции каждого вида следует изготовить предприятию при условии получения максимальной прибыли, если в его распоряжении имеется $b_i\left(i=\overline{1,m}\right)$ единиц сырья каждого вида.

Каноническая задача линейного программирования (ЗЛП)

Пример. Задача о назначениях.

Имеются m механизмов для выполнения n работ. При этом каждый из механизмов должен выполнять одну и только одну работу. Производительность $j-ого$ механизма на $i-ой$ работе равна c_{ij}. Требуется распределить механизмы по работам из условий максимальной суммарной производительности.

Математическая модель задачи:

$$z(x)=\sum_{i=1}^{n}\sum_{j=1}^{n}c_{ij}x_{ij}\to max;$$

$$\sum_{j=1}^{n}x_{ij}=1; i=1,\dots,m;$$

3.2 Формы записи задач линейного программирования

Общий вид основной и соответствующей ей канонической задачи.

Основная	Каноническая
$z(x)=\sum_{j=1}^{n} c_j x_j \to max$	$z(x)=\sum_{j=1}^{n} c_j x_j \to max$
$\sum_{j=1}^{n} a_{ij} x_j \le b_i; i=1,...,m;$	$\sum_{j=1}^{n} a_{ij} x_j + x_{n+i} = b_i; i=1,...,m;$
$x_j \ge 0; j=1,...,n;$	$x_j \ge 0; j=1,...,n,n+1,n+2,...,n+m;$
$b_i \ge 0; i=1,..,m.$	$b_i \ge 0; i=1,..,m.$

Задачу на максимум всегда можно свести к эквивалентной задаче на минимум, так как

$$\max z(x)=\min\{-z(x)\}.$$

Поэтому вместо задачи с критерием оптимальности

$$z(x)\to max$$

можно решать задачу с критерием оптимальности

$$f(x)=-z(x)\to min.$$

3.2 Формы записи задач линейного программирования

Методы линейного программирования позволяют решать широкий круг задач коммерческо-организационной деятельности, таких как:

– планирование товарооборота;
– прикрепление торговых предприятий к поставщикам;
– организация рациональных схем доставки товаров (транспортная задача);
– распределение работников по должностям;
– распределение ресурсов;
– планирование капиталовложений;
– замена оборудования;
– определение оптимального ассортимента товаров в условиях ограничения торговых площадей

и ряд других задач.

3.2 Формы записи задач линейного программирования

Все множество методов решения задач линейного программирования можно разделить на следующие группы:

1. Графические (геометрические) методы. Они очень просты, имеют малую трудоемкость, большую наглядность, но могут быть использованы только тогда, когда число переменных равно двум (максимум трем для объемного изображения).
2. Точные (строгие) методы. Они позволяют получать оптимальное решение.

(Распределительный метод (метод потенциалов для транспортной задачи); метод разрешающих множителей; симплекс-метод.)

3. Приближенные методы. Их существует более десяти. С их помощью можно получить оптимальное или близкое к оптимальному решение.

- метод индексов;
- метод простейших аппроксимаций;
- метод круговых разностей.

3.2.1 Термины и определения общей и основной задачи линейного программирования

Определение 1.1. Общей задачей линейного программирования называется задача, которая состоит в определении максимального (минимального) значения функции

$$F=\sum_{j=1}^{n} c_j x_i \tag{4}$$

при условии

$$\sum_{j=1}^{n} a_{ij} x_i \le b_i \quad (i=\overline{1,r}), \tag{5}$$

$$\sum_{j=1}^{n} a_{ij} x_i = b_i \quad (i=\overline{r+1,m}), \tag{6}$$

$$x_1 \ge 0 \quad (j=\overline{1,l},\ l\le n), \tag{7}$$

где a_{ij}, b_i, c_j - заданные постоянные величины и $r\le m$.

Определение 1.2 Функция (4) называется целевой функцией (или линейной формой) задачи (4) - (7), а условия (5) – (7) – *ограничениями* данной задачи.

3.2.1 Термины и определения общей и основной задачи линейного программирования

$$F = \sum_{j=1}^{n} c_j x_i \qquad (4)$$

$$\sum_{j=1}^{n} a_{ij} x_i \le b_i \quad (i=\overline{1,r}), \qquad (5)$$

$$\sum_{j=1}^{n} a_{ij} x_i = b_i \quad (i=\overline{r+1,m}), \qquad (6)$$

$$x_1 \ge 0 \quad (j=\overline{1,l},\ l \le n), \qquad (7)$$

Определение 1.3. Стандартной (или симметричной) задачей линейного программирования называется задача, которая состоит в определении максимального значения функции (4) при выполнении условий (5) и (7), где $r = m$ и $l = n$.

Определение 1.4. Канонической (или основной) задачей линейного программирования называется задача, которая состоит в определении максимального значения функции (4) при выполнении условий (6) и (7), где $r = 0$ и $l = n$.

3.2.1 Термины и определения общей и основной задачи линейного программирования

$$F=\sum_{j=1}^{n} c_j x_i \qquad (4)$$

$$\sum_{j=1}^{n} a_{ij} x_i \le b_i \quad (i=\overline{1,r}), \qquad (5)$$

$$\sum_{j=1}^{n} a_{ij} x_i = b_i \quad (i=\overline{r+1,m}), \qquad (6)$$

$$x_1 \ge 0 \quad (j=\overline{1,l},\ l\le n), \qquad (7)$$

Определение 1.5. Совокупность чисел X=(x_1,x_2,…,x_n), удовлетворяющих ограничениям задачи (5) – (7), называется *допустимым решением (или планом).*

Определение 1.6. План X* = (x_1*,x_2*,…,x_n*), при котором целевая функция задачи (4) принимает свое максимальное (минимальное) значение, называется *оптимальным*.

Значение целевой функции (4) при плане X будем обозначать через F(X).

Следовательно, X* - оптимальный план задачи, если для любого X выполняется неравенство F(X) ≤F(X*) [соответственно F(X)≥F(X*)].

F= $\sum_{j=1}^{n} c_j x_i$

$\sum_{j=1}^{n} a_{ij} x_i = b_i$ (i=$\overline{r+1, m}$),

$x_1 \geq 0$ (j=$\overline{1, l}$, l≤ n),

Перепишем эту задачу линейного программирования в векторной форме: найти максимум функции

$$F = CX \tag{8}$$

при условиях

$$x_1 P_1 + x_2 P_2 + \cdots + x_n P_n = P_0, \tag{9}$$

$$X \geq 0, \tag{10}$$

где

C=(c_1; c_2; ... ; c_n),

X=(x_1; x_2; ... ; x_n);

CX – скалярное произведение;

$P_1, \ldots, P_n$ и P_0и – m-мерные вектор-столбцы, составленные из коэффициентов при неизвестных и свободных членах системы уравнений задачи:

$$P_0 = \begin{pmatrix} b_1 \\ b_2 \\ \vdots \\ b_m \end{pmatrix}; P_1 = \begin{pmatrix} a_{11} \\ a_{21} \\ \vdots \\ a_{m1} \end{pmatrix}; P_2 = \begin{pmatrix} a_{12} \\ a_{22} \\ \vdots \\ a_{m2} \end{pmatrix}; \ldots; P_n = \begin{pmatrix} a_{1n} \\ a_{2n} \\ \vdots \\ a_{mn} \end{pmatrix}.$$

3.2.1 Термины и определения общей и основной задачи линейного программирования

найти максимум функции

$$F = CX \tag{8}$$

при условиях

$$x_1P_1 + x_2P_2 + \cdots + x_nP_n = P_0, \tag{9}$$

$$X \geq 0, \tag{10}$$

Определение 1.7. План $X = (x_1; x_2; \ldots; x_n)$ называется *опорным планом,* основной задачи линейного программирования, если система векторов P_j, входящих в разложение (9) с положительными коэффициентами x_i линейно независима.

Определение 1.8. Опорный план называется *невырожденным,* если он содержит ровно m положительных компонент, в противном случае он называется *вырожденным.*

3.2.1 Термины и определения общей и основной задачи линейного программирования

Определение 1.9. Пусть $X_1; X_2; \dots; X_n$ – произвольные точки евклидова пространства E_n. *Выпуклой линейной комбинацией этих точек* называется сумма $a_1X_1 + a_2X_2 + \cdots + a_nX_n$где а – произвольные неотрицательные числа, сумма которых равна 1:

$$\sum_{j=1}^{n} a_i = 1, \quad a_i \geq 0(j=\overline{1, n}).$$

*Определение 1.10.*Множество называется *выпуклым,* если вместе с любыми двумя своими точками оно содержит и их произвольную выпуклую линейную комбинацию.

Определение 1.11. Точка X выпуклого множества называется *угловой,* если она не может быть представлена в виде выпуклой линейной комбинации каких-нибудь двух других различных точек данного множества.

3.2.1 Термины и определения общей и основной задачи линейного программирования

Теорема 1.1. *Множество планов основной задачи линейного программирования является выпуклым (если оно не пусто).*

Определение 1.12. Непустое множество планов основной задачи линейного программирования называется *многогранником решений,* а всякая угловая точка многогранника решений – *вершиной.*

Теорема 1.2. *Если основная задача линейного программирования имеет оптимальный план, то максимальное значение целевая функция задачи принимает в одной из вершин многогранника решений. Если максимальное значение целевая функция задачи принимает более чем в одной вершине, то она принимает его во всякой точке, являющейся выпуклой линейной комбинацией этих вершин.*

3.2.1 Термины и определения общей и основной задачи линейного программирования

найти максимум функции

$$F = CX \tag{8}$$

при условиях

$$x_1P_1 + x_2P_2 + \cdots + x_nP_n = P_0, \tag{9}$$

$$X \geq 0, \tag{10}$$

Теорема 1.3. *Если система векторов $P_1, P_2, \ldots, P_r$ $(r \leq n)$ в разложении (9) линейно независима и такова, что*

$$x_1P_1 + x_2P_2 + \cdots + x_nP_n = P_0,$$

где все $x_i \geq 0$, то точка $X = (x_1;\ x_2; \ldots;\ x_r; 0; \ldots, 0)$ *является вершиной многогранника решений.*

Теорема 1.4. Если $X = (x_1;\ x_2; \ldots; x_n)$ - *вершина многогранника решений, то векторы P_j, соответствующие положительным x_i в разложении (9), линейно независимы.*

3.3 Геометрические методы решения задач линейного программирования

3.3 Геометрические методы решения задач линейного программирования

Найдем решение задачи, состоящей в определении максимального значения функции

$$F = c_1x_1 + c_2x_2 \qquad (11)$$

$$a_{i1}x_1 + a_{i2}x_2 \leq b_i (j=\overline{1, r}), \qquad (12)$$

$$x_i \geq 0 \ (j = 1,2). \qquad (13)$$

Каждое из неравенств (12), (13) системы ограничений задачи геометрически определяет полуплоскость соответственно с граничными прямыми $a_{i1}x_1 + a_{i2}x_2 \leq b_i (j=\overline{1, r})$, $x_1 = 0$ и $x_2 = 0$.

Так как множество точек пересечения данных полуплоскостей – выпуклое, то областью допустимых решений задачи (11) – (13) является выпуклое множество, которое называется *многоугольником решений* (введенный ранее термин «многогранник решений» обычно употребляется, если $n \geq 3$).

Таким образом, исходная задача линейного программирования состоит в нахождении такой точки многоугольника решений, в которой целевая функция *F* принимает максимальное значение.

3.3 Геометрические методы решения задач линейного программирования

Для определения данной вершины построим линию уровня $c_1x_1 + c_2x_2 = h$ (где h – некоторая постоянная)

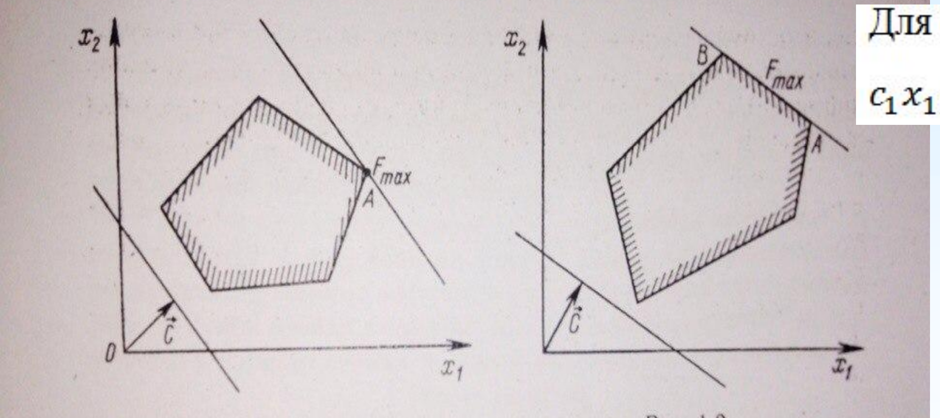


Рис. 1.1
Рис. 1.2

Рис. 1 Случай, когда целевая функция принимает максимальное значение в единственной точке A.

Рис. 2 Случай, когда целевая функция принимает максимальное значение в любой точке отрезка AB.

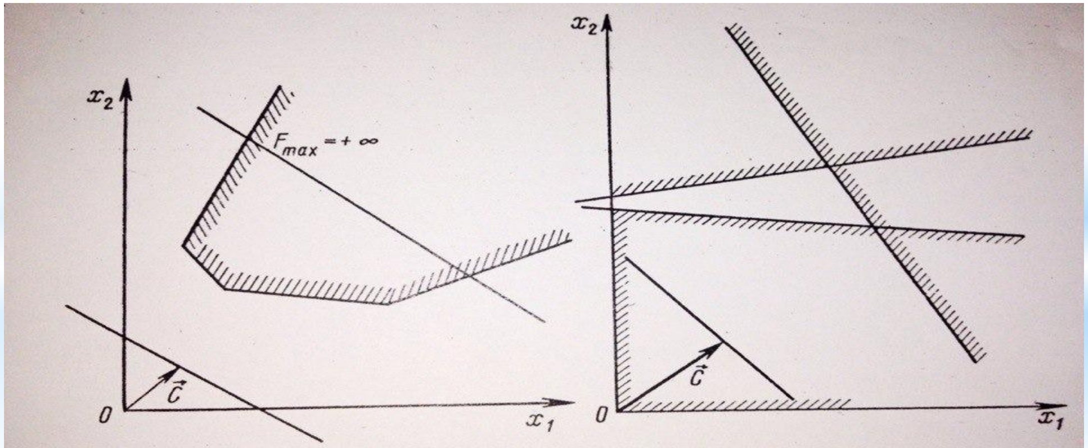


Рис. 1.3
Рис. 1.4

Рис. 3 Случай, когда целевая функция не ограничена сверху на множестве допустимых решений. Рис. 4 Случай, когда система ограничений задачи несовместна.

Этапы нахождение решения задачи линейного программирования на основе ее геометрической интерпретации:

1. Строят прямые, уравнения которые получаются в результате замены в ограничениях знаков неравенств на знаки точных равенств.

2. Находят полуплоскости, определяемые каждым из ограничений задачи.

3. Находят многоугольник решений.

4. Строят вектор $C = (c_1; c_2)$.

5. Строят прямую, $c_1x_1 + c_2x_2 = h$ проходящую через многоугольник решений.

6. Передвигают прямую $c_1x_1 + c_2x_2 = h$ в направлении вектора С, в результате чего-либо находят точку (точки), в которой целевая функция принимает максимальное значение, либо устанавливают неограниченность сверху функции на множестве планов.

7. Определяют координаты точки максимума функции и вычисляют значение целевой функции в этой точке.

Методические рекомендации к выполнению контрольной работы

Задание №2

Условие 2 задания

Для производства двух видов изделий *A* и *B* предприятие использует три вида сырья. Нормы расхода сырья каждого вида на изготовление единицы продукции данного вида приведены в таблице. В ней же указаны прибыль от реализации одного изделия каждого вида и общее количество сырья данного вида, которое может быть использовано предприятием.

Виды сырья	Нормы расхода сырья (кг) на одно изделие		Общее количество сырья (кг)
	A	B	
I	12	4	300 +(*)
II	4	4	120 +(*)
III	3	12	252 +(*)
Прибыль от реализации одного изделия (тыс. руб.)	30	40	

Учитывая, что изделия *A* и *B* могут производиться в любых соотношениях (сбыт обеспечен), требуется составить такой план их выпуска, при котором прибыль предприятия от реализации всех изделий является максимальной.

Для производства двух видов изделий *A* и *B* предприятие использует три вида сырья. Нормы расхода сырья каждого вида на изготовление единицы продукции данного вида приведены в таблице. В ней же указаны прибыль от реализации одного изделия каждого вида и общее количество сырья данного вида, которое может быть использовано предприятием.

Виды сырья	Нормы расхода сырья (кг) на одно изделие		Общее количество сырья (кг)
	A	B	
I II III	12 4 3	4 4 12	300 120 252
Прибыль от реализации одного изделия (тыс. руб.)	30	40	

Учитывая, что изделия *A* и *B* могут производиться в любых соотношениях (сбыт обеспечен), требуется составить такой план их выпуска, при котором прибыль предприятия от реализации всех изделий является максимальной.

Виды сырья	Нормы расхода сырья (кг) на одно изделие		Общее количество сырья (кг)
	А	В	
I	12	4	300
II	4	4	120
III	3	12	252
Прибыль от реализации одного изделия (тыс. руб.)	30	40	

Решение. Предположим, что предприятие изготовит x_1 изделий вида А и x_2 изделий вида В. Поскольку производство продукции ограничено имеющимся в распоряжении предприятия сырьем каждого вида и количество изготовляемых изделий не может быть отрицательным, должны выполняться неравенства

$$12x_1 + 4x_2 \le 300,$$

$$4x_1 + 4x_2 \le 120,$$

$$3x_1 + 12x_2 \le 252,$$

$$x_1, x_2 \ge 0.$$

Виды сырья	Нормы расхода сырья (кг) на одно изделие		Общее количество сырья (кг)
	A	B	
I II III	12 4 3	4 4 12	300 120 252
Прибыль от реализации одного изделия (тыс. руб.)	30	40	

$$12x_1 + 4x_2 \leq 300,$$
$$4x_1 + 4x_2 \leq 120,$$
$$3x_1 + 12x_2 \leq 252,$$
$$x_1, x_2 \geq 0.$$

Общая прибыль от реализации x_1 изделий вида A и x_2 изделий вида B составит F = $30x_1 + 40x_2$.

Таким образом, мы приходим к следующей математической задаче: среди всех неотрицательных решений данной системы линейных неравенств требуется найти такое, при котором функция F принимает максимальное значение.

Найдем решение сформулированной задачи, используя ее геометрическую интерпретацию. Сначала определим многоугольник решений. Для этого в неравенствах системы ограничений и условиях неотрицательности переменных знаки неравенств заменим на знаки точных равенств и найдем соответствующие прямые:

$$12x_1 + 4x_2 = 300, \quad \text{(I)}$$

$$4x_1 + 4x_2 = 120, \quad \text{(II)}$$

$$3x_1 + 12x_2 = 252, \quad \text{(III)}$$

$$x_1 = 0, \quad \text{(IV)}$$

$$x_2 = 0. \quad \text{(V)}$$

$$12x_1 + 4x_2 = 300, \quad \text{(I)}$$

$$4x_1 + 4x_2 = 120, \quad \text{(II)}$$

$$3x_1 + 12x_2 = 252, \quad \text{(III)}$$

$$x_1 = 0, \quad \text{(IV)}$$

$$x_2 = 0. \quad \text{(V)}$$

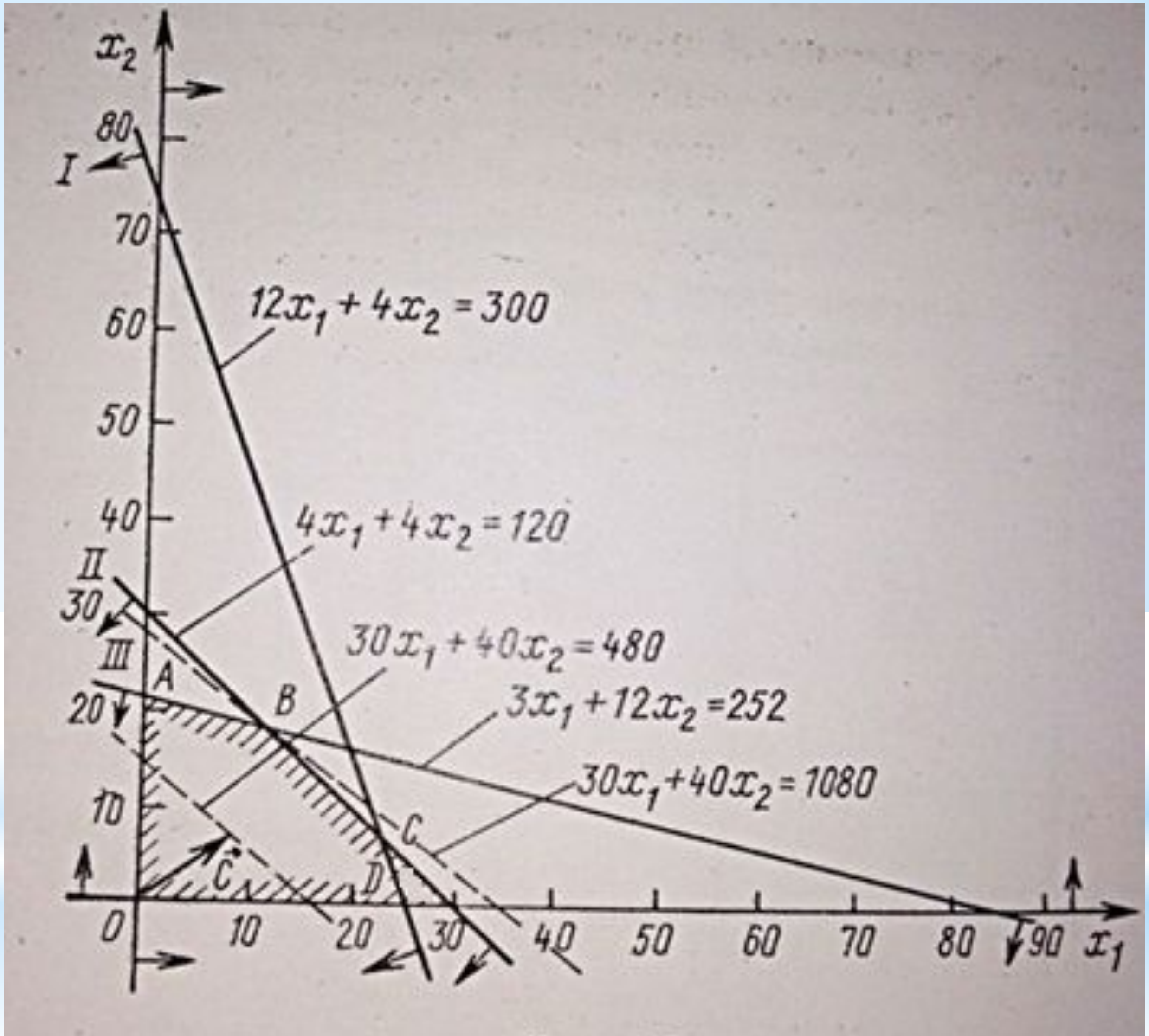


Рис. 1.5

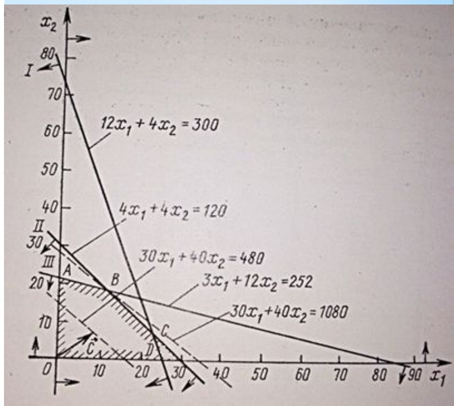


Рис. 1.5

Каждая из построенных прямых делит плоскость на две полуплоскости. Координаты точек одной полуплоскости удовлетворяют исходному неравенству, а другой – нет. Чтобы определить искомую полуплоскость, нужно взять какую-нибудь точку, принадлежащую одной из полуплоскостей, и проверить, удовлетворяют ли ее координаты данному неравенству. Если координаты взятой точки удовлетворяют данному неравенству, то искомой является та полуплоскость, которой принадлежит эта точка, в противном случае – другая полуплоскость.

Найдем, например, полуплоскость, определяемую неравенством

$12x_1 + 4x_2 < 300.$

Для этого, построив прямую $12x_1 + 4x_2 = 300$ (на рис. 5 эта прямая I), возьмем какую-нибудь точку, принадлежащую одной из двух полученных полуплоскостей, например точку O(0; 0).

Координаты этой точки удовлетворяют неравенству

12 * 0 + 4 * 0 < 300;

значит, полуплоскость, которой принадлежит точка O(0; 0), определяется неравенством

$12x_1 + 4x_2 < 300.$

Это и показано стрелками на рис. 5.

Пересечение полученных полуплоскостей и определяет многоугольник решений данной задачи.

Как видно из рис. 1.5, многоугольником решений является пятиугольник *OABCD*. Координаты любой точки, принадлежащей этому пятиугольнику, удовлетворяют данной системе неравенств и условию неотрицательности переменных. Поэтому сформулированная задача будет решена, если мы сможем найти точку, принадлежащую пятиугольнику *OABCD*, в которой функция F принимает максимальное значение. Чтобы найти указанную точку, построим вектор С = (30; 40) и прямую

$$30x_1 + 40x_2 = h,$$

где h– некоторая постоянная такая, что прямая

$$30x_1 + 40x_2 = h,$$

имеет общие точки с многоугольником решений.

Положим, например, $h = 480$ и построим прямую

$$30x_1 + 40x_2 = 480.$$

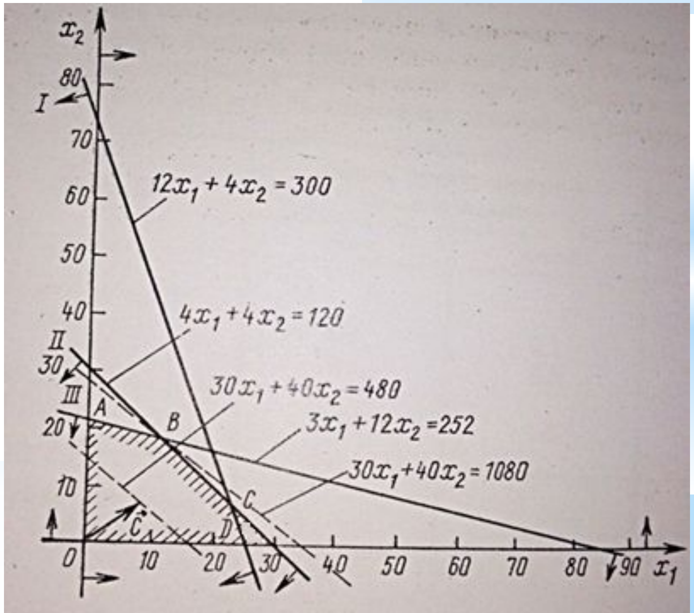


Рис. 1.5

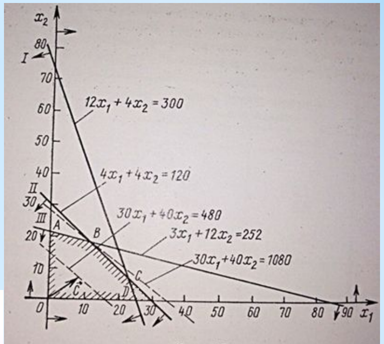


Рис. 1.5

Если теперь взять какую-нибудь точку, принадлежащую построенной прямой и многоугольнику решений, то ее координаты определяют такой план производства изделий *A* и *B*, при котором прибыль от их реализации равна 480 тыс. руб. Далее, полагая *h* равным некоторому числу, большему чем 480, мы будем получать различные параллельные прямые. Если они имеют общие точки с многоугольником решений, то эти точки определяют планы производства изделий *A* и *B*, при которых прибыль от их реализации превзойдет 480 тыс. руб.

Перемещая построенную прямую

$$30x_1 + 40x_2 = 480$$

в направлении вектора С видим, что последней общей точкой ее с многоугольником решений задачи служит точка *B*. Координаты этой точки и определяют план выпуска изделий *A* и *B*, при котором прибыль от их реализации является максимальной.

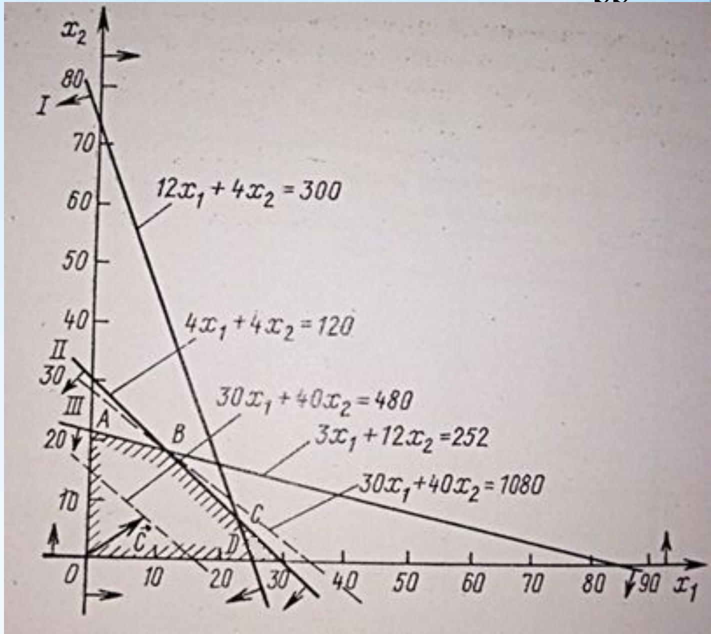


Рис. 1.5

Найдем координаты точки *B* как точки пересечения прямых II и III. Следовательно, ее координаты удовлетворяют уравнениям этих прямых

$$4x_1 + 4x_2 = 120,$$

$$3x_1 + 12x_2 = 252.$$

Решив эту систему уравнений, получим $x_1^* = 12$, $x_2^* = 18$. Следовательно, если предприятие изготовит 12 изделий вида А и 18 изделий вида В, то оно получит максимальную прибыль, равную

$$F_{max} = 30*12+40*18=1080 \text{ тыс. руб.}$$

3.4 Симплексный метод

Симплексный метод

Пусть требуется найти максимальное значение функции

$$F = c_1x_1 + c_2x_2 + \cdots + c_nx_n$$

при условиях

$$\begin{cases} x_1 + a_{1m+1}x_{m+1} + \cdots + a_{1n}x_n = b_1 \\ x_2 + a_{2m+1}x_{m+1} + \cdots + a_{2n}x_n = b_2 \\ \qquad \ldots \\ x_m + a_{mm+1}x_{m+1} + \cdots + a_{mn}x_n = b_m \end{cases}$$

$$x_j \geq 0 \ \ (j=1,\ldots,n).$$

Здесь

a_{ij}, b_i и c_i $(i=\overline{1,m})$; $(j=\overline{1,n})$ – заданные постоянные числа ($m < n$ и $b_i > 0$).

Пусть требуется найти максимальное значение функции

$$F = c_1 x_1 + c_2 x_2 + \cdots + c_n x_n$$

при условиях

$$\begin{cases} x_1 + a_{1m+1}x_{m+1} + \cdots + a_{1n}x_n = b_1 \\ x_2 + a_{2m+1}x_{m+1} + \cdots + a_{2n}x_n = b_2 \\ \dots \\ x_m + a_{mm+1}x_{m+1} + \cdots + a_{mn}x_n = b_m \end{cases}$$

$$x_j \geq 0 \ \ (j=1, \dots, n).$$

Векторная форма данной задачи имеет следующий вид:

найти максимум функции

$$F = \sum_{j=1}^{n} c_j x_i \qquad (1)$$

при условиях

$$x_1 P_1 + x_2 P_2 + \cdots + x_m P_m + \cdots + x_n P_n = P_0, \qquad (2)$$

$$x_i \geq 0 \ \ (j=\overline{1,n}), \qquad (3)$$

где

$$P_1 = \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ \vdots \\ 0 \end{pmatrix};\ P_2 = \begin{pmatrix} 0 \\ 1 \\ \vdots \\ 0 \end{pmatrix};\ \dots;\ P_m = \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ \vdots \\ 1 \end{pmatrix};$$

$$P_{m+1} = \begin{pmatrix} a_{1m+1} \\ a_{2m+1} \\ \vdots \\ a_{mm+1} \end{pmatrix};\ \dots;\ P_n = \begin{pmatrix} a_{1n} \\ a_{2n} \\ \vdots \\ a_{mn} \end{pmatrix};\ \ P_0 = \begin{pmatrix} b_1 \\ b_2 \\ \vdots \\ b_m \end{pmatrix}.$$

Векторная форма данной задачи имеет следующий вид:

найти максимум функции

$$F= \sum_{j=1}^{n} c_j x_i \qquad (1)$$

при условиях

$$x_1 P_1 + x_2 P_2 + \cdots + x_m P_m + \cdots + x_n P_n = P_0, \qquad (2)$$

$$x_i \geq 0 \quad (j=\overline{1,n}), \qquad (3)$$

где

$$P_1=\begin{pmatrix}1\\0\\\vdots\\0\end{pmatrix};\ P_2=\begin{pmatrix}0\\1\\\vdots\\0\end{pmatrix};\ \ldots;\ P_m=\begin{pmatrix}0\\0\\\vdots\\1\end{pmatrix};$$

$$P_{m+1}=\begin{pmatrix}a_{1m+1}\\a_{2m+1}\\\vdots\\a_{mm+1}\end{pmatrix};\ \ldots;\ P_n=\begin{pmatrix}a_{1n}\\a_{2n}\\\vdots\\a_{mn}\end{pmatrix};\quad P_0=\begin{pmatrix}b_1\\b_2\\\vdots\\b_m\end{pmatrix}.$$

Так как

$$b_1 P_1 + b_2 P_2 + \cdots + b_m P_m = P_0,$$

то по определению опорного плана

$$X=(b_1;\ b_2;\ \ldots;\ b_m;\ 0;\ \ldots;\ 0)$$

является опорным планом данной задачи (последние $n-m$ компонент вектора X равны нулю).

Векторная форма данной задачи имеет следующий вид:

найти максимум функции

$$F=\sum_{j=1}^{n} c_j x_i \qquad (1)$$

при условиях

$$x_1P_1 + x_2P_2 + \cdots + x_mP_m + \cdots + x_nP_n = P_0, \qquad (2)$$

$$x_i \geq 0 \quad (j=\overline{1,n}), \qquad (3)$$

где

$$P_1=\begin{pmatrix}1\\0\\\vdots\\0\end{pmatrix};\ P_2=\begin{pmatrix}0\\1\\\vdots\\0\end{pmatrix};\ \ldots;\ P_m=\begin{pmatrix}0\\0\\\vdots\\1\end{pmatrix};$$

$$P_{m+1}=\begin{pmatrix}a_{1m+1}\\a_{2m+1}\\\vdots\\a_{mm+1}\end{pmatrix};\ \ldots;\ P_n=\begin{pmatrix}a_{1n}\\a_{2n}\\\vdots\\a_{mn}\end{pmatrix};\quad P_0=\begin{pmatrix}b_1\\b_2\\\vdots\\b_m\end{pmatrix}.$$

Система единичных векторов $P_1, P_2, \ldots, P_m$ образуют базис m – мерного пространства.

Каждый из векторов $P_1, P_2, \ldots, P_n$, а так же вектора P_0 могут быть представлены в виде линейной комбинации векторов данного базиса.

Векторная форма данной задачи имеет следующий вид:

найти максимум функции

$$F=\sum_{j=1}^{n} c_j x_i \qquad (1)$$

при условиях

$$x_1P_1 + x_2P_2 + \cdots + x_mP_m + \cdots + x_nP_n = P_0, \qquad (2)$$

$$x_i \geq 0 \quad (j=\overline{1,n}), \qquad (3)$$

где

$$P_1=\begin{pmatrix}1\\0\\\vdots\\0\end{pmatrix};\ P_2=\begin{pmatrix}0\\1\\\vdots\\0\end{pmatrix};\ \ldots;\ P_m=\begin{pmatrix}0\\0\\\vdots\\1\end{pmatrix};$$

$$P_{m+1}=\begin{pmatrix}a_{1m+1}\\a_{2m+1}\\\vdots\\a_{mm+1}\end{pmatrix};\ \ldots;\ P_n=\begin{pmatrix}a_{1n}\\a_{2n}\\\vdots\\a_{mn}\end{pmatrix};\quad P_0=\begin{pmatrix}b_1\\b_2\\\vdots\\b_m\end{pmatrix}.$$

Пусть

$$P_j = \sum_{i=1}^{m} x_{ij} P_i (j = \overline{0,n}).$$

Предположим

$$z_j = \sum_{i=1}^{m} c_i x_{ij} (j = \overline{1,n}).$$

$$\Delta_j = z_j - c_j (j = \overline{1,n})$$

Так как векторы $P_1, P_2, \ldots, P_m$- единичные,

то

$$x_{ij} = a_{ij},$$

$$z_j=\sum_{i=1}^{m} c_i \mathrm{a}_{ij},$$

$$\Delta_j=\sum_{i=1}^{m} c_i \mathrm{a}_{ij} - c_j.$$

Теорема 1. *(Признак оптимальности опорного плана).*

Опорный план $X^*=(x_1^*, x_2^*, \dots, x_m^*, 0,0,\dots,0)$, задачи (1) – (3) является оптимальным, если $\Delta_j \geq 0$ для любого j $(j = \overline{1, n})$.

Таблица 1.3

i	Базис	C_δ	P_0	C_1	C_2	…	C_r	…	C_m	C_{m+1}	…	C_k	…	C_n
				P_1	P_2	…	P_r	…	P_m	P_{m+1}	…	P_k	…	P_n
1	P_1	c_1	b_1	1	0	…	0	…	0	a_{1m+1}	…	a_{1k}	…	a_{1n}
2	P_2	c_2	b_2	0	1	…	0	…	0	a_{2m+1}	…	a_{2k}	…	a_{2n}
.	.	.	.	.	.	.	.	.	.	.	.	.	.	.
.	.	.	.	.	.	.	.	.	.	.	.	.	.	.
.	.	.	.	.	.	.	.	.	.	.	.	.	.	.
r	P_r	c_r	b_r	0	0	…	1	…	0	a_{rm+1}	…	a_{rk}	…	a_{rn}
.	.	.	.	.	.	.	.	.	.	.	.	.	.	.
.	.	.	.	.	.	.	.	.	.	.	.	.	.	.
.	.	.	.	.	.	.	.	.	.	.	.	.	.	.
m	P_m	c_m	b_m	0	0	…	0	…	1	a_{mm+1}	…	a_{mk}	…	a_{mn}
m+1			F_0	0	0	…	0	…	0	Δ_{m+1}	…	Δ_k	…	Δ_n

Пусть требуется найти максимальное значение функции

$$F = c_1 x_1 + c_2 x_2 + \cdots + c_n x_n$$

при условиях

$$\begin{cases} x_1 + a_{1m+1} x_{m+1} + \cdots + a_{1n} x_n = b_1 \\ x_2 + a_{2m+1} x_{m+1} + \cdots + a_{2n} x_n = b_2 \\ \qquad\qquad \cdots \\ x_m + a_{mm+1} x_{m+1} + \cdots + a_{mn} x_n = b_m \end{cases}$$

$$x_j \geq 0 \ \ (j=1, \ldots, n).$$

Таблица 1.3

i	Базис	C_δ	P_0	C_1	C_2	…	C_r	…	C_m	C_{m+1}	…	C_k	…	C_n
				P_1	P_2	…	P_r	…	P_m	P_{m+1}	…	P_k	…	P_n
1	P_1	c_1	b_1	1	0	…	0	…	0	a_{1m+1}	…	a_{1k}	…	a_{1n}
2	P_2	c_2	b_2	0	1	…	0	…	0	a_{2m+1}	…	a_{2k}	…	a_{2n}
.	.	.	.	.	.	.	.	.	.	.	.	.	.	.
.	.	.	.	.	.	.	.	.	.	.	.	.	.	.
.	.	.	.	.	.	.	.	.	.	.	.	.	.	.
r	P_r	c_r	b_r	0	0	…	1	…	0	a_{rm+1}	…	a_{rk}	…	a_{rn}
.	.	.	.	.	.	.	.	.	.	.	.	.	.	.
.	.	.	.	.	.	.	.	.	.	.	.	.	.	.
.	.	.	.	.	.	.	.	.	.	.	.	.	.	.
m	P_m	c_m	b_m	0	0	…	0	…	1	a_{mm+1}	…	a_{mk}	…	a_{mn}
m+1			F_0	0	0	…	0	…	0	Δ_{m+1}	…	Δ_k	…	Δ_n

В столбце $С_б$ этой таблицы записывают коэффициенты при неизвестных целевой функции, имеющие те же индексы, что и векторы данного базиса.

Векторная форма данной задачи имеет следующий вид:

найти максимум функции

$$F=\sum_{j=1}^{n} c_j x_i \qquad (1)$$

при условиях

$$x_1P_1 + x_2P_2 + \cdots + x_mP_m + \cdots + x_nP_n = P_0, \qquad (2)$$

$$x_i \geq 0 \ \ (j=\overline{1,n}), \qquad (3)$$

где

$$P_1=\begin{pmatrix}1\\0\\ \vdots\\0\end{pmatrix};\ P_2=\begin{pmatrix}0\\1\\ \vdots\\0\end{pmatrix};\ \ldots;\ P_m=\begin{pmatrix}0\\0\\ \vdots\\1\end{pmatrix};$$

$$P_{m+1}=\begin{pmatrix}a_{1m+1}\\a_{2m+1}\\ \vdots\\a_{mm+1}\end{pmatrix};\ \ldots;\ P_n=\begin{pmatrix}a_{1n}\\a_{2n}\\ \vdots\\a_{mn}\end{pmatrix};\ \ P_0=\begin{pmatrix}b_1\\b_2\\ \vdots\\b_m\end{pmatrix}.$$

Пусть требуется найти максимальное значение функции

$$F = c_1x_1 + c_2x_2 + \cdots + c_nx_n$$

при условиях

$$\begin{cases} x_1 + a_{1m+1}x_{m+1} + \cdots + a_{1n}x_n = b_1 \\ x_2 + a_{2m+1}x_{m+1} + \cdots + a_{2n}x_n = b_2 \\ \ldots \\ x_m + a_{mm+1}x_{m+1} + \cdots + a_{mn}x_n = b_m \end{cases}$$

$$x_j \geq 0 \ \ (j=1,\ldots,n).$$

Таблица 1.3

		C_δ	P_0	C_1	C_2	…	C_r	…	C_m	C_{m+1}	…	C_k	…	C_n
				P_1	P_2	…	P_r	…	P_m	P_{m+1}	…	P_k	…	P_n
1	P_1	c_1	b_1	1	0	…	0	…	0	a_{1m+1}	…	a_{1k}	…	a_{1n}
2	P_2	c_2	b_2	0	1	…	0	…	0	a_{2m+1}	…	a_{2k}	…	a_{2n}
.	.	.	.	.	.	.	.	.	.	.	.	.	.	.
.	.	.	.	.	.	.	.	.	.	.	.	.	.	.
.	.	.	.	.	.	.	.	.	.	.	.	.	.	.
r	P_r	c_r	b_r	0	0	…	1	…	0	a_{rm+1}	…	a_{rk}	…	a_{rn}
.	.	.	.	.	.	.	.	.	.	.	.	.	.	.
.	.	.	.	.	.	.	.	.	.	.	.	.	.	.
.	.	.	.	.	.	.	.	.	.	.	.	.	.	.
m	P_m	c_m	b_m	0	0	…	0	…	1	a_{mm+1}	…	a_{mk}	…	a_{mn}
m+1			F_0	0	0	…	0	…	0	Δ_{m+1}	…	Δ_k	…	Δ_n

В столбце P_0 записывают положительные компоненты исходного опорного плана, в нем же в результате вычислений получают положительные компоненты оптимального плана. Столбцы векторов P_j представляют собой коэффициенты разложения этихвекторов по векторам данного базиса.

Векторная форма данной задачи имеет следующий вид:

найти максимум функции

$$F=\sum_{j=1}^{n} c_j x_i \qquad (1)$$

при условиях

$$x_1P_1 + x_2P_2 + \cdots + x_mP_m + \cdots + x_nP_n = P_0, \qquad (2)$$

$$x_i \geq 0 \ \ (j=\overline{1,n}), \qquad (3)$$

где

$$P_1=\begin{pmatrix}1\\0\\\vdots\\0\end{pmatrix};\ P_2=\begin{pmatrix}0\\1\\\vdots\\0\end{pmatrix};\ \ldots;\ P_m=\begin{pmatrix}0\\0\\\vdots\\1\end{pmatrix};$$

$$P_{m+1}=\begin{pmatrix}a_{1m+1}\\a_{2m+1}\\\vdots\\a_{mm+1}\end{pmatrix};\ \ldots;\ P_n=\begin{pmatrix}a_{1n}\\a_{2n}\\\vdots\\a_{mn}\end{pmatrix};\quad P_0=\begin{pmatrix}b_1\\b_2\\\vdots\\b_m\end{pmatrix}.$$

Пусть требуется найти максимальное значение функции

$$F = c_1x_1 + c_2x_2 + \cdots + c_nx_n$$

при условиях

$$\begin{cases} x_1 + a_{1m+1}x_{m+1} + \cdots + a_{1n}x_n = b_1 \\ x_2 + a_{2m+1}x_{m+1} + \cdots + a_{2n}x_n = b_2 \\ \ldots \\ x_m + a_{mm+1}x_{m+1} + \cdots + a_{mn}x_n = b_m \end{cases}$$

$$x_j \geq 0 \ \ (j=1,\ldots,n).$$

Таблица 1.3

i	Базис	$C_б$	P_0	C_1	C_2	…	C_r	…	C_m	C_{m+1}	…	C_k	…	C_n
				P_1	P_2	…	P_r	…	P_m	P_{m+1}	…	P_k	…	P_n
1	P_1	c_1	b_1	1	0	…	0	…	0	a_{1m+1}	…	a_{1k}	…	a_{1n}
2	P_2	c_2	b_2	0	1	…	0	…	0	a_{2m+1}	…	a_{2k}	…	a_{2n}
.	.	.	.	.	.	.	.	.	.	.	.	.	.	.
.	.	.	.	.	.	.	.	.	.	.	.	.	.	.
.	.	.	.	.	.	.	.	.	.	.	.	.	.	.
r	P_r	c_r	b_r	0	0	…	1	…	0	a_{rm+1}	…	a_{rk}	…	a_{rn}
.	.	.	.	.	.	.	.	.	.	.	.	.	.	.
.	.	.	.	.	.	.	.	.	.	.	.	.	.	.
.	.	.	.	.	.	.	.	.	.	.	.	.	.	.
m	P_m	c_m	b_m	0	0	…	0	…	1	a_{mm+1}	…	a_{mk}	…	a_{mn}
m+1			F_0	0	0	…	0	…	0	Δ_{m+1}	…	Δ_k	…	Δ_n

В табл. 1.3 первые m строк определяются исходными данными задачи, а показатели $(m + 1)$-й строки вычисляют.

Пусть требуется найти максимальное значение функции

$$F = c_1x_1 + c_2x_2 + \dots + c_nx_n$$

при условиях

$$\begin{cases} x_1 + a_{1m+1}x_{m+1} + \dots + a_{1n}x_n = b_1 \\ x_2 + a_{2m+1}x_{m+1} + \dots + a_{2n}x_n = b_2 \\ \dots \\ x_m + a_{mm+1}x_{m+1} + \dots + a_{mn}x_n = b_m \end{cases}$$

$$x_j \geq 0 \ (j=1,\dots,n).$$

Таблица 1.3

	Базис	$C_б$	P_0	C_1	C_2	…	C_r	…	C_m	C_{m+1}	…	C_k	…	C_n
				P_1	P_2	…	P_r	…	P_m	P_{m+1}	…	P_k	…	P_n
1	P_1	c_1	b_1	1	0	…	0	…	0	a_{1m+1}	…	a_{1k}	…	a_{1n}
2	P_2	c_2	b_2	0	1	…	0	…	0	a_{2m+1}	…	a_{2k}	…	a_{2n}
.	.	.	.	.	.	.	.	.	.	.	.	.	.	.
r	P_r	c_r	b_r	0	0	…	1	…	0	a_{rm+1}	…	a_{rk}	…	a_{rn}
.	.	.	.	.	.	.	.	.	.	.	.	.	.	.
m	P_m	c_m	b_m	0	0	…	0	…	1	a_{mm+1}	…	a_{mk}	…	a_{mn}
m+1			F_0	0	0	…	0	…	0	Δ_{m+1}	…	Δ_k	…	Δ_n

В *(m + 1)-ой* строке в столбце вектора P_0 записывают значение целевой функции, которое она принимает при данном опорном плане, а в столбце вектора P_j - значение $\Delta_j = z_j - c_j$.

Значение z_j находится как скалярное произведение вектора $P_j (j = \overline{1,m})$ на вектор $C_б = (c_1; c_2; \dots c_m)$: $z_j = \sum_{i=1}^{m} c_i a_{ij} \quad (j = \overline{1,n})$.

Значение F_0 равно скалярному произведению вектора P_0 на вектор $C_б$:

$$F_0 = \sum_{i=1}^{m} c_i б_i.$$

Опорный план проверяют на оптимальность, для этого просматривают элементы $(m + 1)$-ой строки таблицы.

В результате может иметь место один из следующих трех случаев:

1). $\Delta_j \geq 0$ для всех j от 1 до n;

2). $\Delta_j < 0$ для некоторого j и все соответствующие этому индексу величины $a_{ij} \leq 0$ $(j = \overline{1, m})$;

3). $\Delta_j < 0$ для некоторых индексов j, и для каждого такого j по крайне мере одно из чисел a_{ij} положительно.

В первом случае на основании признака оптимальности исходный опорный план является оптимальным.

Во втором случае целевая функция не ограничена сверху на множестве планов, а в третьем случае можно перейти от исходного плана к новому опорному плану, при котором значение целевой функции увеличится.

В качестве вектора, вводимого в базис, можно взять любой из векторов P_j, имеющий индекс j, для которого $\Delta_j < 0$.

Пусть, например, $\Delta_r < 0$ и решено ввести в базис вектор P_r.

Для определения вектора, подлежащего исключению из базиса, находится min (b_i/a_{ir}) для всех $a_{ir}>0$.

Пусть этот минимум достигается при $i=r$.

Тогда из базиса исключают вектор P_r, а число a_{ir} называют *разрешающим элементом.*

Столбец и строку, на пересечении которых находится разрешающий элемент, называют *направляющими.*

Метод Жордана - Гаусса.

При этом положительные компоненты нового опорного плана вычисляются по формулам

$$b_i' = \begin{cases} b_i - \left(\frac{b_r}{a_{rk}}\right) a_{ik} & \text{при } i \neq r \\ \frac{b_r}{a_{rk}} & \text{при } i = r \end{cases}$$

Метод Жордана - Гаусса.

При этом положительные компоненты нового опорного плана вычисляются по формулам

$$b_i' = \begin{cases} b_i - \left(\frac{b_r}{a_{rk}}\right) a_{ik} & \text{при } i \neq r \\ \frac{b_r}{a_{rk}} & \text{при } i = r \end{cases}$$

а коэффициенты разложения векторов P_i через векторы нового базиса, соответствующего новому опорному плану, - по формулам

$$a'_{ij} = \begin{cases} a_{ij} - (a_{rj}/a_{rk})a_{ik} & при\ i \neq r, \\ a_{rj}/a_{rk} & при\ i = r. \end{cases}$$

После вычисления b_i' и a'_{ij} их значения заносят в табл. 1.4.

Элементы $(m+1)$–й строки этой таблицы могут быть вычислены либо по формулам

$$F_0' = F_0 - (b_r/a_{rk})\Delta_k,$$
$$\Delta_j' = \Delta_j - (a_{rj}/a_{rk})\Delta_k,$$

либо на основании их определения.

Вектор, вводимый в базис, определяется исходя из максимальной абсолютной величины отрицательных чисел Δ_j.

Таблица 1.4

i	Базис	C_δ	P_0	C_1	C_2	...	C_r	...	C_m	C_{m+1}	...	C_k	...	C_n
				P_1	P_2	...	P_r	...	P_m	P_{m+1}	...	P_k	...	P_n
1	P_1	c_1	b_1'	1	0	...	a'_{1r}	...	0	a'_{1m+1}	...	0	...	a'_{1n}
2	P_2	c_2	b_2'	0	1	...	a'_{2r}	...	0	a'_{2m+1}	...	0	...	a'_{2n}
.	.	.	.	.	.	.	.	.	.	.	.	.	.	.
.	.	.	.	.	.	.	.	.	.	.	.	.	.	.
.	.	.	.	.	.	.	.	.	.	.	.	.	.	.
r	P_k	c_k	b_r'	0	0	...	a_{rr}'	...	0	a'_{rm+1}	...	1	...	a'_{rn}
.	.	.	.	.	.	.	.	.	.	.	.	.	.	.
.	.	.	.	.	.	.	.	.	.	.	.	.	.	.
.	.	.	.	.	.	.	.	.	.	.	.	.	.	.
m	P_m	c_m	b_m'	0	0	...	a_{mr}'	...	1	a'_{mm+1}	...	0	...	a'_{mn}
$m+1$			F_0'	0	0	...	$z_r' - c_r$	...	0	$z'_{m+1} - c_{m+1}$	...	0	...	$z'_n - c_n$

Элементы новой симплекс-таблицы можно вычислить по следующим правилам:

В столбцах векторов, входящих в базис, на пересечении строк и столбцов одноименных векторов проставляются единицы, а все остальные элементы данных столбцов полагают равными нулю.

Элементы векторов P_0 и P_j в строке новой симплекс-таблицы, в которой записан вектор, вводимый в базис, получают из элементов этой же строки исходной таблицы делением их на величину разрешающего элемента.

В столбце $C_б$ в строке вводимого вектора проставляют величину c_k, где k - индекс вводимого вектора.

Остальные элементы столбцов вектора P_0 и P_j новой симплекс-таблицы вычисляют по п р а в и л у т р е у г о л ь н и к а. Для вычисления какого-нибудь из этих элементов находят три числа:

Остальные элементы столбцов вектора P_0 и P_j новой симплекс-таблицы вычисляют по правилу треугольника.

Для вычисления какого-нибудь из этих элементов находят три числа:

1) Число, стоящее в исходной симплекс-таблице на месте искомого элемента новой симплекс-таблицы;
2) Число, стоящее в исходной симплекс-таблице на пересечении строки, в которой находится искомый элемент новой симплекс-таблицы, и столбца, соответствующего вектору, вводимому в базис;
3) Число, стоящее в новой симплекс-таблице на пересечении столбца, в котором стоит искомый элемент, и строки вновь вводимого в базис вектора (как отмечено выше, эта строка получается из строки исходной симплекс-таблицы делением ее элементов на разрешающий элемент).

Эти три числа образуют своеобразный треугольник, две вершины которого соответствуют числам, находящимся в новой симплекс-таблице.

Для определения искомого элемента новой симплекс-таблицы из первого числа вычитают произведение второго и третьего.

Этапы нахождения оптимального плана симплексным методом

1. Находят опорный план.

2. Составляют симплекс-таблицу.

3. Выясняют, имеется ли хотя бы одно отрицательное число Δ_j. Если нет, то найденный опорный план оптимален. Если же среди чисел Δ_j имеются отрицательные, то либо устанавливают неразрешимость задачи, либо переходят к новому опорному плану.

4. Находят направляющие столбец и строку. Направляющий столбец определяется наибольшим по абсолютной величине отрицательным числом Δ_j, а направляющая строка – минимальным из отношений компонент столбца вектора P_0 к положительным компонентам направляющего столбца.

5. По формулам определяют положительные компоненты нового опорного плана, коэффициенты разложения векторов P_j по векторам нового базиса и числа F_0', Δ_j'. Все эти числа записываются в новой симплекс-таблице.

6. Проверяют найденный опорный план на оптимальность. Если план не оптимален и необходимо перейти к новому опорному плану, то возвращаются к этапу 4, а в случае получения оптимального плана или установления неразрешимости процесс решения задачи заканчивают.

Пример 1

Пример.

Для изготовления различных изделий A, B и C предприятие использует три различных вида сырья.

Нормы расхода сырья на производство одного изделия каждого вида, цена одного изделия A, B и C, а также общее количество сырья каждого вида, которое может быть использовано предприятием, приведены в табл. 1.5

Изделия A, B и C могут производиться в любых соотношениях (сбыт обеспечен), но производство ограничено выделенным предприятию сырьем каждого вида.

Составить план производства изделий, при котором общая стоимость всей произведенной предприятием продукции является максимальной.

Вид сырья	Нормы затрат сырья (кг) на одно изделие			Общее количество сырья (кг)
	A	B	C	
I	18	15	12	360
II	6	4	8	192
III	5	3	3	180
Цена одного изделия (тыс. руб.)	9	10	16	

Пример.

Вид сырья	Нормы затрат сырья (кг) на одно изделие			Общее количество сырья (кг)
	A	B	C	
I	18	15	12	360
II	6	4	8	192
III	5	3	3	180
Цена одного изделия (тыс. руб.)	9	10	16	

Искомый выпуск изделий *A* обозначим через x_1, изделий *B* – через x_2, изделий *C* – через x_3.

Поскольку имеются ограничения на выделенный предприятию фонд сырья каждого вида, переменные x_1, x_2, x_3 должны удовлетворять следующей системе неравенств:

$$\begin{cases} 18x_1 + 15x_2 + 12x_3 \le 360, \\ 6x_1 + 4x_2 + 8x_3 \le 192, \\ 5x_1 + 3x_2 + 3x_3 \le 180. \end{cases} \qquad (1)$$

Общая стоимость произведенной предприятием продукции при условии выпуска x_1 изделий *A*, x_2 изделий *B* и x_3изделий *C* составляет

$$F = 9x_1 + 10x_2 + 16x_3. \qquad (2)$$

По своему экономическому содержанию переменные x_1, x_2, x_3 могут принимать только лишь неотрицательные значения:

$$x_1, x_2, x_3 \ge 0. \qquad (3)$$

Пример.

Вид сырья	Нормы затрат сырья (кг) на одно изделие			Общее количество сырья (кг)
	A	B	C	
I II III	18 6 5	15 4 3	12 8 3	360 192 180
Цена одного изделия (тыс. руб.)	9	10	16	

В форме основной задачи линейного программирования:

Введем три дополнительные переменные, в результате чего ограничения запишутся в виде системы уравнений

$$\begin{cases} 18x_1 + 15x_2 + 12x_3 + x_4 = 360, \\ 6x_1 + 4x_2 + 8x_3 + x_5 = 192, \\ 5x_1 + 3x_2 + 3x_3 + x_6 = 180. \end{cases}$$

Преобразованную систему уравнений запишем в векторной форме:

$$x_1P_1 + x_2P_2 + x_3P_3 + x_4P_4 + x_5P_5 + x_6P_6 = P_0,$$

где

$$P_1 = \begin{pmatrix} 18 \\ 6 \\ 5 \end{pmatrix}; \ P_2 = \begin{pmatrix} 15 \\ 4 \\ 3 \end{pmatrix}; \ P_3 = \begin{pmatrix} 12 \\ 8 \\ 3 \end{pmatrix}; \ P_4 = \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix};$$

$$P_5 = \begin{pmatrix} 0 \\ 1 \\ 0 \end{pmatrix}; \ P_6 = \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 1 \end{pmatrix}; \ P_7 = \begin{pmatrix} 360 \\ 192 \\ 180 \end{pmatrix}.$$

Пример.

Вид сырья	Нормы затрат сырья (кг) на одно изделие			Общее количество сырья (кг)
	A	B	C	
I	18	15	12	360
II	6	4	8	192
III	5	3	3	180
Цена одного изделия (тыс. руб.)	9	10	16	

Преобразованную систему уравнений запишем в векторной форме:

$$x_1P_1 + x_2P_2 + x_3P_3 + x_4P_4 + x_5P_5 + x_6P_6 = P_0,$$

где

$$P_1 = \begin{pmatrix}18\\6\\5\end{pmatrix};\ P_2 = \begin{pmatrix}15\\4\\3\end{pmatrix};\ P_3 = \begin{pmatrix}12\\8\\3\end{pmatrix};\ P_4 = \begin{pmatrix}1\\0\\0\end{pmatrix};$$

$$P_5 = \begin{pmatrix}0\\1\\0\end{pmatrix};\ P_6 = \begin{pmatrix}0\\0\\1\end{pmatrix};\ P_7 = \begin{pmatrix}360\\192\\180\end{pmatrix}.$$

Поскольку среди векторов P_1, P_2, P_3, P_4, P_5, P_6 имеются три единичных вектора, для данной задачи можно записать опорный план.

Таковым является план X=(0; 0; 0; 360; 192; 180), определяемый системой трехмерных единичных векторов P_4, P_5, P_6, которые образуют базис трехмерного векторного пространства.

Пример.

Вид сырья	Нормы затрат сырья (кг) на одно изделие			Общее количество сырья (кг)
	A	B	C	
I	18	15	12	360
II	6	4	8	192
III	5	3	3	180
Цена одного изделия (тыс. руб.)	9	10	16	

Преобразованную систему уравнений запишем в векторной форме:

$$x_1P_1 + x_2P_2 + x_3P_3 + x_4P_4 + x_5P_5 + x_6P_6 = P_0,$$

где

$$P_1 = \begin{pmatrix}18\\6\\5\end{pmatrix};\ P_2 = \begin{pmatrix}15\\4\\3\end{pmatrix};\ P_3 = \begin{pmatrix}12\\8\\3\end{pmatrix};\ P_4 = \begin{pmatrix}1\\0\\0\end{pmatrix};$$

$$P_5 = \begin{pmatrix}0\\1\\0\end{pmatrix};\ P_6 = \begin{pmatrix}0\\0\\1\end{pmatrix};\ P_7 = \begin{pmatrix}360\\192\\180\end{pmatrix}.$$

Составляем симплексную таблицу для I итерации (1.6), подсчитываем значения F_0, $z_j - c_j$ и проверяем исходный опорный план на оптимальность:

$$F_0 = (C, P_0) = 0;\ z_1 = (C, P_1) = 0;\ z_2 = (C, P_2) = 0;\ z_3 = (C, P_3) = 0;$$

$$z_1 - c_1 = 0-9 = -9;\ z_2 - c_2 = 0-10 = -10;\ z_3 - c_3 = -16.$$

Таблица 1.6

i	Базис	$C_б$	P_0	9	10	16	0	0	0
				P_1	P_2	P_3	P_4	P_5	P_6
1	P_4	0	360	18	15	12	1	0	0
2	P_5	0	192	6	4	8	0	1	0
3	P_6	0	180	5	3	3	0	0	1
4			0	-9	-10	-16	0	0	0

Вид сырья	Нормы затрат сырья (кг) на одно изделие			Общее количество сырья (кг)
	A	B	C	
I	18	15	12	360
II	6	4	8	192
III	5	3	3	180
Цена одного изделия (тыс. руб.)	9	10	16	

$$\begin{cases} 18x_1 + 15x_2 + 12x_3 \le 360, \\ 6x_1 + 4x_2 + 8x_3 \le 192, \\ 5x_1 + 3x_2 + 3x_3 \le 180. \end{cases}$$

$$F = 9x_1 + 10x_2 + 16x_3.$$

Пример.

...разованную систему уравнений запишем в векторной форме:

$$x_1P_1 + x_2P_2 + x_3P_3 + x_4P_4 + x_5P_5 + x_6P_6 = P_0,$$

$$P_1 = \begin{pmatrix}18\\6\\5\end{pmatrix};\ P_2 = \begin{pmatrix}15\\4\\3\end{pmatrix};\ P_3 = \begin{pmatrix}12\\8\\3\end{pmatrix};\ P_4 = \begin{pmatrix}1\\0\\0\end{pmatrix};$$

$$P_5 = \begin{pmatrix}0\\1\\0\end{pmatrix};\ P_6 = \begin{pmatrix}0\\0\\1\end{pmatrix};\ P_7 = \begin{pmatrix}360\\192\\180\end{pmatrix}.$$

Таблица 1.6

i	Базис	$C_б$	P_0	9	10	16	0	0	0
				P_1	P_2	P_3	P_4	P_5	P_6
1	P_4	0	360	18	15	12	1	0	0
2	P_5	0	192	6	4	8	0	1	0
3	P_6	0	180	5	3	3	0	0	1
4			0	-9	-10	-16	0	0	0

F_0 =360*0+192*0+180*0

В столбце $C_б$ записывают коэффициенты при неизвестных целевой функции, имеющие те же индексы, что и векторы данного базиса.

Целевая функция $F = \underbrace{9}_{c_1}x_1 + \underbrace{10}_{c_2}x_2 + \underbrace{16}_{c_3}x_3 + 0x_4 + 0x_5 + 0x_6$.

Значение z_j находится как скалярное произведение вектора $P_j (j = \overline{1,m})$ на вектор $C_б=(c_1; c_2; \dots c_m)$, то есть для столбца P_1: $z_1 = 18 * 0 + 6 * 0 + 5 * 0 = 0$.

Следовательно, $z_1 - c_1 = 0-9 = -9$;

Аналогично: $z_2 - c_2 = 0-10 = -10$; $z_3 - c_3 = -16$.

Пример.

Вид сырья	Нормы затрат сырья (кг) на одно изделие			Общее количество сырья (кг)
	A	B	C	
I	18	15	12	360
II	6	4	8	192
III	5	3	3	180
Цена одного изделия (тыс. руб.)	9	10	16	

$$\begin{cases} 18x_1 + 15x_2 + 12x_3 \le 360, \\ 6x_1 + 4x_2 + 8x_3 \le 192, \\ 5x_1 + 3x_2 + 3x_3 \le 180. \end{cases}$$

$$F = 9x_1 + 10x_2 + 16x_3.$$

Преобразованную систему уравнений запишем в векторной форме:

$$x_1P_1 + x_2P_2 + x_3P_3 + x_4P_4 + x_5P_5 + x_6P_6 = P_0,$$

где

$$P_1 = \begin{pmatrix} 18 \\ 6 \\ 5 \end{pmatrix};\ P_2 = \begin{pmatrix} 15 \\ 4 \\ 3 \end{pmatrix};\ P_3 = \begin{pmatrix} 12 \\ 8 \\ 3 \end{pmatrix};\ P_4 = \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix};$$

$$P_5 = \begin{pmatrix} 0 \\ 1 \\ 0 \end{pmatrix};\ P_6 = \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 1 \end{pmatrix};\ P_7 = \begin{pmatrix} 360 \\ 192 \\ 180 \end{pmatrix}.$$

Таблица 1.6

i	Базис	$C_б$	P_0	9	10	16	0	0	0
				P_1	P_2	P_3	P_4	P_5	P_6
1	P_4	0	360	18	15	12	1	0	0
2	P_5	0	192	6	4	8	0	1	0
3	P_6	0	180	5	3	3	0	0	1
4			0	-9	-10	-16	0	0	0

Поскольку максимальное по абсолютной величине отрицательное число Δ_j стоит в 4 строке столбца вектора P_3, в базис введем вектор P_3.

Определяем вектор, подлежащий исключению из базиса.

Для этого находим $\Theta_0 = min(b_i/a_{i3})$ для $a_{i3} > 0$, то есть

$$\Theta_0 = min\ (360/12;\ 192/8\ 180/3) = 192/8.$$

Следовательно, вектор P_5 подлежит исключению из базиса. Столбец вектора P_3 и 2 строка являются направляющими.

Составляем таблицу для II итерации (табл. 1.7).

Комментарии к таблице 1.6

Из таблицы 1.6 видно, что этот план не является оптимальным.

Это видно и из 4 строки табл. 1.6, так как в ней имеется три отрицательных числа.

Отрицательные числа не только свидетельствуют о возможности увеличения обще стоимости производимой продукции, но и показывают, на сколько увеличится эта сумма при введении в план единицы того или другого вида продукции.

Число -9 означает, что при включении в план производства одного изделия *A* обеспечивается увеличение выпуска продукции на 9 тыс. руб. Если включить в план производства по одному изделию *B* и *C*, то общая стоимость изготовляемой продукции возрастет соответственно на 10 и 16 тыс. руб. Поэтому с экономической точки зрения наиболее целесообразным является включение в план производства изделий *C*. Это же необходимо сделать и на основании формального признака симплексного метода, поскольку максимальное по абсолютной величине отрицательное число Δ_j стоит в 4 строке столбца вектора P_3. Следовательно, в базис введем вектор P_3. Определяем вектор, подлежащий исключению из базиса. Для этого находим $\Theta_0 = min(b_i/a_{i3})$ для $a_{i3} > 0$, т. е.

$$\Theta_0 = min\ (360/12;\ 192/8\ 180/3) = 192/8.$$

Комментарии к таблице 1.6

Найдя число 192/8=24, мы тем самым с экономической точки зрения определили, какое количество изделий *C* предприятие может изготовлять с учетом норм расхода и имеющихся объемов сырья каждого вида. Так как сырья данного вида имеется 360, 192, 180 кг, а на одно изделие *C* требуется затратить сырья каждого вида 12, 8, 3 кг, то максимальное число изделий *C*, которое может быть изготовлено предприятием, равно min (360/12; 192/8 180/3) = 192/8 = 24, т. е. ограничивающим фактором для производства изделий *C* является имеющийся объем сырья II вида. С учетом его наличия предприятие может изготовить 24 изделия *C*. При этом сырье II вида будет полностью использовано.

Следовательно, вектор P_5 подлежит исключению из базиса. Столбец вектора P_3 и 2 строка являются направляющими.

Составляем таблицу для II итерации (табл. 1.7).

Составляем таблицу для II итерации (табл. 1.7).

Таблица 1.6

i	Базис	$C_б$	P_0	9	10	16	0	0	0
				P_1	P_2	P_3	P_4	P_5	P_6
1	P_4	0	360	18	15	12	1	0	0
2	P_5	0	192	6	4	8	0	1	0
3	P_6	0	180	5	3	3	0	0	1
4			0	-9	-10	-16	0	0	0

Таблица 1.7

i	Базис	$C_б$	P_0	9	10	16	0	0	0
				P_1	P_2	P_3	P_4	P_5	P_6
1	P_4	0	72	9	9	0	1	-3/2	0
2	P_3	16	24	3/4	1/2	1	0	1/8	0
3	P_6	0	108	11/4	3/2	0	0	-3/8	1
4			384	3	-2	0	0	2	0

Целевая функция $F = \underset{c_1}{9}x_1 + \underset{c_2}{10}x_2 + \underset{c_3}{16}x_3 + 0x_4 + 0x_5 + 0x_6$.

Таблица 1.6

i	Базис	$C_б$	P_0	9	10	16	0	0	0
				P_1	P_2	P_3	P_4	P_5	P_6
1	P_4	0	360	18	15	12	1	0	0
2	P_5	0	192	6	4	8	0	1	0
3	P_6	0	180	5	3	3	0	0	1
4			0	-9	-10	-16	0	0	0

Целевая функция $F = 9x_1 + 10x_2 + 16x_3 + 0x_4 + 0x_5 + 0x_6$.

c_1 c_2 c_3

Составляем таблицу для II итерации (табл. 1.7)

Таблица 1.7

i	Базис	$C_б$	P_0	9	10	16	0	0	0
				P_1	P_2	P_3	P_4	P_5	P_6
1	P_4	0	72	9	9	0	1	-3/2	0
2	P_3	16	24	3/4	1/2	1	0	1/8	0
3	P_6	0	108	11/4	3/2	0	0	-3/8	1
4			384	3	-2	0	0	2	0

Сначала заполняем строку вектора, вновь введенного в базис, т. е. строку, номер которой совпадает с номером направляющей строки.

Здесь направляющей является 2 строка.

Элементы этой строки табл. 1.7 получаются из соответствующих элементов табл. 1.6 делением их на разрешающий элемент (на 8).

При этом в столбце $C_б$ записываем коэффициент C_3=16, стоящий в столбце вводимого в базис вектора P_3.

Составляем таблицу для II итерации (табл. 1.7).

Таблица 1.7

i	Базис	$C_б$	P_0	9	10	16	0	0	0
				P_1	P_2	P_3	P_4	P_5	P_6
1	P_4	0	72	9	9	0	1	-3/2	0
2	P_3	16	24	3/4	1/2	1	0	1/8	0
3	P_6	0	108	11/4	3/2	0	0	-3/8	1
4			384	3	-2	0	0	2	0

Сначала заполняем строку вектора, вновь введенного в базис, т. е. строку, номер которой совпадает с номером направляющей строки.

Здесь направляющей является 2 строка.

Элементы этой строки табл. 1.7 получаются из соответствующих элементов табл. 1.6 делением их на разрешающий элемент (на 8).

При этом в столбце $C_б$ записываем коэффициент C_3=16, стоящий в столбце вводимого в базис вектора P_3.

В столбцах на пересечении строк и столбцов **одноименных** векторов проставляем единицы, а все остальные элементы полагаем равными нулю.

Составляем таблицу для II итерации (табл. 1.7).

Правило треугольника

Вычислим элементы табл. 1.7, стоящие в столбце вектора P_0. Первый из них находится в 1 строке этого столбца. Для его вычисления находим три числа:

1) число, стоящее в таблице 1.6 на пересечении столбца вектора P_0 и первой строки (360);

2) число, стоящее в табл. 1.6 на пересечении столбца вектора P_3 и первой строки (12);

3) число, стоящее в табл. 1.7 на пересечении столбца вектора P_0 и 2 строки (24).

Вычитая из первого числа произведение двух других, находим искомый элемент: $360 - 12\cdot 24 = 72$; записываем его в 1 строке столбца вектора P_0 табл. 1.7.

7

i									
1	P_4	0	72	9	9	0	1	-3/2	0
2	P_3	16	24	3/4	1/2	1	0	1/8	0
3	P_6	0	108	11/4	3/2	0	0	-3/8	1
4			384	3	-2	0	0	2	0

Таблица 1.6

Составляем таблицу для II итерации (табл. 1.7).

i	Базис	$C_б$	P_0	9	10	16	0	0	0
				P_1	P_2	P_3	P_4	P_5	P_6
1	P_4	0	360	18	15	12	1	0	0
2	P_5	0	192	6	4	8	0	1	0
3	P_6	0	180	5	3	3	0	0	1
4			0	-9	-10	-16	0	0	0

Таблица 1.7

i	Базис	$C_б$	P_0	9	10	16	0	0	0
				P_1	P_2	P_3	P_4	P_5	P_6
1	P_4	0	72	9	9	0	1	-3/2	0
2	P_3	16	24	3/4	1/2	1	0	1/8	0
3	P_6	0	108	11/4	3/2	0	0	-3/8	1
4			384	3	-2	0	0	2	0

Целевая функция $F = \underbrace{9}_{c_1}x_1 + \underbrace{10}_{c_2}x_2 + \underbrace{16}_{c_3}x_3 + 0x_4 + 0x_5 + 0x_6$.

Составляем таблицу для II итерации (табл. 1.7).

Таблица 1.6

i	Базис	$C_б$	P_0	9	10	16	0	0	0
				P_1	P_2	P_3	P_4	P_5	P_6
1	P_4	0	360	18	15	12	1	0	0
2	P_5	0	192	6	4	8	0	1	0
3	P_6	0	180	5	3	3	0	0	1
4			0	-9	-10	-16	0	0	0

360-12·24 = 72

180-3·24=108.

Таблица 1.7

i	Базис	$C_б$	P_0	9	10	16	0	0	0
				P_1	P_2	P_3	P_4	P_5	P_6
1	P_4	0	72	9	9	0	1	-3/2	0
2	P_3	16	24	3/4	1/2	1	0	1/8	0
3	P_6	0	108	11/4	3/2	0	0	-3/8	1
4			384	3	-2	0	0	2	0

Значение F_0 в 4 строке столбца этого же вектора можно найти двумя способами:

1) по формуле $F_0 = (C, P_0)$, т. е. $F_0=0\cdot72+16\cdot24+0\cdot108=384$;

2) по правилу треугольника; в данном случае треугольник образован числами 0, -16, 24. Этот способ приводит к тому же результату:

$$0-(-16)\cdot24=384.$$

Составляем таблицу для II итерации (табл. 1.7).

Таблица 1.6

i	Базис	$C_б$	P_0	9	10	16	0	0	0
				P_1	P_2	P_3	P_4	P_5	P_6
1	P_4	0	360	18	15	12	1	0	0
2	P_5	0	192	6	4	8	0	1	0
3	P_6	0	180	5	3	3	0	0	1
4			0	-9	-10	-16	0	0	0

Таблица 1.7

i	Базис	$C_б$	P_0	9	10	16	0	0	0
				P_1	P_2	P_3	P_4	P_5	P_6
1	P_4	0	72	9	9	0	1	-3/2	0
2	P_3	16	24	3/4	1/2	1	0	1/8	0
3	P_6	0	108	11/4	3/2	0	0	-3/8	1
4			384	3	-2	0	0	2	0

Для вычисления остальных элементов первые два числа берем из столбцов векторов P_1 и P_3 табл. 1.6, а третье число – из табл. 1.7.

Составляем таблицу для II итерации (табл. 1.7).

Таблица 1.6

i	Базис	$C_{б}$	P_0	9	10	16	0	0	0
				P_1	P_2	P_3	P_4	P_5	P_6
1	P_4	0	360	18	15	12	1	0	0
2	P_5	0	192	6	4	8	0	1	0
3	P_6	0	180	5	3	3	0	0	1
4			0	-9	-10	-16	0	0	0

$0-12\cdot(1/8)=-3/2$

$15-12\cdot(1/2)=9$

Таблица 1.7

i	Базис	$C_{б}$	P_0	9	10	16	0	0	0
				P_1	P_2	P_3	P_4	P_5	P_6
1	P_4	0	72	9	9	0	1	-3/2	0
2	P_3	16	24	3/4	1/2	1	0	1/8	0
3	P_6	0	108	11/4	3/2	0	0	-3/8	1
4			384	3	-2	0	0	2	0

$18-12\cdot(3/4)=9$

$5-3\cdot(3/4)=11/4$

$-9-(-16)\cdot(3/4)=3$

Комментарии к таблице 1.7

Составляем таблицу для II итерации (табл. 1.7).

Сначала заполняем строку вектора, вновь введенного в базис, т. е. строку, номер которой совпадает с номером направляющей строки.

Здесь направляющей является 2 строка.

Элементы этой строки табл. 1.7 получаются из соответствующих элементов табл. 1.6 делением их на разрешающий элемент (на 8).

При этом в столбце $C_б$ записываем коэффициент C_3=16, стоящий в столбце вводимого в базис вектора P_3.

Целевая функция $F = \underset{c_1}{9}x_1 + \underset{c_2}{10}x_2 + \underset{c_3}{16}x_3 + 0x_4 + 0x_5 + 0x_6$.

Затем заполняем элементы столбцов для векторов, входящих в новый базис. В этих столбцах на пересечении строк и столбцов одноименных векторов проставляем единицы, а все остальные элементы полагаем равными нулю.

Комментарии к таблице 1.7

Для определения остальных элементов табл. 1.7 применяем правило треугольника. Эти элементы могут быть вычислены и непосредственно по рекуррентным формулам.

Вычислим элементы табл. 1.7, стоящие в столбце вектора P_0. Первый из них находится в 1 строке этого столбца. Для его вычисления находим три числа:

1) число, стоящее в таблице 1.6 на пересечении столбца вектора P_0 и первой строки (360);

2) число, стоящее в табл. 1.6 на пересечении столбца вектора P_3 и первой строки (12);

3) число, стоящее в табл. 1.7 на пересечении столбца вектора P_0 и 2 строки (24).

Вычитая из первого числа произведение двух других, находим искомый элемент: $360-12\cdot24 = 72$; записываем его в 1 строке столбца вектора P_0 табл. 1.7.

Комментарии к таблице 1.7

Второй элемент столбца вектора P_0 табл. 1.7 был вычислен ранее.

Для вычисления третьего элемента столбца вектора P_0 также находим три числа.

Первое (180) находится на пересечении 3 строки и столбца вектора P_0 табл. 1.6, второе (3) – на пересечении 3 строки и столбца вектора P_3 табл. 1.2, третье (24) – на пересечении 2 строки и столбца вектора P_0 табл. 1.4. Указанный элемент есть $180-3\cdot 24=108$. Число 108 записываем в 3 строке столбца вектора P_0 табл. 1.7.

Значение F_0 в 4 строке столбца этого же вектора можно найти двумя способами:

1) по формуле $F_0 = (C, P_0)$, т. е. $F_0=0\cdot 72+16\cdot 24+0\cdot 108=384$;

2) по правилу треугольника; в данном случае треугольник образован числами 0, -16, 24. Этот способ приводит к тому же результату:

$$0-(-16)\cdot 24=384.$$

При определении по правилу треугольника элементов столбца вектора P_0 третье число, стоящее в нижней вершине треугольника, все время оставалось неизменным и менялись лишь первые два числа. Учтем это при нахождении элементов столбца вектора P_1 табл. 1.7.

Комментарии к таблице 1.7

Для вычисления остальных элементов первые два числа берем из столбцов векторов P_1 и P_3 табл. 1.6, а третье число – из табл. 1.7.

Это число стоит на пересечении 2 строки и столбца вектора P_1 последней таблицы. В результате получаем значения искомых элементов:

18-12·(3/4)=9; 5-3·(3/4)=11/4.

Число z_1 - c_1 в 4 строке столбца вектора P_1 табл. 1.7 можно найти двумя способами:

1) по формуле $z_1 - c_1 = (C, P_1) - c_1$ имеем 0·9+16·3/4+0·11.4-9=3;

2) по правилу треугольника получим -9-(-16)·(3/4)=3.

Аналогично находим элементы столбца вектора P_2.

Элементы столбца вектора P_5 вычисляем по правилу треугольника.

При вычислении элемента 1 строки указанного столбца получается треугольник, образованный числами 0,12 и 1/8. Следовательно, искомый элемент равен 0-12·(1/8)=-3/2. Элемент, стоящий в 3 строке данного столбца, равен 0-3·(1/8)=-3/8.

При окончании расчета всех элементов табл. 1.7 в ней получены новый опорный план и коэффициенты разложения векторов $P\ (j = \overline{1,6})$через базисные векторы P_4 , P_3 , P_6 и значения Δ_j' и F_0'.

Таблица 1.7

i	Базис	$C_б$	P_0	9	10	16	0	0	0
				P_1	P_2	P_3	P_4	P_5	P_6
1	P_4	0	72	9	9	0	1	-3/2	0
2	P_3	16	24	3/4	1/2	1	0	1/8	0
3	P_6	0	108	11/4	3/2	0	0	-3/8	1
4			384	3	-2	0	0	2	0

Из таблицы видно, новым опорным планом задачи является план

$$X=(0;\ 0;\ 24;\ 72;\ 0;\ 108).$$

При данном плане производства изготавливается 24 изделия C и остается неиспользованным 72 кг сырья I вида и 108 кг сырья III вида.

Стоимость всей производимой при этом плане продукции равна 384 тыс. руб.

Найденный на II итерации план задачи не является оптимальным.

Экономическое содержание данных, полученных в столбцах

i	Базис	$C_б$	P_0	9	10	16	0	0	0
				P_1	P_2	P_3	P_4	P_5	P_6
1	P_4	0	72	9	9	0	1	-3/2	0
2	P_3	16	24	3/4	1/2	1	0	1/8	0
3	P_6	0	108	11/4	3/2	0	0	-3/8	1
4			384	3	-2	0	0	2	0

Данные столбца вектора P_2.

Число 1/2 в 2 строке этого столбца показывает, на сколько следует уменьшить изготовление изделия C, если запланировать выпуск одного изделия B.

Числа 9 и 3/2 в 1 и 3 строках вектора P_2 показывают, сколько потребуется сырья I и II вида при включении в план производства одного изделия B, а число – 2 в 4 строке, что если будет запланирован выпуск одного изделия B, то это обеспечит увеличение выпуска продукции в стоимостном выражении на 2 тыс. руб.

Иными словами, если включить в план производства продукции одно изделие В, то это потребует уменьшения выпуска изделия C на 1/2 ед. и потребует дополнительных затрат 9 кг сырья I вида и 3/2 кг сырья III вида, а общая стоимость изготавливаемой продукции в соответствии с новым оптимальным планом возрастет на 2 тыс. руб.

Экономическое содержание данных, полученных в столбцах

i	Базис	$C_б$	P_0	9	10	16	0	0	0
				P_1	P_2	P_3	P_4	P_5	P_6
1	P_4	0	72	9	9	0	1	-3/2	0
2	P_3	16	24	3/4	1/2	1	0	1/8	0
3	P_6	0	108	11/4	3/2	0	0	-3/8	1
4			384	3	-2	0	0	2	0

Вид сырья	Нормы затрат сырья (кг) на одно изделие			Общее количество сырья (кг)
	A	B	C	
I	18	15	12	360
II	6	4	8	192
III	5	3	3	180
Цена одного изделия (тыс. руб.)	9	10	16	

Данные столбца вектора P_2.

Таким образом, числа 9 и 3/2 выступают как новыми «нормами» затрат сырья I и III вида на изготовление одного изделия *B* (как видно из табл. 1.6, ранее они были равны 15 и 3), что объясняется уменьшением выпуска изделий *C*.

Такой же экономический смысл имеют и данные столбца вектора P_1 табл. 1.7.

Несколько иное экономическое содержание имеют числа, записанные в столбце вектора P_5. Число 1/8 во 2 строке этого столбца, показывает, что увеличение объемов сырья II вида на 1 кг позволило бы увеличить выпуск изделий *C* на 1/8 ед. Одновременно потребовалось бы дополнительно 3/2 кг сырья I вида и 3/8 кг сырья III вида. Увеличение выпуска изделий *C* на 1/8 ед. приведет к росту выпуска продукции на 2 тыс. руб.

Найденный на II итерации план задачи не является оптимальным.

i	Базис	$C_б$	P_0	9	10	16	0	0	0
				P_1	P_2	P_3	P_4	P_5	P_6
1	P_4	0	72	9	9	0	1	-3/2	0
2	P_3	16	24	3/4	1/2	1	0	1/8	0
3	P_6	0	108	11/4	3/2	0	0	-3/8	1
4			384	3	-2	0	0	2	0

В базис следует ввести вектор P_2 , т. е. в новом плане следует предусмотреть выпуск изделий *B*.

При определении возможного числа изготовления изделий *B* следует учитывать имеющееся количество сырья каждого вида, а именно:

возможный выпуск изделий *B* определяется $min(b_i'/a_{i2}')$ для $a_{i2}' > 0$, т. е. находим

$$O_0 = \min\left(\frac{72}{9};\ \frac{24\cdot 2}{1};\ \frac{108\cdot 2}{3}\right) = \frac{72}{9} = 8.$$

Следовательно, исключению из базиса подлежит вектор P_4, иными словами, выпуск изделий *B* ограничен имеющимся в распоряжении предприятия сырьем I вида.

Таблица 1.7

i	Базис	$C_б$	P_0	9	10	16	0	0	0
				P_1	P_2	P_3	P_4	P_5	P_6
1	P_4	0	72	9	9	0	1	-3/2	0
2	P_3	16	24	3/4	1/2	1	0	1/8	0
3	P_6	0	108	11/4	3/2	0	0	-3/8	1
4			384	3	-2	0	0	2	0

В табл. 1.8 сначала заполняем элементы 1 строки, которая представляет собой строку вновь вводимого базис вектора P_2,.

Элементы этой строки получаем из элементов 1 строки табл. 1.7 делением последних на разрешающий элемент (на 9). При этом в столбце $C_б$ данной строки записываем C_2=10.

Таблица 1.8

i	Базис	$C_б$	P_0	9	10	16	0	0	0
				P_1	P_2	P_3	P_4	P_5	P_6
1	P_2	10	8	1	1	0	1/9	-1/6	0
2	P_3	16	20	1/4	0	1	-1/18	5/24	0
3	P_6	0	96	5/4	0	0	-1/6	-1/8	1
4			400	5	0	0	2/9	5/3	0

i	Базис	$C_б$	P_0	9	10	16	0	0	0
				P_1	P_2	P_3	P_4	P_5	P_6
1	P_4	0	72	9	9	0	1	-3/2	0
2	P_3	16	24	3/4	1/2	1	0	1/8	0
3	P_6	0	108	11/4	3/2	0	0	-3/8	1
4			384	3	-2	0	0	2	0

Целевая функция $F = \underset{c_1}{9}x_1 + \underset{c_2}{10}x_2 + \underset{c_3}{16}x_3 + 0x_4 + 0x_5 + 0x_6$.

$108-(3/2)\cdot 8=96$

$384-(-2)\cdot 8=400.$

Таблица 1.8

i	Базис	$C_б$	P_0	9	10	16	0	0	0
				P_1	P_2	P_3	P_4	P_5	P_6
1	P_2	10	8	1	1	0	1/9	-1/6	0
2	P_3	16	20	1/4	0	1	-1/18	5/24	0
3	P_6	0	96	5/4	0	0	-1/6	-1/8	1
4			400	5	0	0	2/9	5/3	0

В результате в табл. 1.8 получаем новый опорный план X=(0; 8; 20; 0; 0; 96).

Таблица 1.8

i	Базис	$C_б$	P_0	9	10	16	0	0	0
				P_1	P_2	P_3	P_4	P_5	P_6
1	P_2	10	8	1	1	0	1/9	-1/6	0
2	P_3	16	20	1/4	0	1	-1/18	5/24	0
3	P_6	0	96	5/4	0	0	-1/6	-1/8	1
4			400	5	0	0	2/9	5/3	0

Следовательно, план выпуска продукции, включающий изготовление 8 изделий *B* и 20 изделий *C*, является оптимальным. При данном плане выпуска изделий полностью используется сырье I и II видов и остается неиспользованным 96 кг сырья III вида, а стоимость производимой продукции равна 400 руб.

Оптимальным планом производства продукции не предусматривается изготовление изделий *A*.

Введение в план выпуска продукции изделий вида *A* привело бы к уменьшению указанной общей стоимости. Это видно из 4 строки столбца вектора P_1, где число 5 показывает, что при данном плане включение в него выпуска единицы изделия *A* приводит лишь к уменьшению общей величины стоимости на 5 тыс. руб.

3.5 Особенности решения транспортных задач линейного программирования

Одной из типовых прикладных моделей ЛП является так называемая транспортная задача линейного программирования (ТЗЛП).

Типовые задачи, сводящиеся к ТЗЛП:

- задачи оптимизации распределения ресурсов;
- задачи оптимизации материально-технического обеспечения;
- задачи организации комплектования;
- задачи оптимизации транспортных потоков;
- задачи оптимизации перевозок и др.

3.5 Особенности решения транспортных задач линейного программирования

Общая постановка транспортной задачи состоит в определении оптимального плана перевозок некоторого однородного груза из m пунктов отправлении $A_1, A_2, \ldots, A_m$ назначения $B_1, B_2, \ldots, B_n$.

критерия оптимальности

минимальная стоимость перевозок

минимальное время доставки груза

Рассмотрим транспортную задачу, в качестве критерия оптимальности которой взята минимальная стоимость перевозок всего груза.

Обозначим через

c_{ij} - тарифы перевозки единицы груза из i-го пункта отправления в j-й пункт назначения,

a_i - запасы груза в i-м пункте отправления,

b_j - потребности в грузе в j-м пункте назначения,

x_{ij} — количество единиц груза, перевозимого из i-го пункта отправления в j-й пункт назначения.

Математическая постановка задачи состоит в определении минимального значения функции

$$F=\sum_{i=1}^{m}\sum_{j=1}^{n} c_{ij}x_{ij} \qquad (1)$$

при условиях

$$\sum_{i=1}^{m} x_{ij} = b_j (j = \overline{1,n}) \qquad (2)$$

$$\sum_{j=1}^{n} x_{ij} = a_i (i = \overline{1,m}) \qquad (3)$$

$$x_{ij} \geq 0\ (j = \overline{1,n}), (i = \overline{1,m}) \qquad (4)$$

Определение 2.1. Всякое неотрицательное решение систем линейных уравнений (2) и (3), определяемое матрицей $X=(x_{ij})$, $(j = \overline{1,n}), (i = \overline{1,m})$ называется планом транспортной задачи.

Определение 2.2. План $X^*=(x^*_{ij})$, $(j = \overline{1,n}), (i = \overline{1,m})$, при котором функция (1) принимает свое минимальное значение, называется оптимальным планом транспортной задачи.

Таблица 4.1

Пункты отправления	Пункт назначения					Запасы
	B_i	…	B_j	…	C_n	
A_i	c_{ii} x_{ii}	…	c_{ii} x_{ii}	…	c_{in} x_{in}	a_i
…	…	…	…	…	…	…
A_j	c_{ji} x_{ji}	…	c_{ij} x_{ij}	…	c_{jn} x_{jn}	a_j
…	…	…	…	…	…	…
A_m	c_{mi} x_{mi}	…	c_{mj} x_{mj}	…	c_{mn} x_{mn}	a_m
Потребности	b_i	…	b_j	…	b_n	

Если общая потребность в грузе в пунктах назначения равна запасу груза в пунктах отправления, т. е.

$$\sum_{i=1}^{m} a_i = \sum_{j=1}^{n} b_j \quad (5)$$

то модель такой транспортной задачи называется *закрытой.* Если же указанное условие не выполняется, то модель транспортной задачи называется *открытой.*

3.5 Особенности решения транспортных задач линейного программирования

Теорема 4.1. *Для разрешимости транспортной задачи необходимо и достаточно, чтобы запасы груза в пунктах отправления были равны потребностям в грузе в пунктах назначения, т. е. чтобы выполнялось равенство* (5).

запасы

превышение запаса над потребностью, то есть $\sum_{i=1}^{m} a_i > \sum_{j=1}^{n} b_j$

вводится фиктивный $(n+1)$-й пункт назначения с потребностью

$b_{n+1}=\sum_{j=1}^{n} b_j - \sum_{i=1}^{m} a_i$

и соответствующие тарифы считаются равными нулю:

$c_{m+1\,j}=0, (j = \overline{1,m})$

превышение потребности над запасами, то есть при $\sum_{i=1}^{m} a_i < \sum_{j=1}^{n} b_j$

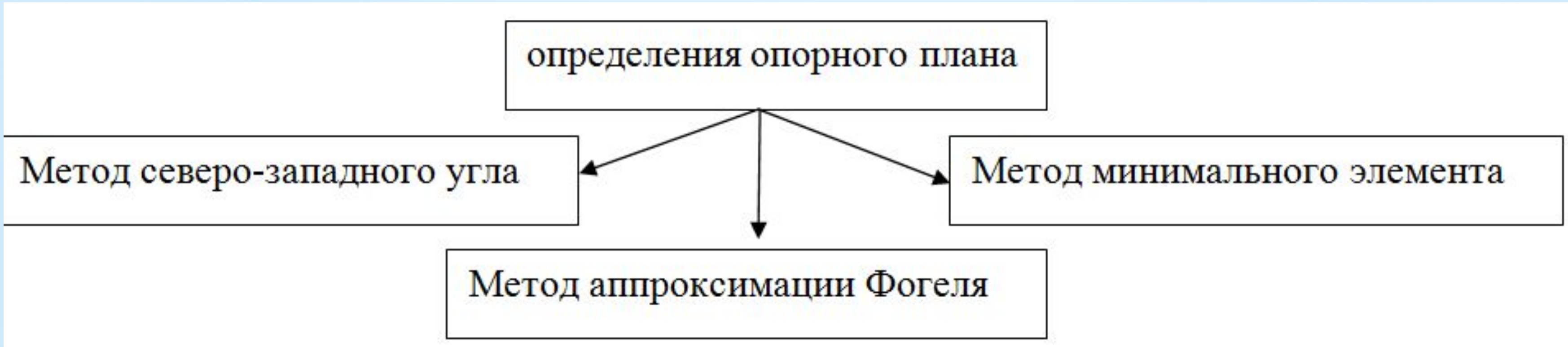
$(m+1)$-й пункт отправления с запасом груза

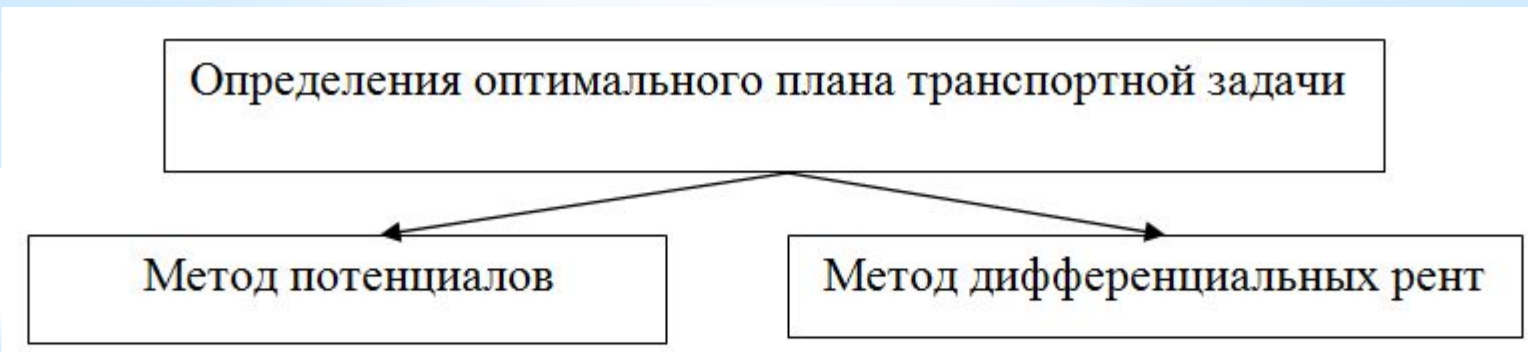
$a_{m+1}=\sum_{j=1}^{n} b_j - \sum_{i=1}^{m} a_i$

и соответствующие тарифы полагаются равными нулю:

$c_{m+1\,j}=0, (j = \overline{1,m})$

3.5 Особенности решения транспортных задач линейного программирования





Пример. Четыре предприятия данного экономического района для производства продукции использует три вида сырья. Потребности в сырье каждого из предприятий соответственно равны 120, 50, 190 и 110 ед.

Сырье сосредоточено в трех местах его получения, а запасы соответственно равны 160, 140, 170 ед.

На каждое из предприятий сырье может завозиться из любого пункта его получения. Тарифы перевозок являются известными величинами и задаются матрицей

$$C=\begin{pmatrix} 7 & 8 & 1 & 2 \\ 4 & 5 & 9 & 8 \\ 9 & 2 & 3 & 6 \end{pmatrix}$$

Составить такой план перевозок, при котором общая стоимость перевозок является минимальной.

$$C=\begin{pmatrix} 7 & 8 & 1 & 2 \\ 4 & 5 & 9 & 8 \\ 9 & 2 & 3 & 6 \end{pmatrix}$$

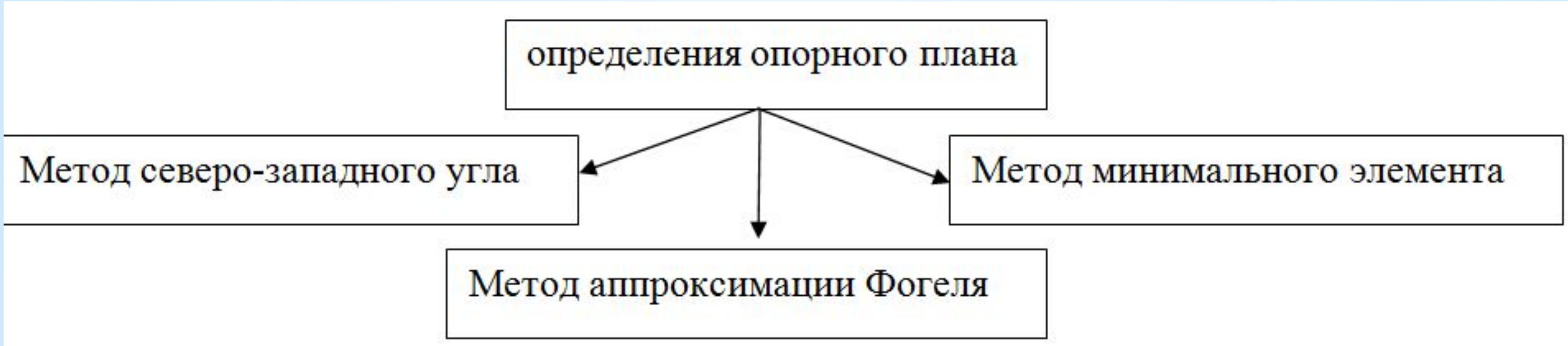
Решение. Обозначим через x_{ij} количество единиц сырья, перевозимого из i-го пункта его получения на j-е предприятие. Тогда условия доставки и вывоза необходимого и имеющегося сырья обеспечиваются за счет выполнения следующих равенств:

$$\begin{cases} x_{11}+x_{12}+x_{13}+x_{14}=160 \\ x_{21}+x_{22}+x_{23}+x_{24}=140 \\ x_{31}+x_{32}+x_{33}+x_{34}=170 \\ x_{11}+x_{21}+x_{31}=120 \\ x_{12}+x_{22}+x_{32}=50 \\ x_{13}+x_{23}+x_{33}=190 \\ x_{14}+x_{24}+x_{34}=110 \end{cases} \quad (6)$$

При данном плане $X=(x_{ij})$, $(j=\overline{1,3})$, $(i=\overline{1,4})$ перевозок общая стоимость перевозок составит

$$F=7x_{11}+8x_{12}+x_{13}+2x_{14}+4x_{21}+5x_{22}+9x_{23}+8x_{24}+9x_{31}+2x_{32}+3x_{33}+6x_{34} \quad (7)$$

3.5.1 Определение опорного плана транспортной задачи



Метод северо-западного угла

Методические рекомендации к выполнению контрольной работы

Задание №3

Определение опорного плана транспортной задачи

Условие

Метод северо-западного угла

На три базы A_1, A_2, A_3 поступил однородный груз в количествах, соответственно равных 140 +(*) 180 и 160 +(*) ед.

Этот груз требуется перевезти в пять пунктов назначения B_1, B_2, B_3, B_4, B_5 соответственно в количествах 60 +(*) 70, 120 +(*) 130 и 100 ед.

Тарифы перевозок единицы груза с каждого из пунктов отправления в соответствующие пункты назначения указаны в таблице

Таблица

Пункты отправления	Пункт назначения					Запасы
	B_1	B_2	B_3	B_4	B_5	
A_1	2	3	4	2	4	140 +(*)
A_2	8	4	1	4	1	180
A_3	9	7	3	7	2	160 +(*)
Потребности	60 +(*)	70	120 +(*)	130	100	480

Найти план перевозок данной транспортной задачи методом северо-западного угла.

Метод северо-западного угла

Пример. На три базы A_1, A_2, A_3 поступил однородный груз в количествах, соответственно равных 140, 180 и 160 ед. Этот груз требуется перевезти в пять пунктов назначения B_1, B_2, B_3, B_4, B_5 соответственно в количествах 60, 70, 120, 130 и 100 ед. Тарифы перевозок единицы груза с каждого из пунктов отправления в соответствующие пункты назначения указаны в таблице 4.2.

Таблица 4.2

Пункты отправления	Пункт назначения					Запасы
	B_1	B_2	B_3	B_4	B_5	
A_1	2	3	4	2	4	140
A_2	8	4	1	4	1	180
A_3	9	7	3	7	2	160
Потребности	60	70	120	130	100	480

Найти план перевозок данной транспортной задачи методом северо-западного угла.

Метод северо-западного угла

Пункты отправления	Пункт назначения					Запасы
	B_1	B_2	B_3	B_4	B_5	
A_1	2	3	4	2	4	140
A_2	8	4	1	4	1	180
A_3	9	7	3	7	2	160
Потребности	60	70	120	130	100	480

Таблица 4.3

Пункты отправления	Пункт назначения					Запасы
	B_1	B_2	B_3	B_4	B_5	
A_1	2 60	3 70	4 10	2	4	140
A_2	8	4	1 110	4 70	1	180
A_3	9	7	3	7 60	2 100	160
Потребности	60	70	120	130	100	480

$$X=\begin{pmatrix} 60 & 70 & 10 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 110 & 70 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 60 & 100 \end{pmatrix}.$$

$$S = 2*60 + 3*70 + 4*10 + 1*110 + 4*70 + 7*60 + 2*100 = 1380.$$

Комментарии к задаче

Рассмотрим первые из оставшихся пунктов отправления A_1 и назначения B_2. Запасы пункта A_1 больше потребностей пункта B_2. Положим $x_{12}= 70$, запишем это значение в соответствующей клетке табл. 4.3 и временно исключим из рассмотрения столбец B_2. В пункте A_1 запасы считаем равными 10 ед. Снова рассмотрим первые из оставшихся пунктов отправления A_1 и назначения B_3. Потребности пункта B_3 больше оставшихся запасов пункта A_1 . Положим $x_{13}=10$ и исключим из рассмотрения строку A_1. Значение $x_{13}= 10$ запишем в соответствующую клетку табл. 4.3 и считаем потребности пункта B_3 равными 110 ед.

Теперь перейдем к заполнению клетки для неизвестного x_{23} и т. д. Через шесть шагов остается один пункт отправления A_3 с запасом груза 100 ед. и один пункт назначения B_5 с потребностью 100 ед. Соответственно имеется одна свободная клетка, которую и заполняем, полагая $x_{35}=100$ (табл. 4.3). В результате получаем опорный план

$$X=\begin{pmatrix} 60 & 70 & 10 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 110 & 70 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 60 & 100 \end{pmatrix}.$$

Согласно данному плану перевозок, общая стоимость перевозок всего груза составляет $S =2*60+ 3*70 +4*10+ 1 * 110 + 4*70 + 7*60 + 2* 100=1380.$

Методические рекомендации к выполнению контрольной работы

Задание №4

Определение опорного плана транспортной задачи

3.5.1 Определение опорного плана транспортной задачи

Метод минимального элемента

Пример. Четыре предприятия данного экономического района для производства продукции использует три вида сырья. Потребности в сырье каждого из предприятий соответственно равны 120, 50, 190 и 110 ед. Сырье сосредоточено в трех местах его получения, а запасы соответственно равны 160, 140, 170 ед. На каждое из предприятий сырье может завозиться из любого пункта его получения. Тарифы перевозок являются известными величинами и задаются матрицей

$$C=\begin{pmatrix} 7 & 8 & 1 & 2 \\ 4 & 5 & 9 & 8 \\ 9 & 2 & 3 & 6 \end{pmatrix}$$

Найти опорный план транспортной задачи методом минимального элемента.

3.5.1 Определение опорного плана транспортной задачи

Метод минимального элемента

Пример. Четыре предприятия данного экономического района для производства продукции использует три вида сырья. Потребности в сырье каждого из предприятий соответственно равны 120, 50, 190 и 110 ед. Сырье сосредоточено в трех местах его получения, а запасы соответственно равны 160, 140, 170 ед. На каждое из предприятий сырье может завозиться из любого пункта его получения. Тарифы перевозок являются известными величинами и задаются матрицей

$$C=\begin{pmatrix} 7 & 8 & 1 & 2 \\ 4 & 5 & 9 & 8 \\ 9 & 2 & 3 & 6 \end{pmatrix}$$

Найти опорный план транспортной задачи методом минимального элемента.

Метод минимального элемента

Пример. Четыре предприятия данного экономического района для производства продукции использует три вида сырья. Потребности в сырье каждого из предприятий соответственно равны 120, 50, 190 и 110 ед. Сырье сосредоточено в трех местах его получения, а запасы соответственно равны 160, 140, 170 ед. На каждое из предприятий сырье может завозиться из любого пункта его получения. Тарифы перевозок являются известными величинами и задаются матрицей

$$C=\begin{pmatrix} 7 & 8 & 1 & 2 \\ 4 & 5 & 9 & 8 \\ 9 & 2 & 3 & 6 \end{pmatrix}$$

Таблица 4.4

Пункты отправления	Пункты назначения				Запасы
	B_1	B_2	B_3	B_4	
A_1	7	8	1 160	2	160
A_2	4 120	5	9	8 20	140
A_3	9	2 50	3 30	6 90	170
Потребности	120	50	190	110	470

$$X=\begin{pmatrix} 0 & 0 & 160 & 0 \\ 120 & 0 & 0 & 20 \\ 0 & 50 & 30 & 90 \end{pmatrix}$$

$S = 1*160 + 4*120 + 8*20 + 2*50 + 3*30 + 6*90 = 1530.$

Метод минимального элемента

Комментарии к задаче

Минимальный тариф, равный 1, находится в клетке для переменной x_{13}. Положим x_{13}=160, запишем это значение в соответствующую клетку табл. 4.4 и исключим временно из рассмотрения строку A1. Потребности пункта назначения B_3 считаем равными 30 ед.

В оставшейся части таблицы с двумя строками A_2 и A_3 и четырьмя столбцами B_1, B_2, B_3, B_4 клетка с наименьшим значением тарифа c_{ij} находится на пересечении строки A_3 и столбца B_2, где $c_{32}=2$. Положим $x_{32}=50$ и внесем это значение в соответствующую клетку табл. 4.4.

Временно исключим из рассмотрения столбец B_2 и будем считать запасы пункта A_3 равными 120 ед. После этого рассмотрим оставшуюся часть таблицы с двумя строками A_1 и A_3 и тремя столбцами B_1, B_3 и B_4. В ней минимальный тариф c_{ij} находится в клетке на пересечении строки A_3 и столбца B_3 и равен 3. Заполним описанным выше способом эту клетку и аналогично заполним (в определенной последовательности) клетки, находящиеся на пересечении строки A_2 и столбца B_1 , строки A_3 и столбца B_4 , строки A_2 и столбца B_4.

В результате получим опорный план:

$$X=\begin{pmatrix} 0 & 0 & 160 & 0 \\ 120 & 0 & 0 & 20 \\ 0 & 50 & 30 & 90 \end{pmatrix}$$

При данном плане перевозок общая стоимость перевозок составляет

$$S= 1*160 + 4*120 + 8*20 + 2*50 + 3*30 + 6*90=1530.$$

Метод аппроксимации Фогеля

Пример. Четыре предприятия данного экономического района для производства продукции использует три вида сырья. Потребности в сырье каждого из предприятий соответственно равны 120, 50, 190 и 110 ед. Сырье сосредоточено в трех местах его получения, а запасы соответственно равны 160, 140, 170 ед. На каждое из предприятий сырье может завозиться из любого пункта его получения. Тарифы перевозок являются известными величинами и задаются матрицей

$$C=\begin{pmatrix} 7 & 8 & 1 & 2 \\ 4 & 5 & 9 & 8 \\ 9 & 2 & 3 & 6 \end{pmatrix}$$

Используя метод аппроксимации Фогеля, найти опорный план транспортной задачи, исходные данные которой приведены в табл. 4.5.

Таблица 4.5

Пункты отправления	Пункт назначения				Запасы
	B_1	B_2	B_3	B_4	
A_1	7	8	1	2	160
A_2	4	5	9	8	140
A_3	9	2	3	6	170
Потребности	120	50	190	110	470

Метод аппроксимации Фогеля

Таблица 4.6

Пункты отправления	Пункт назначения				Запасы	Разности по строкам					
	B_1	B_2	B_3	B_4							
A_1	7	8	1 50	2 110	160	1	6	-	-	-	-
A_2	4 120	5 20	9	8	140	1	1	1	1	1	0
A_3	9	2 30	3 140	6	170	1	1	1	7	-	-
Потребности	120	50	190	110	470						
Разности по столбцам	3	3	2	4							
	3	3	2	-							
	5	3	6	-							
	5	3	-	-							
	-	0	-	-							
	-	0	-	-							

$$X=\begin{pmatrix} 0 & 0 & 50 & 110 \\ 120 & 20 & 0 & 0 \\ 0 & 30 & 140 & 0 \end{pmatrix}$$

$$S= 1*50 + 2*110 + 4*120 + 5*20 + 2*30 + 3*140=1330.$$

Метод аппроксимации Фогеля

Комментарии к задаче

Решение. Для каждой строки и столбца таблицы условий найдем разности между двумя минимальными тарифами, записанными в данной строке или столбце, и поместим их в соответствующем дополнительном столбце или дополнительной строке табл. 4.6. Так, в строке A_2 минимальный тариф равен 4, а следующий за ним равен 5, разность между ними 5 - 4 = 1. Точно так же разность между минимальными элементами в столбце B_4 равна 6-2=4. Вычислив все эти разности, видим, что наибольшая из них соответствует столбцу B_4. В этом столбце минимальный тариф записан в клетке, находящейся на пересечении строки A_1 и столбца B_4. Таким образом, эту клетку следует заполнить. Заполнив её, тем самым мы удовлетворим потребности пункта B_4. Поэтому исключим из рассмотрения столбец B_4 и будем считать запасы пункта A_1 равными 160 - 110 = 50 ед. После этого определим следующую клетку для заполнения. Снова найдем разности между оставшимися двумя минимальными тарифами в каждой из строк и столбцов и запишем их во втором дополнительном столбце и во второй дополнительной строке табл. 4.6. Как видно из этой таблицы, наибольшая указанная разность соответствует строке A_1. Минимальный тариф в этой строке записан в клетке, которая находится на пересечении ее со столбцом B_3. Следовательно, заполняем эту клетку. Поместив в нее число 50, тем самым предполагаем, что запасы в пункте A_1 полностью исчерпаны, а потребности в пункте B_3 стали равными 190-50=140 ед. Исключим из рассмотрения строку A_1 и определим новую клетку для заполнения. Продолжая итерационный процесс, последовательно заполняем клетки, находящиеся на пересечении строки A_3 и столбца B_3, строки A_3 и столбца B_2, строки A_2 и столбца B_1, строки A_2 и столбца B_2.

В результате получим опорный план:

$$X=\begin{pmatrix} 0 & 0 & 50 & 110 \\ 120 & 20 & 0 & 0 \\ 0 & 30 & 140 & 0 \end{pmatrix}$$

При этом плане общая стоимость перевозок

$S= 1*50 + 2*110 + 4*120 + 5*20 + 2*30 + 3*140=1330.$

СПАСИБО ЗА ВНИМАНИЕ!